МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Павлыш В.Н., Добровольский Ю.Н.

Кафедра ВМиП ДонНТУ

shamaev@pop.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Pavlysh V.N., Dobrovolskiy J.N. Mathematical modeling of dynamical processes in systems with continuos parameters. *The process of pumping of air into coal stratum are considered. Mathematical model and methods of its realization are suggested.*

При создании ряда объектов и проектировании технологических схем возникает проблема моделирования процессов, происходящих в системах с распределенными параметрами. К ним относятся сплошные среды сложной структуры, линии электроснабжения, трубопроводы и другие.

В данной работе рассматривается процесс напорного нагнетания воздуха в угольный пласт.

В ходе исследований по разработке способов борьбы с метаном в шахтах Московским горным институтом была выдвинута идея использования нагнетания воздуха в угольный пласт в режиме фильтрации через скважины, пробуренные из горных выработок (пневмообработка) с целью углубления дегазации угольного массива. Механизм снижения природной газоносности пласта при нагнетании воздуха заключается в вытеснении свободного метана воздушным потоком в отточную скважину, приводящем к смещению сорбционного равновесия в системе «свободный – сорбированный газ» и десорбции метана с последующим его выносом. Одновременно при пневмообработке возможно снижение эндогенной пожароопасности за счет низкотемпературного окисления угля в массиве, приводящего к снижению его химической активности и, следовательно, склонности к самовозгоранию.

Теоретические и экспериментальные исследования пневмообработки неувлажненного угольного пласта, проведенные Московским угольным институтом, показали возможность интенсификации выноса метана по сравнению с дегазацией скважинами, позволили раскрыть механизм ряда физико-химических процессов, приводящих к снижению газоносности пласта и химической активности угля при нагнетании воздуха. Однако отсутствие количественных характеристик протекающих при нагнетании процессов и малый объем экспериментальных данных не позволили до настоящего времени разработать эффективный режим и определить рациональные параметры пневматического воздействия. В связи с этим, совершенствование пневмообработки как способа борьбы с газом в угольных шахтах предполагает, в первую очередь, детальное исследование процессов в системе «уголь - метан - воздух». При нагнетании воздуха в угольный пласт имеет место ряд сложных, взаимосвязанных физико-химических процессов. Характерные отличия фильтрации воздуха в угле от фильтрации воды обусловлены следующими особенностями воздуха и угольного пласта: сжимаемость воздуха, высокая сорбционная активность угля по отношению к кислороду воздуха, способность угля к окислению и самонагреванию при соприкосновении с кислородом.

Эти отличия, а также общие закономерности фильтрации газов в трещиновато-пористых средах определяют основные физико-химические процессы, происходящие при нагнетании воздуха в угольный пласт:

- фильтрация метано-воздушной смеси;
- десорбция метана и его диффузия из пористых блоков в фильтрационный объем;
- диффузия и сорбция кислорода из потока воздуха;
- окисление и в определенных условиях нагревание угля.

Для разработки математической модели необходимо определить конкретную технологическую схему пневмообработки, что позволит осуществить постановку краевых условий и принять необходимые допущения. Согласно предыдущим исследованиям, пневмообработка угольного пласта производится через серию скважин, пробуренных из подземных выработок, причем четные скважины являются нагнетательными, а нечетные – отточными, предназначенными для выноса из пласта метано-воздушной смеси. Следует отметить, что такая схема пригодна только для пластов с небольшой мощностью, поскольку в противном случае не будет обеспечен эффективный отвод метано-воздушной смеси в отточную скважину. В дальнейшем будем считать, что пневмообработка осуществляется через длинные скважины, пробуренные из подготовительных выработок параллельно линии очистного забоя, причём расстояние между скважинами значительно превышает мощность пласта, что позволяет принять допущение об одномерности фильтрационного потока от нагнетательной скважины к отточной.

Поскольку нас будет интересовать не распределение газов в плоскости пласта, а движение потока в целом, можно считать, что коэффициент проницаемости и эффективная пористость не зависят от координат. Учитывая, что сжимаемость газов значительно выше сжимаемости угля, следует ожидать, что при небольших давлениях, развиваемых при пневмообработке, не будет существенной деформации массива. Поэтому примем коэффициент проницаемости и эффективную пористость пласта постоянными. Кроме того, параметры пневмообработки должны быть подобраны таким образом, чтобы не допустить существенного повышения температуры пласта, поэтому во всех уравнениях, кроме уравнения теплопроводности, значение температуры будем считать постоянным. С учётом сделанных предположений уравнения примут вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{kTR}{m^2 \mu} \frac{\partial}{\partial x}\left[C \frac{\partial C}{\partial x}\right]; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial C_м}{\partial t} = \frac{kTR}{m^2 \mu} \frac{\partial}{\partial x}\left[C_M \frac{\partial C}{\partial x}\right]; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial C_o}{\partial t} = \frac{KTR}{m^2 \mu} \frac{\partial}{\partial x}\left[C_o \frac{\partial C}{\partial x}\right]; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta \frac{C}{m\rho\beta_y} \frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (4)$$

где

$C -$ концентрация газа в фильтрационном объеме, г/см^3;

T – абсолютная температура смеси газов, ^{0} К;

μ – вязкость смеси, н $\cdot$ с/м^2;

m – мощность пласта, м;

ρ – плотность метано – воздушной смеси, г/см^3;

β_y, β – удельные теплоемкости угля и метано – воздушной смеси, дж/кг $\cdot$ град;

R – газовая постоянная, дж/кг $\cdot$ град;

"$м$","$о$"– индексы, относящиеся соответственно к метану и кислороду; переменная без индексов относится к метано - воздушной смеси.

Начальные условия:

$$C(x,0) = C_м(x,0) = C_{м.исх};$$
$$C_o(x,0) = 0; \tag{5}$$
$$T(x,0) = T_o.$$

Граничные условия:

$$C(0,t) = \frac{P_н m}{RT}; \quad C_o(0,t) = 0.23\frac{P_н m}{RT};$$
$$C_м(0,t) = 0; \quad C(L,t) = \frac{P_{атм} m}{RT}; \tag{6}$$

$$C_м(L_{м.с},t) = 0.77C(L_{м.с}t); \quad C_o(L_{м.с}t) = 0.23C(L_{м.с},t);$$

$$0 \le x \le L_{м.с}; \quad t \ge 0.$$

Здесь $C_{м.исх}$ - концентрации свободного метана в необработанном массиве;
$P_н$ - давление нагнетания воздуха;
$L_{м.с}$ - расстояние между нагнетательной и отточной скважинами, м.

Рассмотрим математический аппарат, предлагаемый для решения поставленной краевой задачи.

Пусть имеем первую краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T \quad u(x,0) = u_o(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t). \end{array}\right\} \tag{7}$$

Обозначим:

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\Lambda(t)y_i = \left(a(x_i,t)y_{\bar{x}}\right)x,i = \frac{1}{h}\left[a(x_{i+1},t)\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a(x_i,t)\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right].$$

Введем сетку $w_{h\tau} = w_h \times w_\tau$,

где $w_h = \{x_i = ih, i = 0,1,...,N, hN = l\}$

$w_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,...,K, K\tau = T\}$

Обозначим $y_i^n = y(x_i,t_n)$ $y_{t,i}^n = \dfrac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}$, $y_{\bar{x}x,i}^n = \dfrac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}$,

$Lu \sim \Lambda(t)y_i$. Для того, чтобы $\Lambda(t)u - LC = 0(h^2)$ достаточно выполнение условий:

$$a(x_{i+1},t) + a(x_i,t) = 2K(x_i,t) + 0(h^2),$$

$$\frac{a(x_{i+1},t) - a[x_i,t]}{h} = K'(x_i,t) + 0(h^2) \qquad (8)$$

В качестве $a(x_i,t)$ можно взять: $a(x_i,t) = 0.5(K(x_i,t) + K(x_{i-1},t))$

Разностная схема с весами для задачи (7) имеет вид

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \Lambda(t)\left(\sigma y_i^{n+1} + (1-\sigma)y_i^n\right), i = 1,2,...,N-1.$$

$y_0^n = \mu_1(t_n)$, $y_N^n = \mu_2(t_n)$, $y_i^0 = u_0(x_i)$, где $t \in [t_n, t_{n+1}]$

Определение 1. Разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор $L(L_h \sim L)$ в точке $x = x_i$, если $L_hV_i - L\nu(x_i) \to 0$, где $\nu(x)$ - достаточно гладкая кривая.

Определение 2. Решение $y_h(x) \to u(x)$, если

$$\|y_h - u\|_{c(w_h)} = \max_{x_i \in w_h}|y_h(x_i) - u(x_i)| \to 0$$

$$h \to 0$$

Определение 3. Разностная схема имеет $m-$й порядок точности (или сходится с порядком m), если $\|y_h - u\|_{c(w_h)} \le Mh^m$, где $m > 0, M > 0 - const$.

Неявная схема: $\sigma = 1$

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i}{\tau} = \Lambda(t)y_i^{n+1}, i = 1,2,...,N-1$$

$$y_0^n = \mu_1(t_n), y_N^n = \mu_2(t_n), y_i^0 = u_0(x_i)$$

Рассмотрим нелинейное уравнение: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u)$

Неявная схема: $\dfrac{y_i^{n+1}-y_i}{\tau}=\dfrac{1}{h}\left(a_{i+1}\dfrac{y_{i+1}^{n+1}-y_i^{n+1}}{h}-a_i\dfrac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}\right)+f\left(y_i^n\right)$,

где $a_i=0.5\left(K\left(y_i^n\right)+K\left(y_{i-1}^n\right)\right)$. Эта схема абсолютно устойчива и имеет погрешность аппроксимации порядка $0\left(\tau+h^2\right)$. В сокращенном виде:

$y_{t,i}^n=\frac{1}{2}\left(\left(Ky_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(Ky_x\right)_{\bar{x},i}\right)+f\left(y_i^n\right)$, где $K_i=K\left(y_i^n\right)$.

Рассматриваем задачу напорной фильтрации воздуха (1)…(6).

Воспользуемся схемой: $y_{t,i}^n=\dfrac{1}{2}\left(\left(Ky_{\bar{x}}\right)_{x,i}+\left(Ky_x\right)_{\bar{x},i}\right)+f\left(y_i^n\right)$, где $K_i=K\left(y_i^n\right)$,

$a_i=0.5\left(K\left(y_i^n\right)+K\left(y_{i-1}^n\right)\right)$. Пусть x, y, z, w соответственно приближенное решение системы:

$$\frac{x_i^{n+1}-x_i^n}{\tau}=\frac{Kw_i^nR}{m^2\mu}\frac{1}{h}\left[\frac{\left(x_{i+1}^n+x_i^n\right)x_{i+1}^{n+1}}{2h}-\frac{\left(x_{i+1}^n+2x_i^n+x_{i-1}^n\right)x_i^{n+1}}{2h}+\frac{\left(x_i^n+x_{i-1}^n\right)x_{i-1}^{n+1}}{2h}\right]$$

$$x_0^n=\frac{P_н m}{Rw_0^n},\quad x_N^n=\frac{P_{атм}m}{Rw_N^n},\quad x_i^0=C_{м.исх}=C_0$$

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{Kw_i^nR}{m^2\mu}\frac{1}{h}\left[\frac{\left(y_{i+1}^n+y_i^n\right)x_{i+1}^{n+1}}{2h}-\frac{\left(y_{i+1}^n+2y_i^n+y_{i-1}^n\right)x_i^{n+1}}{2h}+\frac{\left(y_i^n+y_{i-1}^n\right)x_{i-1}^{n+1}}{2h}\right]$$

$$y_0^n=0,\quad y_N^n=0.77x_N^n,\quad y_i^0=x_i^0=C_0$$

$$\frac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\tau}=\frac{Kw_i^nR}{m^2\mu}\frac{1}{h}\left[\frac{\left(z_{i+1}^n+z_i^n\right)x_{i+1}^{n+1}}{2h}-\frac{\left(z_{i+1}^n+2z_i^n+z_{i-1}^n\right)x_i^{n+1}}{2h}+\frac{\left(z_i^n+z_{i-1}^n\right)x_{i-1}^{n+1}}{2h}\right]\ z_0^n=0.23\frac{P_н m}{Rw_0^n}$$

$$,\quad z_N^n=0.23x_N^n,\quad z_i^0=0$$

$$\frac{w_i^{n+1}-w_i^n}{\tau}=-\beta\frac{x_i^n}{m\rho\beta_y}\cdot\frac{w_{i+1}^{n+1}-w_i^{n+1}}{h},\quad w_i^0=T_0$$

Запишем систему для решения методом матричной прогонки:

$$-\frac{2h^2m^2\mu}{Kw_i^nR}\frac{x_i^n}{\tau}=\left(x_{i+1}^n+x_i^n\right)x_{i+1}^{n+1}-\left(x_{i+1}^n+2x_i^n+x_{i-1}^n-\frac{2h^2m^2\mu}{Kw_i^nR}\right)x_i^{n+1}+$$
$$+\left(x_i^n+x_{i-1}^n\right)x_{i-1}^{n+1}$$

$$i=1,2,\dots,N-1,\quad x_0^n=\frac{P_н m}{Rw_0^n,}\quad x_N^n=\frac{P_{атм}m}{Rw_N^n},\quad n=0,1,\dots,K-1$$

$$y_i^{n+1}=y_i^n+\frac{Kw_i^nR\tau}{2h^2m^2\mu}\times$$
$$\times\left[\left(y_{i+1}^n+y_i^n\right)x_{i+1}^{n+1}-\left(y_{i+1}^n+2y_i^n+y_{i-1}^n\right)x_i^{n+1}+\left(y_i^n+y_{i-1}^n\right)x_{i-1}^{n+1}\right]$$
$$y_0^n=0\quad y_N^n=0.77x_N^n\quad y_i^0=x_i^0=C_0$$

$$z_i^{n+1} = z_i^n + \frac{Kw_i^n R\tau}{2h^2 m^2 \mu} \times$$
$$\times \left[\left(z_{i+1}^n + z_i^n \right) x_{i+1}^{n+1} - \left(z_{i+1}^n + 2z_i^n + z_{i-1}^n \right) x_i^{n+1} + \left(z_i^n + z_{i-1}^n \right) x_{i-1}^{n+1} \right]$$
$$z_0^n = 0.23 \frac{P_н m}{Rw_0^n} \quad z_N^n = 0.23 x_N^n \quad z_i^0 = 0$$

$$\frac{-\beta x_i^n}{m\rho\beta_y h} w_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{\beta x_i^n}{m\rho\beta_y h} - \frac{1}{\tau} \right) w_i^{n+1} = -\frac{1}{\tau} w_i^n, \quad w_i^0 = T_0$$

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1,2,...,N-1 \quad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1 \qquad y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2 \qquad \alpha_1 = \chi_1 \quad \beta_1 = \mu_1$$
$$A_i \neq 0 \quad B_i \neq 0 \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i| \quad i = 1,2,...,N-1 \quad |\chi_1| \leq 1 \quad |\chi_2| \leq 1$$
$$y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N}$$

Реализация предложенной вычислительной схемы позволяет промоделировать процесс пневмообработки для решения вопроса об области ее применения и возможной эффективности как средства снижения газовыделения из угольного пласта.

Литература

1. Самарский А.А., Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, 656 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В., Численные методы. – М.: Наука, 1989, 432 с.

Поступила в редакційну колегію 28.12.2002