ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ МЕТОДОМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Гайдук А.Р., Оводенко А.В., Плаксиенко Е.А.

Таганрогский Государственный радиотехнический университет,

Донецкий институт железнодорожного транспорта,

Таганрогский институт экономики и управления

Abstract

Gaiduk A.R., Ovodenko A.V., Plaksienko E.A. Research nonlinear systems with indefiniteness by method of computers technologies. *Presented task of synthesis with control, which's describes by differential equation in variables of condition.*

1. Введение и постановка задачи. Проблема синтеза и исследования нелинейных систем управления при не полностью определенных нелинейностях является очень важной с практической точки зрения, так как определение нелинейностей управляемых систем часто затруднительно. Чаще всего синтез систем управления в этих случаях проводится на основе теории абсолютной устойчивости, частотных методов или интервального подхода [1]. Однако наиболее перспективным представляется метод функций Ляпунова [2], так как он позволяет синтезировать устойчивые нелинейные системы при минимальной информации о нелинейностях системы.

В данной работе рассматривается задача синтеза и исследования систем с одним управлением, которые в квазилинейном представлении [2] описываются дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(x)x + bu, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния, а матрица A(x) и вектор b имеют следующий вид

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0(x) & -\alpha_1(x) & -\alpha_2(x) & \cdots & -\alpha_{n-1}(x) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Предположим, что переменные состояния управляемой системы (1) доступны измерению. Тогда управление можно взять в виде

$$u = -k^T x. \qquad (3)$$

В этом случае можно считать, что коэффициенты последней строки матрицы $A(x) - bk^T$ в (1) можно представить в виде

$$k_{i+1} + \alpha_i(x) = \gamma_{i0} + \varphi_i(x), \quad i = \overline{0, n-1} \qquad (4)$$

где γ_{i0}— постоянные коэффициенты, а нелинейности φ_i(x) являются неизвестными, но ограниченными функциями вектора x, т.е. при всех $x \in R^n$ они удовлетворяют условиям

$$\underline{\varphi}_i \le \varphi_i(x) \le \overline{\varphi}_i, \quad \text{или} \quad |\varphi_i(x)| \le \Delta_{\varphi i},\ i = \overline{0, n-1}. \qquad (5)$$

Управление (5) всегда можно выбрать так, что характеристический полином матрицы замкнутой системы при всех φ_i(x)≡0, i $=\overline{0,n-1}$ будет являться гурвицевым полиномом. При этом значения постоянных коэффициентов i $=\overline{0,n-1}$ могут иметь любые заданные значения.

Возникает вопрос нельзя ли выбрать линейное управление (3) таким образом, чтобы при любых нелинейностях φ_i(x), i $=\overline{0,n-1}$, удовлетворяющих указанным ограничениям (5), нелинейная система (1), (3) была асимптотически устойчивой? Ниже будет показано, что метод функций Ляпунова позволяет дать утвердительный ответ на этот вопрос.

2. Методика синтеза. Как известно, любая устойчивая система обладает некоторым запасом устойчивости. Поэтому, если нелинейности φ_i(x), i $=\overline{0,n-1}$ достаточно малы и находятся в пределах допустимых по условиям асимптотической устойчивости системы (1), (3) при φ_i(x)≡0, i $=\overline{0,n-1}$ вариаций коэффициентов γ_{i0}, i $=\overline{0,n-1}$, то нелинейная система (1), (4), очевидно, будет устойчивой. Однако запас устойчивости обычных линейных систем невелик, поэтому определяемые им допустимые диапазоны изменения нелинейностей φ_i(x)≡0, i $=\overline{0,n-1}$ могут оказаться малыми.

В рассматриваемом случае изменения нелинейностей φ_i(x)≡0, i $=\overline{0,n-1}$, предполагаются достаточно большими. Поэтому необходимо определить численные значения коэффициентов γ_{i0}, i $=\overline{0,n-1}$ таким образом, чтобы указанные выше допустимые вариации были больше заданных изменений нелинейных функций φ_i(x)≡0, i $=\overline{0,n-1}$, определяемых условиями (5).

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом функций Ляпунова. С целью упрощения выкладок рассмотрим здесь систему (1) второго порядка и представим её уравнения с учетом условия $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = \overline{0, n-1}$ в виде системы с параметрами

$$\dot{x} = A(a,b)\,x\,, \tag{6}$$

где a и b — произвольные параметры, а матрица A(a, b) приведена к виду

$$A(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_c^2 + a) & -(2 \cdot \omega_c + b) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где ω_c — произвольное число.

Первоначально задача заключается в определении допустимых диапазонов изменения параметров a и b, при которых система (6), (7) не теряет устойчивости. С этой целью возьмем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы вида

$$V(x) = x' P x\,, \tag{8}$$

где P — симметричная положительно определенная постоянная матрица [2, 3].

Производная по времени от функции V(x) в силу системы (6) определяется выражением

$$\dot{V}(x,a,b) = x^T (A^T(a,b)P + PA(a,b))x = -x^T Q(a,b)\,x\,, \tag{9}$$

где матрица P определяется при a = 0 и b = 0 решением уравнения Ляпунова

$$A^T P + PA = -Q\,. \tag{10}$$

Здесь Q— положительно определенная матрица.

Если при P>0 в уравнении (10) матрица Q(a,b) (9) остается положительно-определенной при любых изменениях параметров a и b в некоторых пределах, то система (6) будет оставаться устойчивой также при любых изменениях этих параметров в тех же пределах. Эта возможность используется ниже для решения поставленной выше задачи синтеза нелинейных систем управления.

Зададимся произвольным числом ω_c и положим Q= E. Тогда в результате решения уравнения (10) получим положительно определенную матрицу P, подставляя которую в уравнение (9), придем к матрице

$$Q(a,b) = -[\,A'(a,b)P + PA(a,b)]\,, \tag{11}$$

зависящей от двух переменных.

При малых параметрах a и b матрица Q(a, b)>0 будет положительно определенной. При увеличении этих параметров матрица (a, b) станет отрицательно определенной, и система (6) потеряет устойчивость. Следовательно, для определения максимально допустимых по устойчивости значений параметров a и b можно заменить в (11) матрицу (a, b) нулевой матрицей. В результате равенство (11) принимает вид

$$[A^T(a,b)P + PA(a,b)] = 0.$$

Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно параметров a и b. На плоскости a, b оно определяет некоторую кривую, показанную на рис. 1.

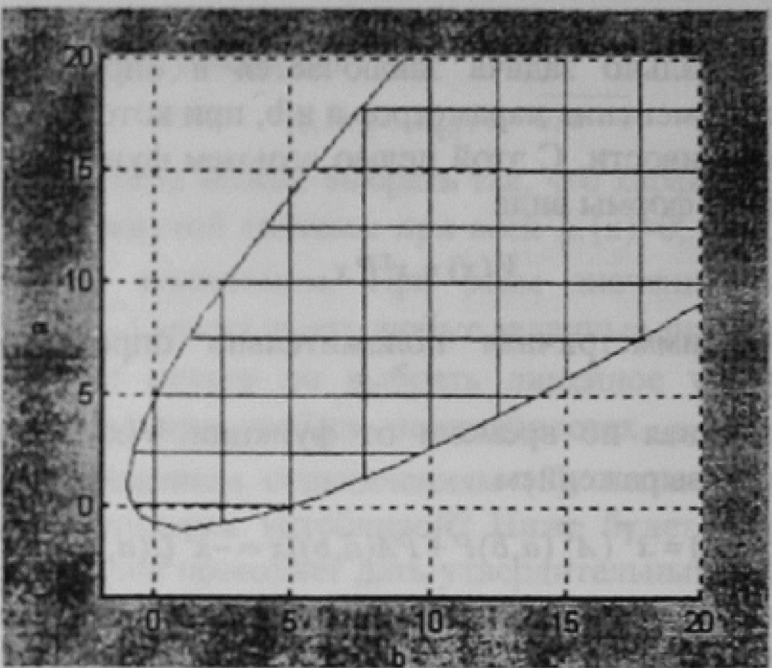

Рис. 1

Кривая, определяемая уравнением относительно параметров a и b.

Если точки, соответствующие некоторым значениям параметров a и b попадают в заштрихованную область, то система (6) является устойчивой, так как в этой области матрица (a, b)>0. Если же точки, соответствующие значениям параметров a и b выходят за рамки заштрихованной области, то устойчивость системы не гарантируется, так как условия теоремы Ляпунова является достаточными.

На основе рис. 1 можно заключить, что с увеличением значений параметров a и b область допустимых по условиям устойчивости изменений коэффициентов α_i i=1,2 характеристического уравнения матрицы замкнутой системы (1), (3) **неограниченно возрастает**. Причем характер этих изменений значения не имеет. Следовательно, всегда можно выбрать такие значения коэффициентов управления (3), что допустимые вариации коэффициентов α_i i=1,2 замкнутой системы будут больше изменений функций $\varphi_i(x)$, $i=\overline{0,n-1}$, определяемых условиями (5). Тем самым будет обеспечена асимптотическая устойчивость положения равновесия замкнутой нелинейной системы (1), (3) при любых нелинейностях, удовлетворяющих условиям (5).

3. Пример. Среди разнообразных исследований Н. Е. Жуковского, имеется работа, посвященная колебаниям маятника 1, подвешенного на равномерно вращающемся вале 2 (рис. 2,а). Вращение вала 2 уменьшает трение подвески, что позволяет измерять малые углы φ отклонения от вертикали. Однако положение равновесия такого маятника является неустойчивым. Поэтому возникает задача стабилизации его положения равновесия.

Так как момент трения подвески зависит от относительной угловой скорости вала и маятника (рис. 2,б), т.е. $M_{тр}=F(\Omega-\dot\varphi)$ [4], то уравнение движения последнего с учетом стабилизирующего управления имеет вид

$$I\ddot\varphi+b\dot\varphi+mgl\sin\varphi=F(\Omega-\dot\varphi)+u(\varphi,\dot\varphi),$$

где I — момент инерции маятника, b — коэффициент сопротивления воздуха, m — масса маятника, l— длина маятника [4].

Для простоты не будем учитывать сопротивление воздуха. Кроме того, поскольку вал подвески вращается с постоянной скоростью, характеристика момента трения $F(\Omega-\dot\varphi)$ является однозначной и её можно аппроксимировать полиномом 6-ой степени (степень полинома определяется в зависимости от требуемой точности аппроксимации). Тогда уравнение маятника можно представить следующим образом

$$I\ddot\varphi-\tilde F(\Omega-\dot\varphi)\dot\varphi+mgl\sin\varphi=u(\varphi,\dot\varphi), \qquad (12)$$

где $\tilde F(\Omega-\dot\varphi)=F(\Omega-\dot\varphi)/\dot\varphi$ - квазилинейное представление нелинейности $F(\Omega-\dot\varphi)$ [2].

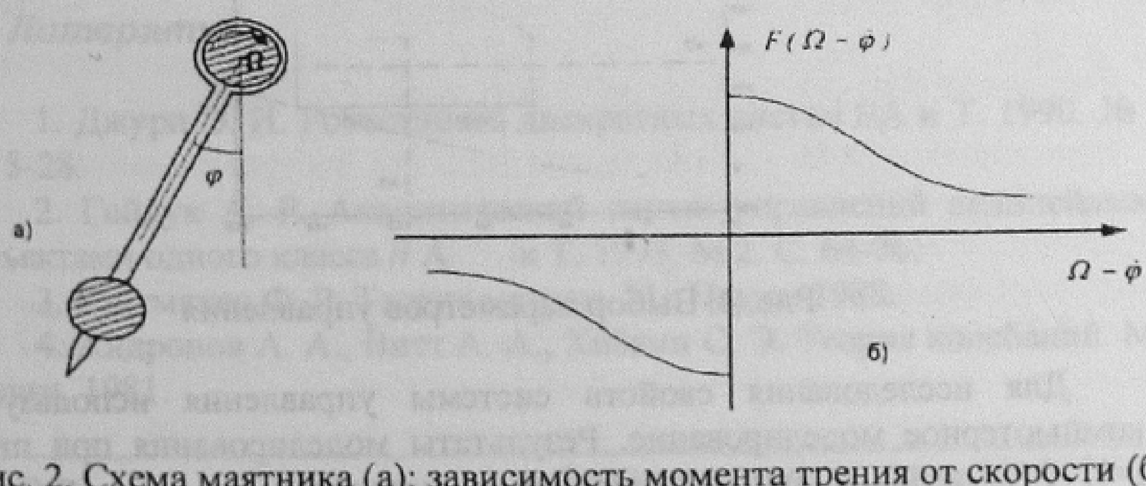

Рис. 2. Схема маятника (а); зависимость момента трения от скорости (б)

Если к маятнику не прикладывать управляющего воздействия, то он будет совершать незатухающие колебания. Это подтверждается компьютерным моделированием уравнения (12) (в системе Matlab), результаты которого представлены на рис. 3. для обеспечения устойчивости положения равновесия маятника в систему вводится линейное управление по состояниям.

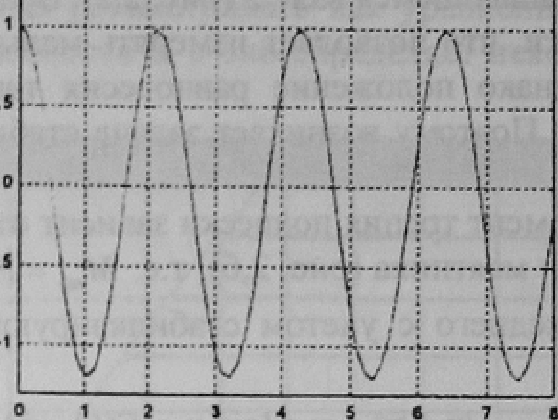

Рис. 3. Автоколебания маятника

Для определения этого управления, в соответствии с изложенным выше, сначала находится область устойчивости в пространстве параметров α_0, α_1. Далее выбираются такие коэффициенты управления, чтобы коэффициенты $\alpha_0(\varphi), \alpha_1(\dot{\varphi})$ квазилинейного представления системы принадлежали этой области при всех значениях φ и $\dot{\varphi}$. Схема выбора коэффициентов управления показана на рис. 4.

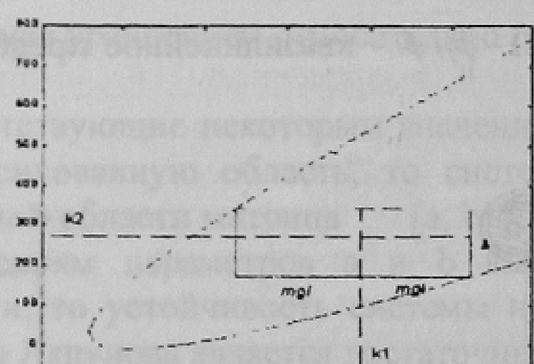

Рис. 4. Выбор параметров управления

Для исследования свойств системы управления используется компьютерное моделирование. Результаты моделирования при m=10, l=1, I=1, g=10 и аппроксимирующем полиноме $F(\Omega-\dot{\varphi})=$ $0.00000146\dot{\varphi}$ $-0.000012\dot{\varphi}$ $-$ $0.00019\dot{\varphi}$ $+0.0046\dot{\varphi}$ $-0.035\dot{\varphi}$ $-0.02\dot{\varphi}$ $+1.0987$

приведены на рис. 5. Они свидетельствуют об устойчивости положения равновесия стабилизированного маятника при различных нелинейностях, удовлетворяющих (5).

Заключение. В работе предлагается методика синтеза и компьютерного исследования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с неопределенными нелинейностями, допускающими квазилинейное представление. Предполагается, что коэффициенты этого представления нелинейностей ограничены известными пределами. Методом компьютерного моделирования показано, что предложенное линейное управление, обеспечивает устойчивость в целом положения равновесия нелинейной системы второго порядка при любых нелинейностях, удовлетворяющих указанным ограничениям.

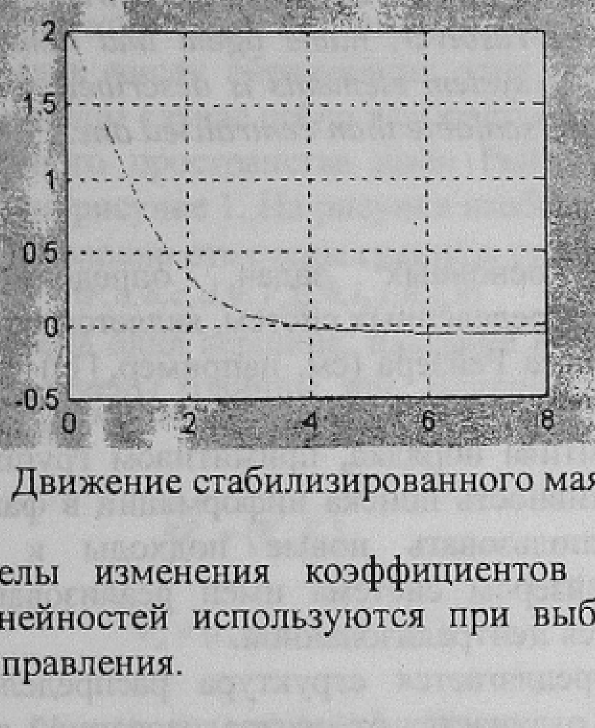

Рис. 5. Движение стабилизированного маятника

Заданные пределы изменения коэффициентов квазилинейного представления нелинейностей используются при выборе параметров стабилизирующего управления.

Литература

1. Джури Э. И. Робастность дискретных систем //А и Т. 1990. № 5. С. 3-28.

2. Гайдук А. Р. Аналитический синтез управлений нелинейными объектами одного класса // А и Т. 1993. М 2. С. 64-76.

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука. 1988.

4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.

Дата надходження до редакції 01.06.2005 р.