ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Труб И.И.,

кафедра ПМиИ ДонГТУ
E-mail: trub@pmi.donetsk.ua

Abstract.

Trub I. Automodel technique for boundary problem for free vibration equation. *The 4-th order partial equation of free vibration is considered as object for applying automodel substitution. Primordial equation is reduced to the ordinary differential equation of the 4-th order with respect to new variable. Article contains detailed consideration of it's properties. Numerical method for that equation with infinite sums is developed. Technique for evaluation of eigenvalues with taking into attention of boundary conditions is described.*

Рассматривается уравнение свободных колебаний балки

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0,$$

где E, I, ρ – некоторые физические характеристики балки (модуль Юнга, плотность).

Граничные условия: отрезок [0; l], y(0,t) = 0, yx(0, t) = 0, yxx(l, t) = 0, yxxx(l, t) = 0, l - длина балки.

Уравнение решается автомодельным методом. Решение ищется в виде:

$$y=U\left(\frac{x/l}{\sqrt{1+\beta t}}\right)(1+\beta t)^{\alpha} \qquad \frac{x/l}{\sqrt{1+\beta t}}=z$$

$$y_{xxxx}=\frac{U^{IV}}{l^4}(1+\beta t)^{\alpha-2}$$

$$y_{tt}=\frac{\beta^2x^2}{4\cdot l^2}U''(1+\beta t)^{\alpha-3}+\frac{3}{4}\frac{\beta^2 x}{l}U'(1+\beta t)^{\alpha-\frac{5}{2}}-\frac{\beta^2\alpha x}{l}U'(1+\beta t)^{\alpha-\frac{5}{2}}+\alpha(\alpha-1)\beta^2(1+\beta t)^{\alpha-2}U$$

После подстановки в уравнение получим

$$\frac{U^{IV}}{l^4}(1+\beta t)^{\alpha-2}+\frac{\beta^2\rho x^2}{EI\cdot 4l^2}U''(1+\beta t)^{\alpha-3}+\frac{3}{4}\frac{\beta^2\rho x}{EIl}U'(1+\beta t)^{\alpha-\frac{5}{2}}-\frac{\beta^2\alpha x\rho}{EIl}U'(1+\beta t)^{\alpha-\frac{5}{2}}+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\beta^2\rho}{EI}(1+\beta t)^{\alpha-2}U=0$$

Значение β выбираем из условия $\frac{\beta\rho^2}{EI}=1\Rightarrow\beta=\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$. Теперь после почленного деления на $(1+\beta t)^{\alpha-2}$ уравнение принимает вид:

$$\frac{U^{IV}}{l^4}+\frac{x^2}{4l^2}U''(1+\beta t)^{-1}+\frac{3}{4}\frac{x}{l}U'(1+\beta t)^{-\frac{1}{2}}-\alpha\frac{x}{l}U'(1+\beta t)^{-\frac{1}{2}}+\alpha(\alpha-1)U=0$$

или

$$\frac{U^{IV}}{l^4}+\frac{z^2U''}{4}+\frac{3}{4}z\,U'-\alpha\,zU'+\alpha(\alpha-1)U=0 \qquad \text{(I)}$$

Мы получили обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Будем искать его решение в виде степенного ряда.

Полное решение уравнения (I) есть суперпозиция четырех функций $U_i\ (i=1,\dots 4)$, обладающих следующим свойством:

	U_1	U_2	U_3	U_4
$U_i(0)$	1	0	0	0
$U_i'(0)$	0	k	0	0
$U_i'(0)$	0	0	k^2	0
$U_i'(0)$	0	0	0	k^3

Точно такое же ОДУ мы получим, используя подстановку $z_1=\dfrac{(l-x)/l}{\sqrt{(1+\beta t)}}$.

Так как на характер колебаний участка балки влияет его удаленность от обоих ее концов, логичным будет искать решение нашей задачи в виде:

$$U=C_1U_1(z)+C_2U_2(z)+C_3U_3(z)+C_4U_4(z)+C_5U_1(z_1)+C_6U_2(z_1)+C_7U_3(z_1)+C_8U_4(z_1).$$

Определим теперь каковы будут коэффициенты рядов U_1,U_2,U_3,U_4. Подставляя в ОДУ вместо $U=\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i$, получим, что нулю должна равняться сумма следующих пяти рядов:

1) $\frac{1}{l^4}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)a_{i+4}x^i$; 2) $\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{\infty}ia_ix^i$; 3) $\frac{1}{4}\sum_{i=2}^{\infty}i(i-1)a_ix^i$;

4) $-\alpha\sum_{i=1}^{\infty}ia_ix^i$; 5) $\alpha(\alpha-1)\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$.

Для U_1 $a_0=1,a_1=0,a_2=0,a_3=0$, далее a_{4n} рекуррентно определяется из $a_{4n-4};a_{4n+2},a_{4n+3},a_{4n+1}=0,\ n\in N$. Для U_2 $a_0=0,a_1=k,a_2=0,a_3=0$, далее a_{4n+1} рекуррентно определяется из $a_{4n-3};a_{4n},a_{4n+3},a_{4n+2}=0,\ n\in N$. Для U_3 $a_0=0,a_1=0,a_2=\dfrac{k^2}{2},a_3=0$, далее a_{4n+2} рекуррентно определяется из $a_{4n-2};a_{4n},a_{4n+1},a_{4n+3}=0,\ n\in N$. Для U_4 $a_0=0,a_1=0,a_2=0,a_3=\dfrac{k^3}{6}$, далее a_{4n+3} рекуррентно определяется из $a_{4n-1};a_{4n},a_{4n+1},a_{4n+2}=0,\ n\in N$.

Ряды U_1-U_4 имеют следующий вид:

$$U_1=\left(1+a_4z^4+a_8z^8+\ldots\right)(1+\beta t)^\alpha \quad U_2=\left(kz+a_5z^5+a_9z^9+\ldots\right)(1+\beta t)^\alpha$$

$$U_3=\left(\frac{k^2}{2}z^2+a_6z^6+a_{10}z^{10}+\ldots\right)(1+\beta t)^\alpha \quad U_4=\left(\frac{k^3}{6}z^3+a_7z^7+a_{11}z^{11}+\ldots\right)(1+\beta t)^\alpha$$

Для каждого ряда выберем значения α по следующему правилу:

$\alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\alpha+\frac{1}{2},\ \alpha_3=\alpha+1,\ \alpha_4=\alpha+\frac{3}{2}.$ Благодаря такому выбору в членах рядов с одинаковым порядковым номером (например, первые члены: $1,\ kz,\ \frac{k^2}{2}z^2,\ \frac{k^3}{6}z^3$) степени $(1+\beta t)$ будут совпадать, а это значительно облегчит удовлетворение граничным условиям и поиск собственных чисел.

Теперь докажем следующее важное утверждение: для всех $0<\alpha<1$ все четыре ряда являются знакочередующимися, начиная, по крайней мере, со второго члена. Заметим, что сходимость этих рядов очевидна, ибо рекуррентная формула имеет вид:

$$a_{i+4}=\frac{-a_i\left(\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i(i-1)-\alpha i+\alpha(\alpha-1)\right)l^4}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}$$, что эквивалентно $\frac{1}{i^2}$.

Для доказательства знакочередования нужно рассмотреть квадратный трехчлен относительно α, стоящий в скобках в рекуррентной формуле. По построению, мы имеем четыре его модификации:

1) $i=4n,\ \alpha_1=\alpha;$ 2) $i=4n+1,\ \alpha_2=\alpha+\frac{1}{2};$ 3) $i=4n+2,\ \alpha_3=\alpha+1;$ 4) $i=4n+3,\ \alpha_4=\alpha+\frac{3}{2}$

$n\in z,\ n\geq 0,\ 0\langle\alpha\langle 1.$

Подставляя эти значения вместо *i* для всех четырех случаев, получаем одно и то же уравнение: $\alpha^2-(4n+1)\alpha+4n^2+2n=0$. Его корни: $\alpha=\frac{4n-1}{2};\ \frac{4n+3}{2}$. При $\alpha\langle\frac{4n-1}{2}$ трехчлен положителен. Но для всех $n\in z,\ n\rangle 0$ è $\frac{4n-1}{2}\rangle 1$. Исключение составляет лишь случай *n=0*. Следовательно, начиная со второго члена, все четыре ряда будут знакочередующимися. Знакочередование обеспечивается знаком минус перед формулой и положительностью квадратного трехчлена в скобках при 0<α<1.

Для удовлетворения граничным условиям примем во внимание только первые и вторые члены рядов. Используя первые члены, получим следующие четыре уравнения:

$C_1+C_5+kC_6+\frac{k^2C_7}{2}+\frac{k^3C_8}{6}=0$ ($y(0,t)=0$); $kC_2-kC_6-k^2C_7-\frac{k^3C_8}{2}=0$ ($y_x(0,t)=0$);

$k^2C_3+k^3C_4+k^2C_7=0$ ($y_{xx}(l,t)=0$); $C_4-C_8=0$ ($y_{xxx}(l,t)=0$);

Теперь получим четыре уравнения из вторых членов рядов. Их сумма имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{l}\dfrac{C_1\left(\alpha^2-\alpha\right)x^4}{24l^4}+\dfrac{kC_2x^5}{l^5}\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)}{120}+\dfrac{k^2C_3x^6}{l^6}\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)}{720}+\dfrac{k^3C_4x^7}{l^7}\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)}{5040}+\\ \dfrac{C_5(l-x)^4}{l^4}\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)}{24}+\dfrac{C_6k(l-x)^5}{l^5}\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)}{120}+\dfrac{k^2C_7(l-x)^6}{l^6}\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)}{720}+\\ \dfrac{k^3C_8(l-x)^7}{l^7}\dfrac{\left(\alpha^2-\alpha\right)}{5040}\end{array}\right)+(1+\beta t)^{\alpha-2} \quad (2)$$

Используя четыре граничных условия, получаем следующие линейные уравнения:

$$C_5+\frac{kC_6}{5}+\frac{k^2C_7}{30}+\frac{k^3C_8}{210}=0;\quad C_5+\frac{kC_6}{4}+\frac{k^2C_7}{20}+\frac{k^3C_8}{120}=0;$$

$$C_1+\frac{kC_2}{3}+\frac{k^2C_3}{12}+\frac{k^3C_4}{60}=0;\quad C_1+\frac{kC_2}{2}+\frac{k^2C_3}{6}+\frac{k^3C_4}{24}=0.$$

Теперь поясним смысл параметра α. Пусть дана погрешность ε удовлетворения граничным условиям. Так как, начиная со второго члена, ряд является знакочередующимся, то достаточно, чтобы сумма вторых членов рядов была меньше ε. После нахождения $C_i\,(i=1\ldots8)$ и k, полагая $t=0$ $(\alpha-2\langle 1)$, $x=l$ для $U_i(z)$ и $x=0$ для $U_i(z_1)$, получим некоторое неравенство $M\left(\alpha^2-\alpha\right)\langle\,\varepsilon$, где М- число. Такие неравенства можно составить для каждого граничного условия и выбрать α, входящие в каждый из четырех промежутков($\alpha<1$).

Вернемся к решению основной задачи. Выпишем полученную СЛАУ:

$$\begin{array}{llllllll}
C_1 & & & & +C_5 & +kC_6 & +\dfrac{k^2C_7}{2} & +\dfrac{k^3C_8}{6} & =0 \quad (а)\\
 & kC_2 & & & & -kC_6 & -k^2C_7 & -\dfrac{k^3C_8}{2} & =0 \quad (б)\\
 & & k^2C_3 & +k^3C_4 & & & +k^2C_7 & & =0 \quad (в)\\
 & & & k^3C_4 & & & & -k^3C_8 & =0 \quad (г)\\
 & & & & C_5 & +\dfrac{kC_6}{5} & +\dfrac{k^2C_7}{30} & +\dfrac{k^3C_8}{210} & =0 \quad (д)\\
 & & & & C_5 & +\dfrac{kC_6}{4} & +\dfrac{k^2C_7}{20} & +\dfrac{k^3C_8}{120} & =0 \quad (е)\\
C_1 & +\dfrac{kC_2}{3} & +\dfrac{k^2C_3}{12} & +\dfrac{k^3C_4}{60} & & & & & =0 \quad (ж)\\
C_1 & +\dfrac{kC_2}{2} & +\dfrac{k^2C_3}{6} & +\dfrac{k^3C_4}{24} & & & & & =0 \quad (з)
\end{array}$$

Из условия равенства нулю определителя вычисляется параметр k.

Из уравнений ж) и з) выражаем C_1 и C_2 через C_3 и C_4. Из уравнений в) и г) выражаем C_7 и C_8 через C_3 и C_4. Затем из уравнений а) и б) выражаем C_5 и C_6 через C_3 и C_4 и, подставив в д) и е), раскроем определитель 2-го порядка: $105k^4-280k^3+276k^2-120k+20=0$. Все четыре корня этого знакочередующегося уравнения являются комплексными: $k=1.99 \pm 1.29i;\ -0.66 \pm 1.3i$. Следовательно, и коэффициенты $C_i(i=1..8)$ также будут комплексными.

Заметим, что в исходной задаче могут быть поставлены не только краевые, но также и начальные условия $y(x,0)=\varphi(x)\ \ y_t(x,0)=\varphi_1(x)$. Физически это соответствует случаю, когда изогнутую в начальный момент балку с закрепленным левым концом отпускают, и она совершает колебания.

Пусть $U_i(z)$ и $U_i(z_1)$ - автомодельные решения уравнения. Тогда их линейная комбинация также является решением и образует вектор в восьмимерном комплексном пространстве. Вектор $C_i(i=1..8)$ можно подобрать так, чтобы наилучшим образом удовлетворить начальным условиям. В качестве меры близости выполнения начальных условий возьмем

$$S[U(x,t)]=\int_0^l\left[U(x,0)-U_н(x)\right]\left[\overline{U}(x,0)-U_н(x)dx\right]+\int_0^l\left[U_t(x,0)-\dot{U}_н(x)\right]\left[\overline{U_t}(x,0)-\ddot{U}_н(x)\right]dx.$$

Из всего множества собственных функций (множества векторов $C_1 \ldots C_8$) подбираем такой, который минимизирует S. Грубо говоря, нас интересуют такие C_i, которые наиболее близко лежат от тейлоровских коэффициентов разложения функций, являющихся начальными условиями задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, 1981.

2. Седов Л.И. Механика сплошных сред (В 2-х томах). - М.: Наука, 1973.