

ТРИОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ КООРДИНАЦІЇ ПРОСТОРУ, НОРМАЛЬНО ЗВ'ЯЗАНОЇ З КООРДИНАЦІЄЮ ПОВЕРХНІ

Пропонується алгоритм отримання триортогональної системи, поданої поверхнею, що віднесена до лінії кривини

Триортогональні системи мають широкі застосування у багатьох галузях: в математичній фізиці, теорії пружності, теорії суцільного середовища і таке інше. Віднесення простору до триортогональної системи значно спрощує викладання сутності предметів вивчення названих дисциплін. Особливої уваги заслуговує триортогональна параметризація простору на основі поверхні, яка входить в одну з трьох сімей триортогональної системи.

Загальне рівняння введення параметризації простору, зв'язаної з координацією поверхні, знаходимо в [1]:

$$R = r(u, v) + \lambda n(u, v), \quad (1)$$

де $r(u, v)$ – радіус-вектор поверхні, віднесеної до довільних криволінійних координат, $n(u, v)$ – вектор нормалі у довільній точці поверхні, λ – скалярний множник.

У координатному вигляді функції введення координат простору, нормально зв'язаних з координацією поверхні, що подана параметричними рівняннями у довільній параметризації

$$x = x(t, u), \quad y = y(t, u), \quad z = z(t, u), \quad (2)$$

містяться в [2]:

$$\begin{aligned} x &= x(t, u) + a\omega, \\ y &= y(t, u) + b\omega, \\ z &= z(t, u) + c\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$a = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} \quad (4)$$

– проекції нормалі на координатні осі.

Зручно параметр ω замінити на параметр w нормуванням вектора нормалі $n(a, b, c)$ за формулою

$$\omega = \frac{w}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (5)$$

Умовою придатності параметричних рівнянь поверхні (2) для введення триортогональної системи координат за виразами (3), (4), (5) є віднесення цієї поверхні до ліній кривини, тобто координатні лінії $t = const$ і $v = const$ мусять збігатися з лініями кривини. Ця умова може бути представлена рівностями нулю середнього коефіцієнта першої квадратичної форми

$$F = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \quad (6)$$

та чисельника M' коефіцієнта M другої квадратичної форми:

$$M' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} & \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} & \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

При виконанні умов (6), (7) функції (3) з врахуванням (4), (5) будуть представляти триортогональну координатну систему, сім'ями Ламе якої будуть: $v = \text{const}$ - поверхні, еквідистантні поверхні (2), $t = \text{const}$ та $u = \text{const}$ - поверхні конгруенції нормалей, що проходять через координатні лінії $t = \text{const}$ та $u = \text{const}$, які до речі є лініями кривини поверхні (2).

Наведемо приклад.

Приклад. Побудувати триортогональну систему, до якої входить розгортний гелікоїд:

$$x = r \cos t + (u + rt) \sin t, \quad y = r \sin t - (u + rt) \cos t, \quad z = -ku, \quad (8)$$

де $r = \text{const}$, $k = \text{const}$.

Розв'язання. Впевнімося, що поверхня (8) віднесена до ліній кривини. Частинні похідні функцій (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= (u + rt) \cos t, & \frac{\partial y}{\partial t} &= (u + rt) \sin t, & \frac{\partial z}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \sin t, & \frac{\partial y}{\partial u} &= -\cos t, & \frac{\partial z}{\partial u} &= -k, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} &= \cos t, & \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} &= \sin t, & \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} &= 0 \end{aligned}$$

і умови (6), (7) виконуються.

Вирази a, b, c згідно з (4):

$$a = -k(u + rt) \sin t, \quad b = k(u + rt) \cos t, \quad c = -(u + rt). \quad (9)$$

Вираз ω згідно з (5):

$$\omega = \frac{w}{(u + rt)\sqrt{k^2 + 1}}. \quad (10)$$

Підстановка правих частин параметричних рівнянь (8) замість $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$, $z = z(t, u)$, виразів (9) a, b, c , виразу (10) ω до рівнянь (3) дає вирази функцій введення триортогональної системи координатного простору з початковою умовою належності розгортного гелікоїда (8) до однієї з координатних сімей $v = \text{const}$:

$$\begin{aligned} x &= r \cos t + (u + rt) \sin t - \frac{kw \sin t}{\sqrt{k^2 + 1}}, \\ y &= r \sin t - (u + rt) \cos t + \frac{kw \cos t}{\sqrt{k^2 + 1}}, \\ z &= -ku - \frac{w}{\sqrt{k^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Достовірність факту триортогональності системи (11) отримаємо підстановкою частинних похідних функцій (11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= (u + rt - \frac{kw}{\sqrt{k^2 + 1}}) \cos t, & \frac{\partial y}{\partial t} &= (u + rt - \frac{kw}{\sqrt{k^2 + 1}}) \sin t, & \frac{\partial z}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \sin t, & \frac{\partial y}{\partial u} &= -\cos t, & \frac{\partial z}{\partial u} &= -k, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{k \sin t}{\sqrt{k^2 + 1}}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{k \cos t}{\sqrt{k^2 + 1}}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \end{aligned}$$

до умов (6), (7). Обидві умови виконуються.

Координатні поверхні триортогональної системи (11):

$t = const$ - сім'я півплощин, дотичних до циліндра радіуса r ;

$u = const$ - сім'я співосних розгортних гелікоїдів з ребром звороту на циліндрі радіуса r , кроку $h = 2\pi rk$;

$w = const$ - сім'я співосних розгортних гелікоїдів з ребром звороту на циліндрі радіуса r , кроку $h_1 = -2\pi r \frac{1}{k}$.

Координатні лінії:

t -лінії – ортогональні траєкторії площин $t = const$;

u -лінії – прямолінійні твірні сім'ї гелікоїдів $w = const$;

w -лінії – прямолінійні твірні сім'ї гелікоїдів $u = const$.

Висновки. Нормаль до розгортного гелікоїда (8) належить площині $t = const$, тому достовірність триортогональності системи (11) можна встановити як за виконанням умов (6), (7), так і за іншою схемою формоутворення триортогональних систем, згідно з якою на площині $t = const$ встановлено прямокутну декартову систему з u - та w -ліній, а площина $t = const$ перекочується без ковзання по циліндру r .

Література

1. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. ч.І, М.–Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ., 1947, 542с.
2. *Коломієць О.А.* Математичні та комп'ютерні моделі поверхонь в спеціальних нормальних координатах: Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. – Донецьк, 2000. – 219с.