МЕХАНІКА

УДК 531.36, 531.38

ВЛИЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ТОНОВ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЮ ВРАЩЕНИЯ СВОБОДНОГО ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. Н. Кононов, Т. В. Хомяк

С учетом дополнительных тонов колебания жидкости получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения свободной системы двух упруго связанных волчков Лагранжа, один из которых имеет произвольную осесимметричную полость с идеальной жидкостью. Аналитически показана возможность стабилизации неустойчивого вращения волчка Лагранжа с жидкостью при помощи вращающегося твердого тела. Оценено влияние дополнительных тонов колебания жидкости на эффект стабилизации. Результаты аналитических исследований подтверждены численными расчетами для цилиндрической полости.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, идеальная жидкость, устойчивость, пассивная стабилизация, цилиндрическая полость.

Введение. В работах [1 – 3] с учетом основного тона колебания жидкости ($n=1$) исследованы необходимые условия устойчивости равномерного вращения системы двух связанных волчков Лагранжа, один из которых содержит произвольную осесимметричную полость с идеальной жидкостью. Показана возможность стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом. В данной работе обобщается эта задача на случай двух ($n=1,2$) и трех тонов колебания жидкости ($n=\overline{1,3}$), что позволяет уточнить ранее полученные результаты и оценить влияние дополнительных тонов на устойчивость и стабилизацию вращения волчка Лагранжа.

Постановка задачи. Пусть движущийся по инерции волчок Лагранжа с полостью, полностью заполненной идеальной, однородной и несжимаемой жидкостью, равномерно вращается как одно целое с жидкостью с угловой скоростью $\tilde{\omega}_0$ вокруг оси симметрии (рис. 1). Тело S состоит из твердого тела S^0 и полости с жидкостью. Такое движение является неустойчивым [4, 5].

Для поиска возможностей стабилизации неустойчивого вращения волчка с жидкостью представим твердое тело S^0 в виде системы двух твердых тел S_1^0 и S_2^0 (рис. 2), соединив их в точке O_2 при помощи упругого сферического шарнира с коэффициентом k ($k>0$). В случае $k=\infty$ этот шарнир вырождается в цилиндрический. Под телом S_1 будем понимать твердое тело S_1^0 с полостью, содержащей жидкость.

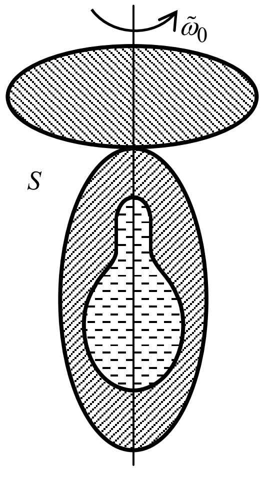

Рис. 1

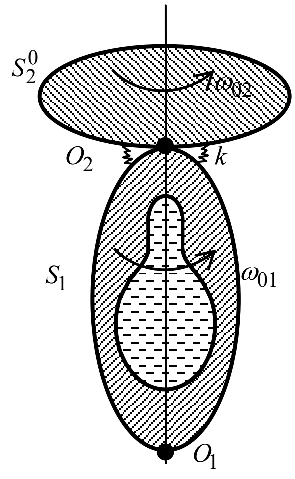

Рис. 2

Пусть в невозмущенном движении тело S_1 вращается как одно целое с угловой скоростью $\bar{\omega}_{01}$, а S_2^0 − с $\bar{\omega}_{02}$. Эти вращения происходят вокруг общей оси симметрии (рис. 2). Таким образом, исходная механическая система представляется в виде системы двух твердых тел, связанных упругим сферическим или цилиндрическим шарниром.

Метод решения. В основу решения рассматриваемой задачи положены уравнения движения системы упруго связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость [6]. Уравнения возмущенного движения идеальной жидкости получены на основе модального анализа, разработанного в работах [4, 5]. Суть этого метода заключается в том, что рассматривается задача на собственные формы и частоты колебания вращающейся идеальной жидкости, а вектор относительного возмущенного движения жидкости представляется в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний жидкости.

Соболев С. Л. [7] показал, что имеется счетное число частот собственных колебаний λ_n, всюду плотно заполняющих отрезок $[-2\tilde{\omega}_0, 2\tilde{\omega}_0]$.

Уравнения возмущенного движения системы упруго связанных двух твердых тел, одно из которых содержит жидкость, имеют вид [6, 8]

$$
\begin{gathered}
A_1'\dot{\Omega}_1 + iC_1\omega_{01}\Omega_1 + \tilde{a}_1 s_2\dot{\Omega}_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{S}_n' = (\tilde{a}_1 g - k_2)\gamma_1,\\
A_2'\dot{\Omega}_2 + iC_2\omega_{02}\Omega_2 + s_2\tilde{a}_1\dot{\Omega}_1 = (\tilde{a}_2 g - k_2)\gamma_2,\ \dot{\gamma}_1 = \Omega_1,\ \dot{\gamma}_2 = \Omega_2,\\
\dot{S}_n' + i(\omega_{01} - \lambda_n)S_n' + \frac{a_n}{N_n^2}(\dot{\Omega}_1 + i\omega_{01}\Omega_1) = 0\ \ (n = 1, 2...),\\
A_1' = A_1 + m_2 s_1^2,\ A_2' = A_2,\ \tilde{a}_1 = m_1 c_1 + s_1 m_2,\ \tilde{a}_2 = m_2 c_2.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь A_j и C_j – соответственно главный экваториальный и осевой момент инерции тел S_1 и S_2^0 относительно их центров масс $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$; $\Omega_j = q_j' - ip_j'$, $S_n' = \mathrm{e}^{-i\omega_{01}t} S_n$, $\gamma_j = \alpha_{13}^j + i\alpha_{23}^j$, $s_1 = O_1O_2$, $c_1 = O_2\tilde{C}_1$, $c_2 = O_2\tilde{C}_2$; p_j', q_j' – проекции возмущенной угловой скорости j-го тела; S_n – коэффициенты разложения возмущенной относительной скорости жидкости; α_{13}^j и α_{23}^j - направляющие косинусы j-го тела ($j = 1, 2$).

Частотное уравнение движения такой системы записывается следующим образом [1 – 3]

$$
F_1 F_2 - \left(\mu + \frac{k}{\lambda^2}\right)^2 = 0, \tag{2}
$$

где

$$
F_1 = A_1' + \frac{C_1\omega_{01}}{\lambda} - \frac{k}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{01})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n}{\lambda + \tilde{\lambda}_n},\quad \tilde{\lambda}_n = \left(1 - \frac{2}{\kappa_n}\right)\omega_{01},
$$

$$
F_2 = A_2' + \frac{C_2\omega_{02}}{\lambda} - \frac{k}{\lambda^2},\ \ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} c_1 c_2.
$$

Если отсутствует упругий восстанавливающий момент ($k = 0$) и центр масс второго тела S_2^0 совпадает с общей точкой O_2 ($c_2 = 0$), тогда уравнение (2) распадается на два независимых уравнения. Следовательно, в этом случае не сказывается влияние вращающегося второго твердого тела S_2^0 на тело $E_n = 0$, то есть отсутствует возможность стабилизации свободного волчка Лагранжа с жидкостью при помощи вращающегося твердого тела [8].

В случае цилиндрического соединения твердых тел ($k = \infty$) уравнение (2) преобразовывается к виду

$$
\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 + 2\mu = 0. \tag{3}
$$

Здесь

$$
\tilde{F}_1 = A_1' + \frac{C_1\omega_{01}}{\lambda} - (\lambda + \omega_{01})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n}{\lambda + \tilde{\lambda}_n},\quad \tilde{F}_2 = A_2' + \frac{C_2\omega_{02}}{\lambda}.
$$

Уравнение (3) с учетом основного тона рассмотрено в работах [1 – 3].

В работе Л. В. Докучаева и Р. В. Рвалова [4] показано, что в большинстве случаев основной эффект влияния жидкости на движение твердого тела можно учесть, рассматривая только основной тон колебания жидкости ($n = 1$). В случае эллипсоидальных полостей и полостей, образованных софокусными эллипсоидами из бесконечного спектра собственных частот λ_n на движение волчка оказывает влияние только основная частота λ_1 ($E_n = 0$ при $n \neq 1$).

С учетом только основного тона ($n = 1$) частотное уравнение (2) исследовано в работах [1 – 3]. При учете двух тонов колебания жидкости ($n = 1, 2$) уравнение (2) записывается в виде

$$
b_0\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0, \tag{4}
$$

коэффициенты которого записываются

$$b_j = b_{j1}\tilde{\lambda}_1 + b_{j2}\tilde{\lambda}_2 + b^*_{j-2}(0,0)\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + b^*_j,\ b_{j1} = b^*_{j-1}(0,E_2),\ b_{j2} = b^*_{j-1}(E_1,0),$$
$$A^*_1 = A'_1 - E_1 - E_2,\ C^*_1 = (C_1 - E_1 - E_2)\omega_{01},\ \tilde{C}_2 = C_2\omega_{02}; \tag{5}$$
$$b_0 = b^*_0(E_1,E_2) = A^*_1 A'_2 - \mu^2,\ b^*_1(E_1,E_2) = A'_2 C^*_1 + A^*_1\tilde{C}_2,\ b^*_2(E_1,E_2) = -(A^*_1 + A'_2 + 2\mu)k + C^*_1\tilde{C}_2,$$
$$b^*_3(E_1,E_2) = -(C^*_1 + \tilde{C}_2)k,\ b^*_{-1} = b^*_4 = b^*_5 = 0\ \ (j = \overline{1,5}).$$

В случае трех тонов ($n = \overline{1,\ 3}$) уравнение (2) является полиномом 6-ой степени

$$b_0\lambda^6 + b_1\lambda^5 + b_2\lambda^4 + b_3\lambda^3 + b_4\lambda^2 + b_5\lambda + b_6 = 0, \tag{6}$$

где

$$b_j = b_{j1}\tilde{\lambda}_1 + b_{j2}\tilde{\lambda}_2 + b_{j3}\tilde{\lambda}_3 + b^*_{j-2}(0,0,E_3)\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + b^*_{j-2}(0,E_2,0)\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3 + b^*_{j-2}(E_1,0,0)\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3 +$$
$$+ b^*_{j-3}(0,0,0)\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3 + b^*_j,\ b_{j1} = b^*_{j-1}(0,E_2,E_3),\ b_{j2} = b^*_{j-1}(E_1,0,E_3),\ b_{j3} = b^*_{j-1}(E_1,E_2,0)\ \ (j = \overline{1,6}), \tag{7}$$
$$A^*_1 = A'_1 - E_1 - E_2 - E_3,\ \tilde{C}_2 = C_2\omega_{02},\ C^*_1 = (C_1 - E_1 - E_2 - E_3)\omega_{01};$$
$$b_0 = b^*_0(E_1,E_2,E_3) = A^*_1 A'_2 - \mu^2,\ \ b^*_1(E_1,E_2,E_3) = A'_2 C^*_1 + A^*_1\tilde{C}_2,\ b^*_{-1} = b^*_{-2} = b^*_4 = b^*_5 = b^*_6 =$$
$$= b_{61} = b_{62} = b_{63} = 0,\ b^*_2(E_1,E_2,E_3) = -(A^*_1 + A'_2 + 2\mu)k + C^*_1\tilde{C}_2,\ \ b^*_3(E_1,E_2,E_3) = -(C^*_1 + \tilde{C}_2)k.$$

При вырождении сферического шарнира в цилиндрический ($k = \infty$) и $n = 1,\ 2$ уравнение (3) будет кубическим

$$b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0. \tag{8}$$

Коэффициенты уравнения (8) записываются соотношением (5), в котором

$$b_0 = b^*_0(E_1,E_2) = A^*_1 + A'_2 + 2\mu,\ b^*_1(E_1,E_2) = C^*_1 + \tilde{C}_2,\ \ b^*_{-1} = b^*_2 = b^*_3 = 0\ \ (j = \overline{1,3}).$$

В случае $k = \infty$ и $n = \overline{1,\ 3}$ уравнение (3) принимает вид

$$b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0. \tag{9}$$

Здесь коэффициенты уравнения находятся из соотношения (7), в котором

$$b_0 = b^*_0(E_1,E_2,E_3) = A^*_1 + A'_2 + 2\mu,\ \ b^*_1(E_1,E_2,E_3) = C^*_1 + \tilde{C}_2,$$
$$b^*_{-1} = b^*_{-2} = b^*_2 = b^*_3 = b^*_4 = b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0\ \ (j = \overline{1,4}).$$

Условия действительности всех корней уравнений (4), (6), (8) и (9) определяют необходимые условия устойчивости равномерного вращения системы двух волчков Лагранжа, один из которых заполнен жидкостью. Условия действительности для многочленов 5-ой степени приведены в работах [2, 3, 9], а для многочленов 6-ой степени – в работах [9 – 11]. Для уравнения n-ой степени со старшим коэффициентом $a_0 > 0$ условия действительности всех корней имеют следующий вид [9]

$$f_1 = B_{22} > 0,\ \ f_2 = \begin{vmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{23} & B_{33} \end{vmatrix} > 0,\ ...,\ \ f_{n-1} = \begin{vmatrix} B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ B_{23} & B_{33} & \cdots & B_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{2n} & B_{3n} & \cdots & B_{nn} \end{vmatrix} > 0, \tag{10}$$

где

$$B_{ki} = (k-1)(n+1-i)a_{k-1}a_{i-1} - n\sum_{j=0}^{\nu=k-2}(i - \nu + 2j)a_{\nu-j}a_{i+j}\ \ (k = \overline{2,\ n};\ i = \overline{k,n}).$$

Стабилизировать неустойчивое вращение свободного волчка Лагранжа с жидкостью можно при помощи угловой скорости вращающегося твердого тела ω_{02}, его параметров C_2, m_2, c_2 и при помощи коэффициента упругости шарнира k [1 – 3].

Влияние угловой скорости вращения и осевого момента инерции твердого тела на возможность стабилизации при учете двух и трех гармоник. Так как эти величины в коэффициенты уравнения (4) и (6) входят в виде произведения, то введем следующее обозначение $\omega_0 = C_2\omega_{02}$. Покажем, что с учетом двух гармоник ($n = 1,\ 2$) стабилизация при помощи основного параметра ω_0 возможна. Для этого представим коэффициенты уравнения (4) в виде соотношений $b_1 = a_{11}\omega_0 + \tilde{b}_1$, $b_2 = a_{21}\omega_0 + \tilde{b}_2$, $b_3 = a_{31}\omega_0 + \tilde{b}_3$, $b_4 = a_{41}\omega_0 + \tilde{b}_4$, $b_5 = a_{51}\omega_0 + \tilde{b}_5$. Подставив эти соотношения в условия действительности корней для уравнения 5-ой степени (10), в которых положим $a_j = b_j$ $(j = \overline{0,5})$, получим условия устойчивости

$$\begin{cases} d_{12}\omega_0^2 + d_{11}\omega_0 + d_{10} > 0, \\ d_{24}\omega_0^4 + d_{23}\omega_0^3 + \ldots + d_{21}\omega_0 + d_{20} > 0, \\ d_{36}\omega_0^6 + d_{35}\omega_0^5 + \ldots + d_{31}\omega_0 + d_{30} > 0, \\ d_{48}\omega_0^8 + d_{47}\omega_0^7 + \ldots + d_{41}\omega_0 + d_{40} > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь

$$d_{12} = 4a_{11}^2,\ d_{24} = \tilde{d}_{21}k + \tilde{d}_{20},\ \tilde{d}_{21} = 40a_{11}^3,\ d_{36} = \tilde{d}_{33}k^3 + \tilde{d}_{32}k^2 + \tilde{d}_{31}k + \tilde{d}_{30},\ \tilde{d}_{33} = 5\tilde{d}_{21},$$

$$d_{48} = \tilde{d}_{45}k^5 + \tilde{d}_{44}k^4 + \ldots + \tilde{d}_{41}k + \tilde{d}_{40},\ \tilde{d}_{45} = 100\tilde{d}_{33}(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)^2,\ a_{11} = A_1^* > 0.$$

В обозначении d_{ij} индекс i – номер неравенства, j – степень параметра ω_0 ($i = \overline{1,4}$; $j = \overline{1,8}$).

В системе неравенств (11) коэффициент $d_{12} > 0$, а d_{24}, d_{36} и d_{48} являются многочленами относительно k с положительными коэффициентами при старших степенях ($\tilde{d}_{33}, \tilde{d}_{45}, \tilde{d}_{57} > 0$). При достаточно больших значениях k коэффициенты d_{24}, d_{36} и d_{48} будут положительными. Таким образом, все коэффициенты при старших степенях в системе неравенств (11) положительные. Из этого следует, что при достаточно больших ω_0 неравенства (11) всегда будут верными.

С целью учета трех тонов ($n = \overline{1,3}$) представим коэффициенты уравнения (6) в виде

$$b_1 = a_{11}\omega_0 + \tilde{b}_1,\ b_2 = a_{21}\omega_0 + \tilde{b}_2,\ b_3 = a_{31}\omega_0 + \tilde{b}_3,\ b_4 = a_{41}\omega_0 + \tilde{b}_4,\ b_5 = a_{51}\omega_0 + \tilde{b}_5,\ b_6 = a_{61}\omega_0 + \tilde{b}_6.$$

Из требования действительности корней уравнения 6-ой степени (10) получаем условия устойчивости в виде системы 5-ти неравенств. Первые четыре неравенства имеют вид системы (11), а из последнего следует

$$d_{510}\omega_0^{10} + d_{59}\omega_0^9 + \ldots + d_{51}\omega_0 + d_{50} > 0, \tag{12}$$

где

$$d_{12} = 5a_{11}^2,\ d_{24} = \tilde{d}_{21}k + \tilde{d}_{20},\ \tilde{d}_{21} = 60a_{11}^3,\ a_{11} = A_1^* > 0,\ d_{36} = \tilde{d}_{33}k^3 + \tilde{d}_{32}k^2 + \tilde{d}_{31}k + \tilde{d}_{30},$$

$$\tilde{d}_{33} = 432a_{11}^3,\ d_{48} = \tilde{d}_{45}k^5 + \tilde{d}_{44}k^4 + \ldots + \tilde{d}_{41}k + \tilde{d}_{40},\ \tilde{d}_{57} = 5184a_{11}^3(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3)^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2,$$

$$\tilde{d}_{45} = 1728a_{11}^3(\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_3^2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3),\ d_{510} = \tilde{d}_{57}k^7 + \tilde{d}_{56}k^6 + \ldots + \tilde{d}_{51}k + \tilde{d}_{50},$$

При больших значениях k коэффициенты d_{24}, d_{36}, d_{48} и d_{510} будут положительными. Таким образом, все коэффициенты при старших степенях в неравенствах (11) – (12) положительные. Поэтому для достаточно больших ω_0 эти неравенства всегда будут верными. Следовательно, с учетом двух и трех тонов колебания жидкости аналитически показана возможность стабилизации неустойчивого вращения волчка Лагранжа с жидкостью при помощи вращающегося твердого тела.

Влияние коэффициента упругости сферического шарнира на возможность стабилизации вращения при учете двух и трех гармоник. Представим коэффициенты уравнения (4) в виде

$$b_2 = a_{21}k + \tilde{b}_2,\ b_3 = a_{31}k + \tilde{b}_3,\ b_4 = a_{41}k + \tilde{b}_4,\ b_5 = a_{51}k.$$

Тогда из выражений (10) получим условия устойчивости относительно параметра k для двух тонов

$$\begin{cases} d_{11}k + d_{10} > 0, \\ d_{23}k^3 + d_{22}k^2 + d_{21}k + d_{20} > 0, \\ d_{35}k^5 + d_{34}k^4 + \ldots + d_{31}k + d_{30} > 0, \\ d_{47}k^7 + d_{46}k^6 + \ldots + d_{41}k + d_{40} > 0, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$d_{11} = -10b_0a_{21},\ d_{23} = -60b_0a_{21}^3,\ d_{35} = \tilde{d}_{32}\omega_0^2 + \tilde{d}_{31}\omega_0 + \tilde{d}_{30},\ \tilde{d}_{32} = -200b_0a_{21}^3,$$

$$d_{47} = \tilde{d}_{44}\omega_0^4 + \tilde{d}_{43}\omega_0^3 + \ldots + \tilde{d}_{41}\omega_0 + \tilde{d}_{40},\ \tilde{d}_{44} = -500b_0a_{21}^3(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2,$$

$$b_0 = A_1^*A_2' - \mu^2 > 0,\ a_{21} = -(A_1^* + A_2' + 2\mu) < 0.$$

В системе неравенств (13) коэффициенты $d_{11} > 0$ и $d_{23} > 0$, а d_{35} и d_{47} являются многочленами относительно ω_0 с положительными коэффициентами при старших степенях. При больших ω_0 эти коэффициенты будут положительными. В результате все коэффициенты при старших степенях в системе неравенств (13) положительные, откуда следует, что при достаточно больших k эти неравенства всегда будут выполнены.

При учете трех тонов ($n=\overline{1,3}$) представим коэффициенты уравнения (6) следующим образом: $b_2 = a_{21}k + \tilde{b}_2$, $b_3 = a_{31}k + \tilde{b}_3$, $b_4 = a_{41}k + \tilde{b}_4$, $b_5 = a_{51}k$, $b_6 = a_{61}k$. Подставим их в условия действительности корней для уравнения 6-ой степени (10) и получим условия устойчивости относительно параметра k в виде 5-ти неравенств. Первые четыре неравенства имеют вид (13), а пятое – записывается так

$$d_{59}k^9 + d_{58}k^8 + ... + d_{51}k + d_{50} > 0. \qquad (14)$$

Здесь

$$d_{11} = -12b_0 a_{21},\ d_{23} = -96b_0 a_{21}^3,\ d_{35} = \tilde{d}_{32}\omega_0^2 + \tilde{d}_{31}\omega_0 + \tilde{d}_{30},\ \tilde{d}_{32} = -432b_0 a_{21}^3,$$
$$d_{47} = \tilde{d}_{44}\omega_0^4 + \tilde{d}_{43}\omega_0^3 + ... + \tilde{d}_{41}\omega_0 + \tilde{d}_{40},\ d_{59} = \tilde{d}_{56}\omega_0^6 + \tilde{d}_{55}\omega_0^5 + ... + \tilde{d}_{51}\omega_0 + \tilde{d}_{50},$$
$$\tilde{d}_{44} = -1728b_0 a_{21}^3(\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_3^2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3),$$
$$\tilde{d}_{56} = -5184b_0 a_{21}^3(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2)^2(\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3)^2(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3)^2,\ b_0 = A_1^* A_2' - \mu^2 > 0,\ a_{21} = -(A_1^* + A_2' + 2\mu) < 0.$$

В системе неравенств (13)-(14) коэффициенты $d_{11} > 0$ и $d_{23} > 0$, а d_{35}, d_{47} и d_{59} являются многочленами относительно ω_0 с положительными коэффициентами при старших степенях. При достаточно больших значениях ω_0 эти коэффициенты будут положительными. Таким образом, все коэффициенты при старших степенях в системе неравенств (13) – (14) положительные, откуда следует, что при достаточно больших k эти неравенства всегда будут верными.

Таким образом, аналитически показано, что с учетом двух и трех тонов колебания жидкости при достаточно больших значениях ω_0 и k стабилизация волчка Лагранжа с жидкостью возможна.

Влияние цилиндрического шарнира на возможность стабилизации с учетом двух и трех тонов. В случае двух тонов условия действительности корней для уравнения (8) записываются в виде первых двух неравенств системы (11), в которых

$$d_{12} = a_{11}^2,\ d_{24} = 3a_{11}^2(a_{21}^2 - 4a_{11}a_{31}),\ a_{11} = 1,\ a_{21} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2,\ a_{31} = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2.$$

Для трех тонов условия действительности корней для уравнения (9) имеют вид первых трех неравенств системы (11), в которых

$$d_{12} = a_{11}^2,\ d_{24} = 12a_{11}^4,\ d_{36} = (3a_{21}^2 - 4a_{11}a_{31})^3 - 27(2a_{11}a_{21}a_{31} - a_{11}^2 a_{41})^2,$$
$$4a_{11} = 1,\ 6a_{21} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3,\ 4a_{31} = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3,\ a_{41} = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3.$$

Как и ранее, полученные условия устойчивости и стабилизации выполнены при достаточно больших значениях ω_0.

Для подтверждения результатов аналитических исследований представляет интерес провести количественные оценки ω_0 и k по полученным условиям устойчивости и стабилизации (11) – (14) для конкретной полости.

Численные расчеты. В качестве примера рассмотрим цилиндрическую полость, значения коэффициентов E_n и $\tilde{\lambda}_n$ для которой приведены в работе [4]. Пусть твердое тело S_1^0 представляет собой безмассовую ($m_{10} = 0$) и безинерционную оболочку ($A_{10} = C_{10} = 0$), а вращающееся твердое тело полагается в виде тонкого кругового диска с параметрами $m_2 = 1$, $r = 1$ и центром масс, совпадающим с общей точкой ($c_2 = 0$). При изменении геометрии полости (h и a) масса жидкости не меняется.

Индекс $n = (l, p)$ представляет собой всевозможное сочетание порядковых номеров продольных и поперечных гармоник l и p ($l = 0, 1, 2, ...,$ $p = 1, 2, ..$). В работе [4] отмечено, что в большинстве практически важных случаев, можно учитывать только первое значение $l = 0$, так как коэффициент $E_n = E_{lp}$ обратно пропорционален четвёртой степени l. По p сходимость более медленная, обратно пропорциональная квадрату p. Численные исследования показали, что основной эффект в первом приближении можно учесть при одном члене ряда $n = 1$ ($l = 0, p = 1$). Критерием учета количества тонов колебаний жидкости является сравнение гидродинамических моментов, определяемых коэффициентом инерционной связи E_n. При определении устойчивости добавление тех тонов, которым соответствуют $\kappa_{lp} < 1$, приводит к незначительному изменению области устойчивости. При дополнительном учете тонов $\kappa_{lp} > 1$ появляются новые ветви в зоне неустойчивости, соответствующие определенным числам l и p.

Закрашенные области неустойчивости (рис. 3 – 6) построены на основе систем неравенств (11) – (14) и представлены зависимостью от параметров ω_0 и H ($H = h/a$, где $2h$ и a − соответственно высота и радиус цилиндрической полости).

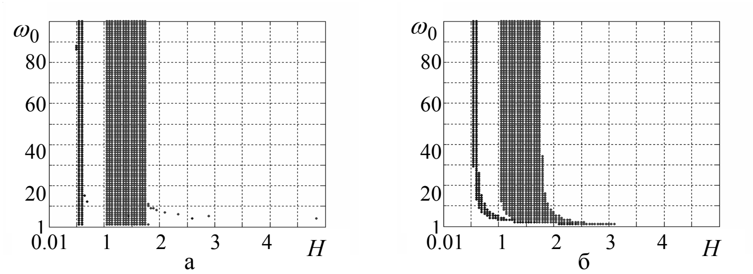

Рис. 3. Области неустойчивости с учетом двух тонов для сферического шарнира:

а) $k = 1$, $\omega_{02} = 0$, б) $k = 10^2$, $\omega_{02} = 10^2$

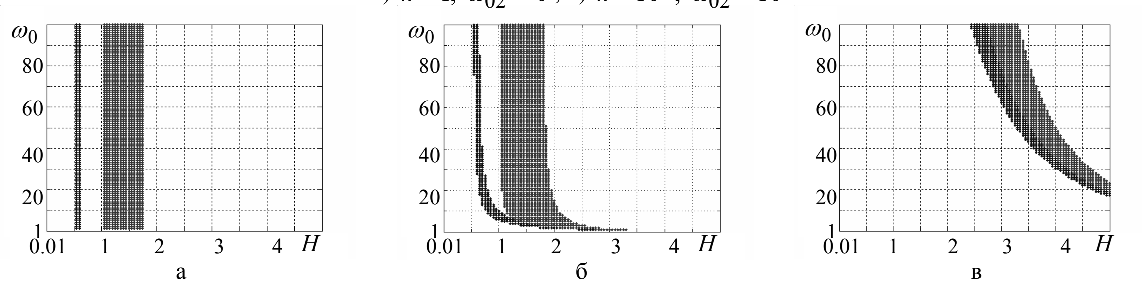

Рис. 4. Области неустойчивости с учетом двух тонов для цилиндрического шарнира:

а) $\omega_{02} = 0$, б) $\omega_{02} = 10^2$, в) $\omega_{02} = 10^4$

Из рис. 3, 4 следует, что с увеличением угловой скорости вращения и осевого момента инерции твердого тела ($\omega_{02} = 0 \div 10^4$) области неустойчивости смещаются вправо и при $\omega_{02} \geq 6 \cdot 10^4$ – полностью исчезают, что подтверждают аналитические выводы о возможности стабилизации.

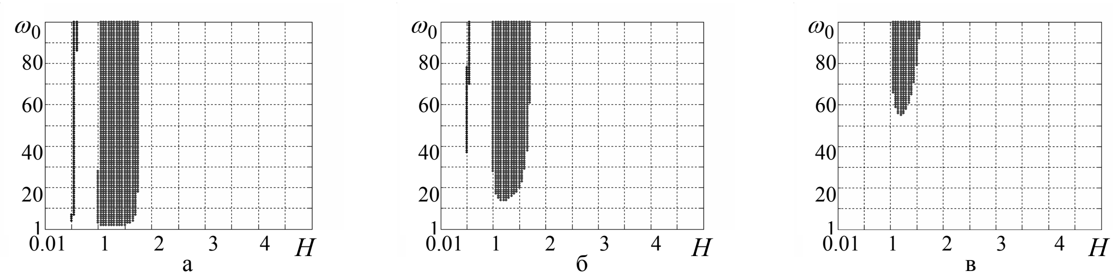

Рис. 5. Области неустойчивости с учетом двух тонов при $\omega_0\omega_{02} < 0$ для цилиндрического шарнира:

а) $\omega_{02} = 10$, б) $\omega_{02} = 10^2$, в) $\omega_{02} = 4 \cdot 10^2$

При наличии цилиндрического шарнира ($k = \infty$) и вращении волчка с жидкостью и твердого тела в разные стороны ($\omega_0\omega_{02} < 0$) области неустойчивости смещаются вертикально вверх (рис. 5), а при $\omega_{02} \geq 8 \cdot 10^2$ – исчезают.

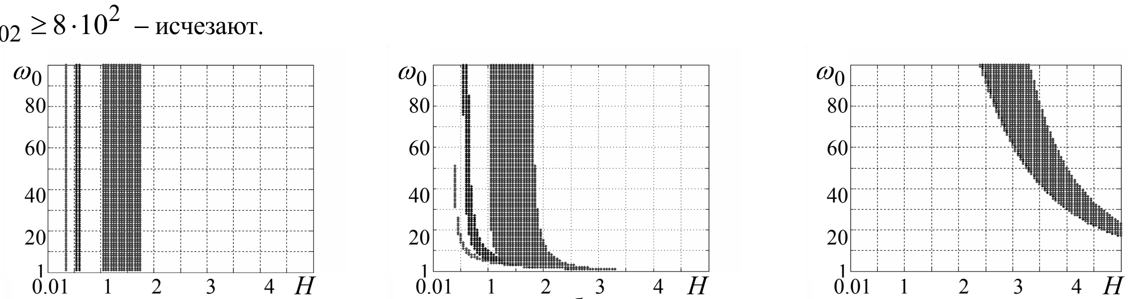

Рис. 6. Области неустойчивости с учетом трех тонов для цилиндрического шарнира

а) $\omega_{02} = 0$, б) $\omega_{02} = 10^2$, в) $\omega_{02} = 10^4$

В случае трех тонов (рис. 6) при увеличении угловой скорости вращения твердого тела ($\omega_{02} = 0 \div 10^4$) области неустойчивости смещаются вправо (рис. 6) и при $\omega_{02} \geq 6 \cdot 10^4$ – исчезают.

На основании проведенных численных исследований можно заключить, что эффект стабилизации одним вращающимся твердым телом наступает быстрее в случае вырождения сферического шарнира в цилиндрический и вращении тел S_1, S_2^0 в разные стороны ($\omega_0 \cdot \omega_{02} < 0$).

Выводы. Установлено, что эффективность стабилизации возрастает при замене сферических шарниров на цилиндрические. Показано, что стабилизация наиболее эффективна, когда волчок с жидкостью и твердое тело вращаются в противоположные стороны. Из приведенных ранее расчетов с учетом только основного тона колебания [1, 2] и проведенных в данной работе с учетом двух и трех тонов следует, что учет дополнительных тонов приводит к появлению незначительных дополнительных областей неустойчивости, которые исчезают при увеличении угловой скорости вращения твердого тела, его осевого момента и цилиндрическом соединении тел.

РЕЗЮМЕ

З урахуванням додаткових тонів коливання рідини отримані необхідні умови стійкості равномірного обертання вільної системи двох пружно зв'язаних вовчків Лагранжа, один з яких має довільну осесиметричну порожнину з ідеальною рідиною. Аналітично показана можливість стабілізації нестійкого обертання вовчка Лагранжа з рідиною за допомогою твердого тіла, що обертається. Оцінено вплив додаткових тонів коливання рідини на ефект стабілізації. Результати аналітичних досліджень підтверджені чисельними розрахунками для циліндричної порожнини.

Ключові слова: вовчок Лагранжа, ідеальна рідина, стійкість, пасивна стабілізація, циліндрична порожнина.

SUMMARY

The necessary conditions of stability of rotation on free system of two resiliently whipping of Lagrange top one of which has arbitrary axisymmetrical cavity with an ideal fluid is obtained with account additional modes of oscillation of fluid. Stabilizing possibility by rotating rigid body of unsteady rotation of whipping Lagrange top with a fluid is shown. Influence of additional modes of oscillation of fluid is estimated on the effect of stabilizing. The results of analytical researches are confirmed numeral calculations for a cylindrical cavity.

Keywords: top of Lagrange, ideal fluid, stability, passive stabilization, cylindrical cavity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кононов Ю. Н. О стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом / Ю. Н. Кононов, Т. В. Хомяк // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2003. – Вип. 2. – С. 180-185.
2. Кононов Ю. Н. Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом / Ю. Н. Кононов, Т. В. Хомяк // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 161-169.
3. Kononov Y. N. On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body / Y. N. Kononov, T. V. Khomyak // Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 2005. – Vol. 4, No 17. – P. 195-201.
4. Докучаев Л. В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость / Л. В. Докучаев, Р. В. Рвалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 2. – С. 6–14.
5. Рвалов Р. В. О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость / Р. В. Рвалов, В. М. Роговой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15-20.
6. Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 75-82.
7. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью / С. Л. Соболев // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 20-55.
8. Кононов Ю. Н. О движении системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 76-85.
9. Коваль В. И. О действительности всех корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в динамике твердого тела / В. И. Коваль // Механика твердого тела – 1999. – Вып. 28. – С. 130-145.
10. Кононов Ю. Н. Стабилизация неустойчивого движения по инерции твердого тела с жидкостью вращающимися твердыми телами / Ю. Н. Кононов, Т. В. Хомяк // Механика–2007: III Беларусский Конгресс по теор. и прикл. механике (г. Минск, 16-18 окт. 2007 г.) – Минск, 2007. – С. 332-337.
11. Хомяк Т. В. Упрощение условий действительности всех корней многочлена 6-ой и 7-ой степени / Т. В. Хомяк // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 12-13.

Поступила в редакцию 20.03.2011 г.