УДК 515.2

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ У ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ СПІВФОКУСНИХ ЕЛІПСІВ ТА ГІПЕРБОЛ

Скідан І. А., д.т.н.
Колесник Н. Л., аспірант
Донецький національний технічний університет
Тел.: (062) 338-48-85

Анотація – розраховані вирази диференціально–геометричних характеристик скалярних і векторних полів у циліндричній системі співфокусних еліпсів та гіпербол, наведені приклади конкретизації виразів і комп'ютерно-графічного зображення поверхонь рівня поданого скалярного поля

Ключові слова – триортогональність, поверхня рівня, лапласіан, ротор, дивергенція

Постановка проблеми. Вирази диференціально-геометричних характеристик скалярного і векторного полів компактні, якщо координація простору відповідає структурі поля по-перше, і, по-друге, вона триортогональна [1]. Відповідність визначається формами джерела і границь поля.

Аналіз останніх досліджень. Спеціальні координації простору з метою встановлення їх відповідності структурі полів розглядались в роботах [2, 3], в яких визначені вирази диференціально-геометричних характеристик скалярних і векторних полів у нормальних конічних і тороїдальних координатах і на їх основі запропоновані розрахунки теплових полів.

В роботі [4] спеціальна триортогональна координація простору використовується для розрахунку потенціальних полів.

Формулювання цілей. Сподіваючись на перспективу застосування для розрахунку полів, що мають реальний фізичний зміст, відповідний координації простору, в статті визначаються диференціально-геометричні характеристики скалярного і векторного полів у циліндричній системі координат співфокусних еліпсів і гіпербол.

Основна частина. Скалярне поле математично можна визначити як функцію точки, тобто, як функцію, параметрами якої є координати точки у тривимірному просторі. Якщо простір віднесений до системи координат, спеціально підібраної під структуру скалярного поля, параметрами функції, що його подає, слід призначити спеціальні координати системи віднесення простору, яка повинна бути триортогональною.

Нехай спеціальні координати *t, u, v* введені функціями:

$$x = x(t,u,v),\ y = y(t,u,v),\ z = z(t,u,v) \tag{1}$$

Умовою триортогональності системи (1) є [1]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Функція (1) для циліндричної системи співфокусних еліпсів та гіпербол має вигляд:

$$x = a\cdot ch\,u\cdot\cos v,\ \ y = a\cdot sh\,u\cdot\sin v,\ \ z = t, \tag{3}$$

де a – стала величина, що є параметром форми системи, $-\infty \le t \le \infty$, $-\infty \le u \le \infty$, $0 \le v \le 2\pi$ – криволінійні координати.

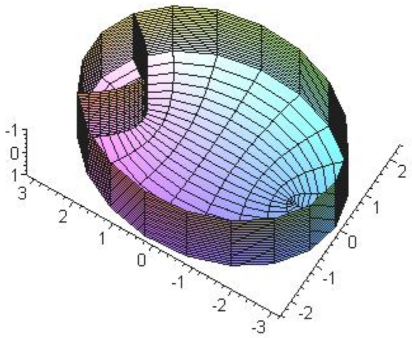
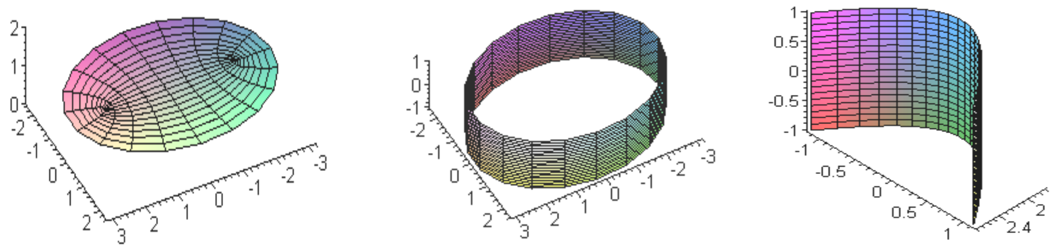


Рис. 1



а) б) в)

Рис. 2

На рис. 1 показано триортогональну систему, представлену сукупністю координатних поверхонь, на рис. 2 координатні поверхні показано окремо:

а) t=const – площина з ортогональною сіткою співфокусних еліпсів і гіпербол;

б) u=const – еліптичний циліндр з координатною сіткою еліпсів і прямих;

в) v=const – гіперболічний циліндр з ортогональною сіткою гіпербол і прямих.

Координатні лінії системи:

t-лінії – прямі, паралельні OZ;
u-лінії – гіперболи;
v-лінії – еліпси.

Частинні похідні функції (3):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t}=0, \quad && \frac{\partial x}{\partial u}=a\cdot sh\,u\cdot\cos v, \quad && \frac{\partial x}{\partial v}=-a\cdot ch\,u\cdot\sin v,\\
&\frac{\partial y}{\partial t}=0, && \frac{\partial y}{\partial u}=a\cdot ch\,u\cdot\sin v, && \frac{\partial x}{\partial v}=a\cdot sh\,u\cdot\cos v,\\
&\frac{\partial z}{\partial t}=1, && \frac{\partial z}{\partial u}=0, && \frac{\partial z}{\partial v}=0.
\end{aligned} \tag{4}$$

підставляємо до (2) і впевнюємось, що система триортогональна.

Перейдемо до визначення виразів диференціально-геометричних характеристик циліндричної системи співфокусних еліпсів і гіпербол.

Коефіцієнти Ляме:

$$\begin{aligned}
H_t&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}=1,\\
H_u&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}=a\sqrt{ch^2u-\cos^2 v},\\
H_v&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}=a\sqrt{ch^2u-\cos^2 v}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Елементарна площа на координатній поверхні (площині) t=const:

$$dS_t=dS_u\cdot dS_v=H_u\cdot H_v dudv=a^2\cdot(ch^2u-\cos^2 v)dudv\,. \tag{6}$$

Елементарна площа на координатній поверхні (еліптичний циліндр) u=const:

$$dS_u=dS_t\cdot dS_v=H_t\cdot H_v dtdv=a\cdot\sqrt{ch^2u-\cos^2 v}dtdv\,. \tag{7}$$

Елементарна площа на координатній поверхні (гіперболічний циліндр) v=const:

$$dS_v=dS_t\cdot dS_u=H_t\cdot H_u dtdu=a\cdot\sqrt{ch^2u-\cos^2 v}dtdu\,. \tag{8}$$

Диференціал об'єму:

$$dV=dS_t\cdot dS_u\cdot dS_u=H_t\cdot H_u\cdot H_v dtdudv=a^2\cdot(ch^2u-\cos^2 v)dtdudv\,. \tag{9}$$

Знайдемо вирази диференціально-геометричних характеристик скалярного поля в циліндричних координатах співфокусних еліпсів і гіпербол.

Скалярне поле подається функцією:

$$F=F(t,u,v)\,. \tag{10}$$

Градієнт скалярного поля:

$$gradF = \frac{1}{H_t}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}\cdot e_t + \frac{1}{H_u}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}\cdot e_u + \frac{1}{H_v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\cdot e_v =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial t}\cdot e_t + a\cdot\sqrt{ch^2u-\cos^2 v}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot e_u + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot e_v\right). \qquad (11)$$

Лапласіан скалярного поля:

$$\nabla^2 F = \frac{1}{H_t\cdot H_u\cdot H_v}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{H_u\cdot H_v}{H_t}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{H_t\cdot H_v}{H_u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{H_t\cdot H_u}{H_v}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{a^2\cdot(ch^2u-\cos^2 v)}\cdot\left(a^2\cdot(ch^2u-\cos^2 v)\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right). \qquad (12)$$

Одним з наочних засобів вивчення скалярного поля є отримання графічного зображення його поверхонь рівня. Побудуємо засобами комп'ютерної графіки поверхню рівня скалярного поля, поданого функцією:

$$F = h\cdot\sin u\cdot\cos(n\cdot t) - v = c \qquad (13)$$

при h = -0,25, n = 3, c = 1.

Визначимо v з (13). Отримуємо $v = h\cdot\sin u\cdot\cos(n\cdot t) - c$ та підставимо його вираз до (3). Отримаємо параметричні рівняння поверхні рівня, за якими, засобами комп'ютерної графіки, отримуємо зображення шуканої поверхні рівня (рисунок 3).

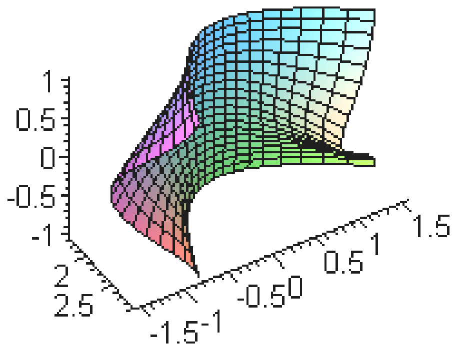


Рис. 3

Векторне поле подається вектор-функцією:

$$\boldsymbol{b} = b_t\cdot\boldsymbol{e_t}+b_u\cdot\boldsymbol{e_u}+b_v\cdot\boldsymbol{e_v}. \qquad (14)$$

де b_t, b_u, b_v – функції від криволінійних координат t, u, v.

Відомо, що з довільністю трьох функцій від трьох змінних подається конгруенція кривих. Якщо подані значення криволінійних координат t, u, v, то по-перше, відома точка простору у обраній системі координат, по-друге, відомі координати $\boldsymbol{e_t}$, $\boldsymbol{e_u}$, $\boldsymbol{e_v}$ орта, дотичного до координатних ліній цієї системи. Тобто, геометричний зміст функцій b_t, b_u, b_v – це проекції вектора $\boldsymbol{b}$ поля (14) на орти системи координації у точці t, u, v:

Наведемо вирази диференціальних характеристик векторного поля, що подається довільною вектор-функцією (14), за умови, що вектор $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\,(b_t, b_u, b_v)$:

Дивергенція векторного поля:

$$div\,\boldsymbol{b} = \frac{1}{H_t \cdot H_u \cdot H_v}\left[\frac{\partial}{\partial t}(b_t \cdot H_u \cdot H_v) + \frac{\partial}{\partial u}(b_u \cdot H_t \cdot H_v) + \frac{\partial}{\partial v}(b_v \cdot H_t \cdot H_u)\right] =$$
$$= \frac{\partial b_t}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{ch^2 u - \cos^2 v}} \cdot \left(\frac{\partial b_v}{\partial v} + \frac{\partial b_u}{\partial u} + b_v + b_u\right). \qquad (15)$$

Ротор векторного поля:

$$rot\boldsymbol{b} = \frac{1}{H_u \cdot H_v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u}(b_v \cdot H_v) - \frac{\partial}{\partial v}(b_u \cdot H_u)\right] \cdot \boldsymbol{e_t} +$$
$$+ \frac{1}{H_t \cdot H_v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial v}(b_t \cdot H_t) - \frac{\partial}{\partial t}(b_v \cdot H_v)\right] \cdot \boldsymbol{e_u} +$$
$$+ \frac{1}{H_t \cdot H_u} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}(b_u \cdot H_u) - \frac{\partial}{\partial u}(b_t \cdot H_t)\right] \cdot \boldsymbol{e_v} =$$
$$= \left(\begin{array}{l} \dfrac{1}{a \cdot \sqrt{ch^2 u - \cos^2 v}} \cdot \left(\dfrac{\partial b_v}{\partial u} - \dfrac{\partial b_u}{\partial v}\right) + \\ + \dfrac{1}{a \cdot \sqrt{\left(ch^2 u - \cos^2 v\right)^3}} \cdot \left(ch\, u \cdot sh\, u \cdot b_v - \cos v \cdot \sin v \cdot b_u\right) \end{array}\right) \cdot \boldsymbol{e_t} + \qquad (16)$$
$$+ \left(\frac{1}{a \cdot \sqrt{ch^2 u - \cos^2 v}} \cdot \frac{\partial b_t}{\partial v} - \frac{\partial b_t}{\partial v}\right) \cdot \boldsymbol{e_u} +$$
$$+ \left(\frac{\partial b_u}{\partial t} - \frac{1}{a \cdot \sqrt{ch^2 u - \cos^2 v}} \cdot \frac{\partial b_t}{\partial u}\right) \cdot \boldsymbol{e_v}$$

Лапласіан векторного поля:

$$\Delta\boldsymbol{b} = \nabla^2 \boldsymbol{b} = \frac{1}{H_t \cdot H_u \cdot H_v} \cdot \left(\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial b_t}{\partial t} \cdot \dfrac{H_u \cdot H_v}{H_t}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial b_t}{\partial u} \cdot \dfrac{H_t \cdot H_v}{H_u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial b_t}{\partial v} \cdot \dfrac{H_u \cdot H_t}{H_v}\right)\right] \cdot \boldsymbol{e_t} + \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial b_u}{\partial t} \cdot \dfrac{H_u \cdot H_v}{H_t}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial b_u}{\partial u} \cdot \dfrac{H_t \cdot H_v}{H_u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial b_u}{\partial v} \cdot \dfrac{H_u \cdot H_t}{H_v}\right)\right] \cdot \boldsymbol{e_u} + \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial b_v}{\partial t} \cdot \dfrac{H_u \cdot H_v}{H_t}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial b_v}{\partial u} \cdot \dfrac{H_t \cdot H_v}{H_u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial b_v}{\partial v} \cdot \dfrac{H_u \cdot H_t}{H_v}\right)\right] \cdot \boldsymbol{e_v} \end{array}\right) = \qquad (17)$$

$$= \frac{1}{a^2 \cdot (ch^2 u - \cos^2 v)} \cdot \left(\begin{array}{l} \left[a^2 \cdot (ch^2 u - \cos^2 v) \cdot \dfrac{\partial^2 b_t}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 b_t}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 b_t}{\partial v^2}\right] \cdot \boldsymbol{e_t} +. \\ \left[a^2 \cdot (ch^2 u - \cos^2 v) \cdot \dfrac{\partial^2 b_u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 b_u}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 b_u}{\partial v^2}\right] \cdot \boldsymbol{e_u} + \\ \left[a^2 \cdot (ch^2 u - \cos^2 v) \cdot \dfrac{\partial^2 b_v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 b_v}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 b_v}{\partial v^2}\right] \cdot \boldsymbol{e_v} \end{array}\right)$$

Висновок. Диференціально-геометричні характеристики скалярних і векторних полів у циліндричних координатах співфокусних еліпсів та гіпербол ефективно застосовувати у випадках, коли структура поля відповідає структурі системи віднесення.

Література.

1. *Андрєєва В. В.* Триортогональні системи з координатною сім'єю площин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійська державна агротехнічна академія - Вип. 4, Т. 34. – Мелітополь: ТДАТА, 2007 - с. 134 - 143.
2. *Булах Е. Г., Шуман В. Н.* Основы векторного анализа и теории поля.- Киев: Наукова думка, 1998.- 300с.
3. *Гольдман И. А.* Векторный анализ и теория поля.- М.:Физматиздат, 1962.- 132с.
4. *Брон О. Б., Острейко В. Н.* Ортогональные криволинейные координаты для расчета потенциальных полей. – Изв. вузов. Электромеханика, 1978, №8.

DESCRIPTION OF FIELDS IN CYLINDER COORDINATES OF CONFOCAL ELLIPSES AND HYPERBOLAS

I. SKIDAN, N. KOLESNIK

Summary

Differential–geometrical descriptions of the scalar and vector fields in the cylinder coordinates of confocal ellipses and hyperbolas are proposed. The computer-graphic image of level surfaces of scalar field is represented.