

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ В БІСФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Скідан І. А., д.т.н.

Колесник Н. Л., аспірант

Донецький національний технічний університет

Тел.: (062) 338-48-85

Анотація – наведено вирази диференціально – геометричних характеристик скалярного і векторного полів у бісферичних координатах, отримані їхні значення для поданого поля, наведено зображення поверхонь рівня поданого скалярного поля

Ключові слова – бісферичні координати, триортогональність, вектор-градієнт, поверхня рівня, лапласіан, дивергенція, ротор

Постановка проблеми. Вирази диференціально-геометричних характеристик скалярного і векторного поля у спеціальних координатах набувають компактного вигляду, якщо система віднесення поля триортогональна. Необхідність віднесення поля до спеціальної системи координат викликана структурою поля, а точніше, границя поля мусить збігатися з координатною поверхнею системи віднесення. В цьому випадку подання поля, визначення його характеристик значно спрощуються.

Вирази диференціально-геометричних характеристик полів відомі для класичних систем координат: прямокутної декартової, циліндричної, сферичної. Актуальною постає проблема визначення диференціально-геометричних характеристик поля у спеціальних системах віднесення.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1, 2] наведено вирази диференціально-геометричних характеристик довільних полів у спеціальних триортогональних координатах без конкретизації ні систем віднесення полів, ні функцій, що задають поле. Робота [3] містить вирази диференціально-геометричних характеристик полів у нормальних конічних і нормальних тороїдальних координатах. В роботі [4] ортогональні криволінійні координати застосовано для розрахунку потенціальних полів.

Розширення спеціальних координацій простору, особливо триортогональних, дозволить застосувати відомі методи розрахунку для полів складної структури за умов збігання поверхонь рівня і границь поля з координатними поверхнями системи віднесення.

Формулювання цілей. В статті поставлено ціль визначити диференціально-геометричні характеристики скалярних і векторних полів у бісферичних координатах та унаочнити структуру поданого скалярного поля зображенням засобами комп'ютерної графіки поверхонь рівня.

Основна частина. Умови триотроgonальності спеціальної системи координат, що вводиться функціями

$$x = x(t, u, v), \quad y = y(t, u, v), \quad z = z(t, u, v), \quad (1)$$

мають вигляд [5, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Бісферична система координат утворюється обертанням еліптичного пучка кіл навколо його спільної радикальної осі (рис. 1)

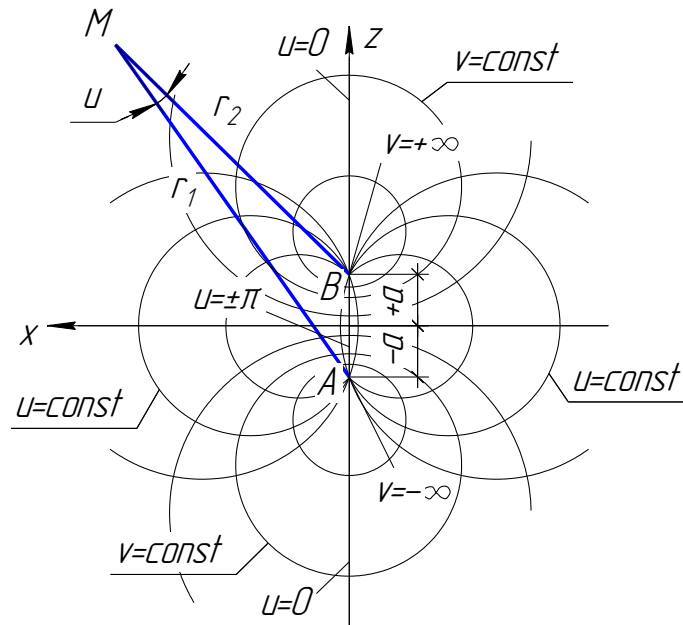


Рисунок 1- Параметри бісферичної системи координат

Бісферична система координат утворюється наступним чином: спряжені пучки кіл [8], один з яких еліптичний, інший – гіперболічний, обертаються навколо спільної радикальної осі еліптичного пучка (рис. 1). Кола нульового радіусу гіперболічного пучка, що зображаються точками А, В, розташовані на осі OZ симетрично початку координат О на відстані 1 від нього.

Геометрична сутність бісферичних координат: u – кут між полярними радіусами АМ та ВМ, де М – поточна точка; e^v - відношення полярних радіусів $\frac{AM}{BM}$, t - кут між площинами XOZ та АВМ.

Координатні поверхні: $t=\text{const}$ – півплощина $\text{tgt} = \frac{y_M}{x_M}$, $u=\text{const}$ –торові поверхні $(\sqrt{x^2 + y^2} - \text{ctgu})^2 + z^2 = \frac{1}{\sin^2 u}$, що отримуються обертанням кола з центром

$(ctgu, 0, 0)$ радіусу $\frac{1}{\sin^2 u}$ навколо АВ; $v=\text{const}$ – сфери $x^2 + y^2 + (z - ctgv)^2 = \frac{1}{sh^2 v}$ радіусу $\frac{1}{sh^2 v}$ з центром $(0, 0, ctgv)$.

Згідно з теоремою [7], геометричним місцем точок М у тривимірному просторі, відношення полярних радіусів $\frac{AM}{BM}$ яких стали, є сфера. У випадку бісферичних координат $\frac{AM}{BM} = e^v$.

Отже, бісферичні координати вводяться функціями [9, 10]:

$$x = \frac{\sin u \cdot \cos t}{chv - \cos u}, \quad y = \frac{\sin u \cdot \sin t}{chv - \cos u}, \quad z = \frac{shv}{chv - \cos u}, \quad (3)$$

при $0 \leq t < 2\pi$, $0 \leq u < \pi$, $-\infty \leq v < +\infty$.

Функції залежності бісферичних координат від прямокутних декартових знаходимо у [11] при $a = 1$, де вони мають назву біполярними:

$$t = \arctg \frac{y}{x}, \quad u = \frac{i}{2} \cdot \ln \frac{(\sqrt{x^2 + y^2 - i})^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + i})^2 + z^2}, \quad v = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x^2 + y^2 (z+1)^2}{x^2 + y^2 (z-1)^2}. \quad (4)$$

Частинні похідні функції (3), що входять до (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -\frac{\sin u \cdot \sin t}{chv - \cos u}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\sin u \cdot \cos t}{chv - \cos u}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\cos u \cdot \cos t \cdot (chv - \cos u) - \sin^2 u \cdot \cos t}{(chv - \cos u)^2} = \frac{\cos t \cdot (\cos u \cdot chv - 1)}{(chv - \cos u)^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\cos u \cdot \sin t \cdot (chv - \cos u) - \sin^2 u \cdot \sin t}{(chv - \cos u)^2} = \frac{\sin t \cdot (\cos u \cdot chv - 1)}{(chv - \cos u)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\sin u \cdot shv}{(chv - \cos u)^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\sin u \cdot \cos t \cdot shv}{(chv - \cos u)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\sin u \cdot \sin t \cdot shv}{(chv - \cos u)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1 - chv \cdot \cos u}{(chv - \cos u)^2}. \end{aligned}$$

Підстановка частинних похідних до (2) свідчить про те, що система бісферичних координат триортогональна, бо умови (2) виконуються.

Координатні поверхні системи бісферичних координат отримуємо за параметричними рівняннями (3): $t=\text{const}$ – півплощина (рис. 2,а), $v=\text{const}$ – сфера (рис. 2,б), $u=\text{const}$ – тор (рис. 2,в).

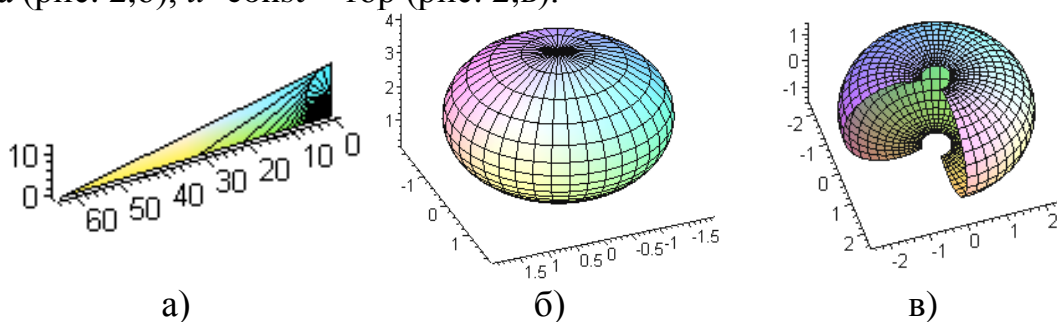


Рисунок 2 – Координатні поверхні

Координатні лінії:

- t -лінія – коло у площині, перпендикулярній OZ,
- v -лінія – коло у півплощині пучка з віссю OZ з центром на осі Z,
- u -лінія – коло у півплощині пучка з віссю Z з центром на площині XOY.

(3): Знайдемо вирази коефіцієнтів Ляме для бісферичної системи координат

$$\begin{aligned} H_t &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} = \frac{\sin u}{chv - \cos u}, \\ H_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = \frac{1}{chv - \cos u}, \\ H_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = \frac{1}{chv - \cos u}. \end{aligned} \quad (5)$$

Елементарна площа на координатній поверхні (площині) $t=\text{const}$:

$$dS_t = dS_u \cdot dS_v = H_u \cdot H_v dudv = \frac{dudv}{(chv - \cos u)^2}. \quad (6)$$

Елементарна площа на координатній поверхні (торі) $u=\text{const}$:

$$dS_u = dS_t \cdot dS_v = H_t \cdot H_v dt dv = \frac{dudv \cdot \sin u}{(chv - \cos u)^2}. \quad (7)$$

Елементарна площа на координатній поверхні (сфері) $v=\text{const}$:

$$dS_v = dS_t \cdot dS_u = H_t \cdot H_u dt du = \frac{dt du \cdot \sin u}{(chv - \cos u)^2}. \quad (8)$$

Диференціал об'єму

$$dV = dS_t \cdot dS_u \cdot dS_v = H_t \cdot H_u \cdot H_v dt dudv = \frac{dt dudv \cdot \sin u}{(chv - \cos u)^3}. \quad (9)$$

Скалярне поле подається функцією:

$$F = F(t, u, v). \quad (10)$$

Градiєнт скалярного поля:

$$\begin{aligned} \text{grad} F &= \frac{1}{H_t} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \cdot e_t + \frac{1}{H_u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \cdot e_u + \frac{1}{H_v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \cdot e_v = \\ &= \frac{1}{chv - \cos u} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \sin u \cdot e_t + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot e_u + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot e_v \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Лапласiан скалярного поля:

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= \frac{1}{H_t \cdot H_u \cdot H_v} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{H_u \cdot H_v}{H_t} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{H_t \cdot H_v}{H_u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{H_t \cdot H_u}{H_v} \right) \right] = \\ &= (chv - \cos u)^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) + \\ &+ (chv - \cos u) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{chv \cdot \cos u - 1}{\sin u} - \frac{\partial F}{\partial v} \cdot shv \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Векторне поле подається вектор функцією:

$$\mathbf{a} = a_t \cdot \mathbf{e}_t + a_u \cdot \mathbf{e}_u + a_v \cdot \mathbf{e}_v. \quad (13)$$

Дивергенція векторного поля:

$$\text{div } \bar{a} = \frac{1}{H_t \cdot H_u \cdot H_v} \left[\frac{\partial}{\partial t} (a_t \cdot H_u \cdot H_v) + \frac{\partial}{\partial u} (a_u \cdot H_t \cdot H_v) + \frac{\partial}{\partial v} (a_v \cdot H_t \cdot H_u) \right] = \quad (14)$$

$$= (chv - \cos u) \cdot \left(\frac{\partial a_t}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sin u} + \frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{\partial a_v}{\partial v} \right) + \\ + \frac{a_u \cdot (chv \cdot \cos u - \sin^2 u - 1)}{\sin u} - 2a_v \cdot shv$$

Ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \mathit{rota} &= \frac{1}{H_u \cdot H_v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} (a_v \cdot H_v) - \frac{\partial}{\partial v} (a_u \cdot H_u) \right] \cdot \mathbf{e}_t + \\ &+ \frac{1}{H_u \cdot H_v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} (a_v \cdot H_v) - \frac{\partial}{\partial v} (a_u \cdot H_u) \right] \cdot \mathbf{e}_u + \\ &+ \frac{1}{H_t \cdot H_v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial v} (a_t \cdot H_t) - \frac{\partial}{\partial t} (a_v \cdot H_v) \right] \cdot \mathbf{e}_v = \\ &= \left[(chv - \cos u) \cdot \left(\frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{\partial a_u}{\partial v} \right) - a_v \cdot \sin u + a_u \cdot shv \right] \cdot \mathbf{e}_t + \\ &+ \left[(chv - \cos u) \cdot \left(\frac{\partial a_t}{\partial v} - \frac{\partial a_v}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sin u} \right) - shv \cdot a_t \right] \cdot \mathbf{e}_u + \\ &+ \left[(chv - \cos u) \cdot \left(\frac{\partial a_v}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sin u} - \frac{\partial a_t}{\partial u} \right) - a_t \cdot \frac{chv \cdot \cos u - 1}{\sin u} \right] \cdot \mathbf{e}_v. \end{aligned} \quad (15)$$

Лапласіан векторного поля:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{a} &= \frac{1}{H_t \cdot H_u \cdot H_v} \cdot \left(\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a_t}{\partial t} \cdot \frac{H_u \cdot H_v}{H_t} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial a_t}{\partial u} \cdot \frac{H_t \cdot H_v}{H_u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial a_t}{\partial v} \cdot \frac{H_u \cdot H_t}{H_v} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_t + \\ &\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a_u}{\partial t} \cdot \frac{H_u \cdot H_v}{H_t} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial a_u}{\partial u} \cdot \frac{H_t \cdot H_v}{H_u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial a_u}{\partial v} \cdot \frac{H_u \cdot H_t}{H_v} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_u + \\ &\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a_v}{\partial t} \cdot \frac{H_u \cdot H_v}{H_t} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial a_v}{\partial u} \cdot \frac{H_t \cdot H_v}{H_u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial a_v}{\partial v} \cdot \frac{H_u \cdot H_t}{H_v} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_v \end{aligned} \right) = \quad (16) \\ &= \left[(chv - \cos u)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 u} \cdot \frac{\partial^2 a_t}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 a_t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 a_t}{\partial v^2} \right) + (chv - \cos u) \cdot \left(\frac{chv \cdot \cos u - 1}{\sin u} \cdot \frac{\partial a_t}{\partial u} - shv \cdot \frac{\partial a_t}{\partial v} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_t + \\ &+ \left[(chv - \cos u)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 u} \cdot \frac{\partial^2 a_u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 a_u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 a_u}{\partial v^2} \right) + (chv - \cos u) \cdot \left(\frac{chv \cdot \cos u - 1}{\sin u} \cdot \frac{\partial a_u}{\partial u} - shv \cdot \frac{\partial a_u}{\partial v} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_u + \\ &+ \left[(chv - \cos u)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 u} \cdot \frac{\partial^2 a_v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 a_v}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 a_v}{\partial v^2} \right) + (chv - \cos u) \cdot \left(\frac{chv \cdot \cos u - 1}{\sin u} \cdot \frac{\partial a_v}{\partial u} - shv \cdot \frac{\partial a_v}{\partial v} \right) \right] \cdot \mathbf{e}_v. \end{aligned}$$

Одним з наочних засобів вивчення скалярного поля є отримання графічного зображення його поверхонь рівня.

Побудуємо засобами комп'ютерної графіки поверхню рівня скалярного поля, поданого функцією:

$$F = h \cdot \sin u \cdot \cos(n \cdot t) - v = C \quad (17)$$

при $h = -0,25$, $n = 3$, $c = 1$.

Визначимо v з (16). Отримуємо $v = h \cdot \sin u \cdot \cos(n \cdot t) - C$ та підставимо його вираз до (3). Отримаємо параметричні рівняння поверхні рівня, за якими, засобами комп'ютерної графіки, отримуємо зображення шуканої поверхні рівня (рис. 3).

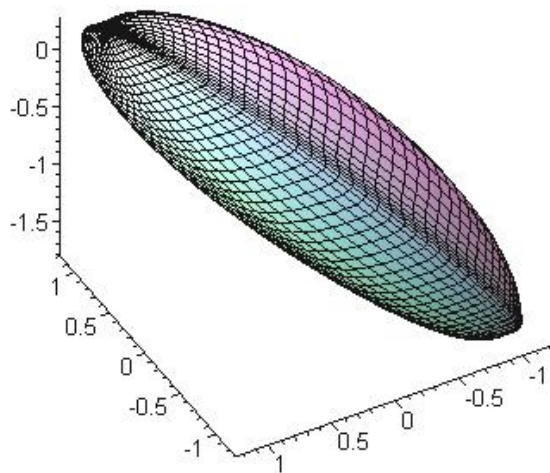


Рисунок 3 – Поверхня рівня

Висновок. Бісферичну ортогональну систему координат зручно застосовувати при вивченні скалярних полів, граничні умови яких подаються на сферах, центри яких належать прямій, чи на торах, отриманих обертанням кола навколо хорди.

Диференціально-геометричні характеристики скалярних і векторних полів у бісферичних координатах отримані з довільністю подання відповідного поля.

Література.

1. Булах Е. Г., Шуман В. Н. Основы векторного анализа и теории поля.- Киев: Наукова думка, 1998.- 300с.
2. Гольдман И. А. Векторный анализ и теория поля.- М.:Физматиздат, 1962.- 132с.
3. Неснов Д. В. Геометричне моделювання полів у нормальних конічних та нормальних тороїдальних координатах Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 – Донецьк, 2004 – 200с.
4. Брон О. Б., Острейко В. Н. Ортогональные криволинейные координаты для расчета потенциальных полей. – Изв. вузов. Электромеханика, 1978, №8.
5. Lámé G. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris, 1859.
6. Андреева В. В. Три ортогональні системи з координатною сім'єю площин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійська державна агротехнічна академія - Вип. 4, Т. 34. – Мелітополь: ТДАТА, 2007 - с. 134 - 143.
7. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч. 1. Планиметрия. МА.:1938 – 399с.
8. Геронимус Я. Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов. М.: Госиздат физ-мат лит-ры, 1962, 399с.
9. Spiegel, Vurray R. "Mathematical Handbook of Formulas and Tables", New York: McGraw Hill Book Company, 1968, 126 – 130
10. Moon, P. and D. E. Spencer "Field Theory Handbook, 2nd Ed" Berlin: Springer - Verlag, 1971
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973 - 831с.

DIFFERENTIAL - GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF FIELD IN BISPHERICAL COORDINATES

I. SKIDAN, N. KOLESNIK

Summary

The expressions of gradient and Laplacian of a scalar field and divergence, curl, Laplacian of a vector field in bispherical coordinates are deduced. A level surface of scalar field is constructed by using computer graphics.