ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕСТОВОГО ДИАГНОСТИРОВАНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ СБОЕВ

Андрюхин А.И.,
Кафедра ПМиИ, ДонГТУ
andr@r5.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Andruckin A.I. Optimization of test diagnostics of nonstable failures. *On the base of mathematical theory of games and theory of reliability the new approach is proposed to optimization of test diagnostics of failures in real time. Algorithms and conditions of the model construction are considered. Criteria of optimization and examples of calculation are described.*

Введение

В работе [1] подчеркивается, что в настоящее время в задачах автоматического управления техническими системами требуются усовершенствованные методы контроля и диагностики неисправностей, которые позволяют решить задачу их раннего обнаружения. Цель раннего обнаружения и диагностики состоит в выигрыше необходимого запаса времени для перевода процесса в другой безопасный режим работы, технического обслуживания, ремонта. Этой цели можно достичь путем сбора детальной информации, оптимальной частоты опроса датчиков в реальном масштабе времени и оценки текущих зависимостей между измеряемыми величинами, используя математические зависимости причинно-следственных связей между ними.

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с количественными характеристиками организации тестового контроля. Предлагается алгоритм оптимизации интенсивности тестового диагностирования при непрерывном функционировании исследуемой системы. Основой его является известная модель игры с нулевой суммой двух лиц, использующих смешанные стратегии [2,3].

1. Постановка задачи

Предположим, что математической моделью нестабильного поведения непрерывного функционирования системы является процесс, в функционировании которого наличествуют **n** независимых сбоев, каждый из которых характеризуется стационарной вероятностью $\mathbf{y_i(t)}$ своего появления на интервале длины **t**. Существенно для дальнейших рассуждений, что, если мы имеем для каждого **j**-го сбоя, $\mathbf{j=\{1,2,..n\}}$ экспоненциальное распределение работы системы без сбоя с интенсивностью λ_j, можно определить такую длину интервала **T** , что $\mathbf{\Sigma y_j (T)=1}$. Это предположение необходимо для того, чтобы использовать известные результаты из теории игр для решения поставленной задачи. Мы применяем такое известное уникальное свойство экспоненциального распределения, как отсутствие последействия, т.е. вид распределения не меняется после возникновения сбоя [2]. Так как в стационарном случае сбойные ситуации являются редкими событиями, считаем, что они удовлетворяют распределению Пуассона. Напомним, что, согласно распределения Пуассона, которое наиболее широко применяется для описания редких событий, среднее число отказов за время **t** равно λt, а вероятность появления **n** отказов за время **t** выражается зависимостью $f(n)=\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n/n!$. Вероятность бесперебойной работы за интервал времени от **0** до **t** определяем, считая $n=0$, т.е. $f(0)=\exp(-\lambda t)$. Эта вероятность называется функцией надежности и в предполагаемом нами случае мы имеем функцию, изменяющуюся по экспоненциальному закону надежности. Под надежностью устройства понимается вероятность того, что устройство выполняет свои функции в соответствии с предьявляемыми требованиями в течение заданного интервала времени [2]. Функция интенсивности отказов $r(t)$ определяется выражением $r(t)=F'(t)/F(t)$, где $F(t)$-функция распределения безотказного времени работы. Выражение $r(t)dt$ описывает вероятность того, что устройство с наработкой **t** откажет в интервале времени $(t, t+dt)$. При некоторых общих предположениях распределение времени безотказной работы системы при росте числа ее элементов и увеличении времени функционирования приближается к экспоненциальному [2]. Рассматривая стационарный процесс функционирования системы при экспоненциальном распределении безотказной работы, можем использовать тот факт, что для него вероятность появления отказов на определенном временном интервале зависит лишь от его длины. Наряду со свойством отсутствия последействия для экспоненциального распределения мы можем в каждый момент времени, не зная конкретного значения **T**, использовать соотношение $\Sigma y_j(T)=1$.

Считаем, что информация, которая описывает эффективность **i**-ой тестовой процедуры при обнаружении **j**-ого сбоя, может быть представлена платежной матрицей $A=\{a_{ij}\}$, $i=\{1,2,..m\}$, $j=\{1,2,..n\}$. В простейшем случае $a_{ij}=1$, если **i**-ая тестовая процедура обнаруживает **j**-ый сбой. В более общем случае a_{ij} определяет эффективность или коэффициент стоимостных затрат (в частности временных) **i**-ой тестовой процедуры при обнаружении **j**-ого сбоя.

При известных стоимостных оценках **i**-ой тестовой процедуры при обнаружении **j**-ого сбоя возможны следующие варианты информации о вероятностях y_j:

I Все y_j, $j=\{1,2,..n\}$ неизвестны;

II Все y_j, $j=\{1,2,..n\}$ известны;

III Известны y_j, $j=1,k$, $k<n$.

Считая, что все вероятности y_j стационарны на рассматриваемом временном промежутке **T**, обозначим через x_i, $i=\{1,2,..m\}$ частоты использования **i**-ой тестовой процедуры. В дальнейшем считаем, что индексы **i**(**j**) изменяются от **1** до **m**(**n**) соответственно. Принимаем, что $\Sigma x_i=1$ и $\Sigma y_j=1$. Учитывая обозначения, задача состоит в определении частот x_i $i=\{1,2,..m\}$ использования **i**-ой тестовой процедуры при следующих критериях:

а) максимизации среднего количества обнаруживаемых сбоев

$$\Sigma\Sigma x_i y_j \Rightarrow \max;$$

б) максимизации эффективности обнаружения сбоев, т.е.

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i y_j \Rightarrow \max.$$

При определении наилучших вариантов частот x_i в условиях незнания всех y_j возможно использование целого ряда формальных критериев для определенных соответствующих стратегий поведения. Наиболее известен критерий максимального пессимизма - критерий Вальда. Он определяет выбор стратегии наибольшего эффекта в наихудших условиях, т.е.наилучшего поведения противника

$$Cr=\max_{i} \min_{j} a_{ij}.$$

Противоположным ему является критерий максимального оптимизма

$$Cr=\max_{i} \max_{j} a_{ij}.$$

Понятным и интуитивно обоснованным является критерий максимального среднего выигрыша

$$Cr= \max_{i} (1/n \sum_{j} a_{ij}).$$

Критерий Сэвиджа определяет стратегию минимального риска в самых неблагоприятных условиях

$$Cr=\max_{i} \min_{j} a_{ij} (\max_{j} a_{ij} - a_{ij}).$$

2. Алгоритм решения

Задача I. Заметим, что мы можем на основании соотношения $\Sigma y_j =1$ использовать известное определение оптимальных частот x_i из принципиальной схемы игры с двумя лицами при предположении о наилучшей стратегии со стороны противника [3]. Обозначив через Q выигрыш, который мы должны получить при любом распределении y_j, можем сформулировать задачу линейного программирования

$$Q=H \Rightarrow \max$$

с ограничениями $\Sigma a_{ij}x_i \geq H$ для $j=\{1,2,..n\}$, $x_i \geq 0$ для $i=\{1,2,..m\}$, $\Sigma x_i =1$.

Разделим все ограничения нашей задачи на H и положим $z_i =x_i / H$. Таким образом, в теоретическом плане наша задача сведется к задаче линейного программирования с целевой функцией

$$Q=\Sigma z_i \Rightarrow \min$$

с ограничениями $\Sigma a_{ij}z_i \geq 1$ для $j=\{1,2,..n\}$, $z_i \geq 0$ для $i=\{1,2,..m\}$, где $z_i =x_i / H$. Здесь и далее H является ценой игры с платежной матрицей A и $Q=1/H$.

Аналогично для определения оптимальных частот y_j $j=\{1,2,..n\}$ имеем задачу

$$Q=\Sigma u_j \Rightarrow \max$$

с ограничениями $\Sigma a_{ij}u_j \leq 1$ для $i=\{1,2,..m\}$, $u_j \geq 0$ для $j=\{1,2,..n\}$, где $u_j =y_j /H$ и $Q=1/H$.

На практике обычно имеем ограничение, что частоты $x_i \geq \beta_i > 0$, $i=\{1,2,..m\}$. Это условие при вводе новых переменных $z_i =x_i / H$ может быть заменено условием $z_i - \beta_i \Sigma z_i \geq 0$. Здесь мы использовали соотношение $\Sigma z_i =1/H$. Поэтому к условию задачи о минимизации целевой функции Σz_i добавляются неравенства $z_i - \beta_i \Sigma z_i \geq 0$ для $i=\{1,2,..m\}$. Аналогично это возможно выполнить и для задачи определения оптимальных частот y_j, $i=\{1,2,..n\}$.

Задача II. В случае известных y_j, $j=\{1,2,..n\}$, т.е. $y_j=c_j$ для $j=\{1,2,..n\}$, определение оптимальных частот x_i, $i=\{1,2,..m\}$ сводится к задаче линейного программирования с целевой функцией $Q=\Sigma \Sigma c_j x_i \Rightarrow \max$ и с ограничениями $\Sigma a_{ij}x_i \geq 1$ для $j=\{1,2,..n\}$, $x_i \geq 0$ для $i=\{1,2,..m\}$.

Задача **III.** Для этого случая определения оптимальных частот y_j, $i=\{1,2,..n\}$ имеем задачу $F=\Sigma u_i \Rightarrow max$ и ограничениях $\Sigma a_{ij}u_i \geq 1$ для $j=\{1,2,..m\}$, $u_i \geq 0$ для $i=\{k+1,.n\}$, где $u_i = y_i / H$ и $F=1/H$.
Далее, имея вычисленные y_j, $j=\{1,2,..n\}$, т.е. $y_j=c_j$ для $j=\{1,2,..n\}$, решаем задачу **II**.

3. Примеры расчета

Рассмотрим расчет оптимальных частот для задач **I, II, III** для функции $Q=\Sigma\Sigma x_i y_j \Rightarrow max$, т.е. максимизации математического ожидания числа обнаруженных сбоев для матрицы **A**

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Определение оптимальных частот x_i, $\{i=1,2,..m\}$ при неизвестной информации о y_j, $j=\{1,2,..n\}$ и при использования критерия максимального пессимизма (критерия Вальда) сводится к следующей задаче линейного программирования

$$Q=z_1+z_2+z_3+z_4 \Rightarrow min$$

при ограничениях $z_1+z_4 \geq 1$, $z_2+z_3+z_4 \geq 1$, $z_3+z_4 \geq 1$, $z_{1+}z_3+z_4 \geq 1$.
Имеем $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=0$, $z_4=1$ и $Q=2$. Так как $z_i = x_i / H$ и $Q=1/H$, то решением является $x_1=0$, $x_2=0.5$, $x_3=0$, $x_4=0.5$, и всегда обеспечивается выигрыш **Q** не меньше **0.5**.

Если практические требования для частот проверки описываются неравенствами $x_1 \geq 0.1$, $x_2 \geq 0.1$, $x_3 \geq 0.1$, $x_4 \leq 0.3$, имеем следующую задачу

$$Q=z_1+z_2+z_3+z_4 \Rightarrow min$$

при следующих ограничениях

$z_1+z_4 \geq 1$, $z_2+z_3+z_4 \geq 1$, $z_3+z_4 \geq 1$, $z_{1+}z_3+z_4 \geq 1$,
$z_1 - 0.1(z1+z_2+z_3+z_4+z_5) \geq 0$,
$z_2 - 0.1(z1+z_2+z_3+z_4+z_5) \geq 0$,
$z_3 - 0.1(z1+z_2+z_3+z_4+z_5) \geq 0$,
$0.3(z1+z_2+z_3+z_4) - z_4 \geq 0$.

В итоге получаем $x_1=0.1$, $x_2=0.5$, $x_3=0.1$, $x_4=0.3$, и всегда обеспечивается выигрыш **Q** не меньше **0.4**.

Задача **II** является задачей линейного программирования в классической постановке и пример ее расчета представлен ниже на втором шаге решения задачи **III**.

Рассмотрим пример расчета для случаев задачи **III**.
Известны следующие ограничения для частот проверки $x_1 \geq 0.05$, $x_2 \geq 0.05$, $x_3 \geq 0.05$, $x_4 \geq 0.05$, $x_3 \leq 0.65$. Из наблюдений можем оценить $y_2 \geq 0.1$, $y_4 \geq 0.1$, $y_5 \geq 0.3$.
Решаем соответствующую задачу линейного программирования

$$F=u_1+u_2+u_3+u_4+u_5 \Rightarrow max$$

при ограничениях

$u_1+u_5 \leq 1$, $u_2+u_3 \leq 1$, $u_2+u_3+u_4+u_5 \leq 1$, $u_1+u_2+u_4+u_5 \leq 1$,
$u_2 - 0.1(u1+u_2+u_3+u_4+u_5) \geq 0$,

$u_4 - 0.1(u1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \geq 0$,
$u_5 - 0.3(u1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \geq 0$.
Решение этой задачи $y_1 = 0.25$, $y_2 = 0.1$, $y_3 = 0.25$, $y_1 = 0.1$, $y_5 = 0.3$ и $F=0.75$.

Используя найденные решения, определяем коэффициенты в целевой функции $Q=\Sigma\Sigma x_i y_j$ согласно матрице **A.** Следовательно, на втором этапе решаем задачу минимизации

$$Q=0.55x_1+0.35x_2+0.75x_3+0.75x_4 \Rightarrow \max$$

при ограничениях $x_1 \geq 0.05$, $x_2 \geq 0.05$, $x_3 \geq 0.05$, $x_4 \geq 0.05$, $x_1 \leq 0.65$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Ее решением является $x_1 = 0.05$, $x_2 = 0.05$, $x_3 = 0.65$, $x_4 = 0.25$ и $Q=0.72$.

Размерность матрицы может быть достаточно большой для использования имеющихся пакетов, реализующих модификации симплекс-метода, которые решают задачи нашего вида. В этих условиях возможно использование имитационного алгоритма Брауна, который позволяет определять искомые частоты [3].

Заключение

В настоящей работе решение оптимизационной задачи с нелинейной целевой фунцией (каковой является задача определения оптимальной интенсивности тестового контроля) сведено к решению задач линейного программирования. Этим резко уменьшаются затраты при решении поставленной проблемы. Основными условиями выступают требования стационарности и экспоненциального распределения вероятности безотказной работы. При этом используется уникальное свойство экспоненциального распределения, как отсутствие последействия.

Задача контроля стационарности распределения вероятности появления сбоя рассматривается в [4].

Литература

1. Изерман Р.Перспективные методы контроля, обнаружения и диагностики неисправностей и их применение//Приборы и системы управления, 1998, № 4, с.56-71.
2. Барлоу Р., Прошан Ф.Математическая теория надежности.М.: Советское радио, 1969, 488 с.
3. Карлин С.Математические методы в теории игр, программировании и экономике.М.:Мир,1964, 838 с.
4. Кожаев Е.А.Оптимизация контроля и диагностики БИС с помощью тестовых структур//Вопросы технической диагностики.Ростов н/Д,Ростов,инж.-строит.ин-т,1983, с.55-59.

Поступила в редакційну колегію 20.04.2000 р.