

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕТИ КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Лапко В.В.

Каф. ЭВМ ДонГТУ

Abstract

Lapko V.V. Development of mathematical model of a network as object of the control. In the article the method of approximating of object with distributed parameters by ordinary differential equations is offered. Approximation of the solutions is obtained in a simulation system SIMULINK.

Рассматривается регулируемый сетевой объект – шахтная вентиляционная сеть. Ветви сети характеризуются достаточно большой пространственной протяженностью, поэтому в принципе переходные процессы в каждой точке воздушного потока имеют индивидуальный характер и описываются уравнениями в частных производных. Однако при определенных условиях распределенность переходных процессов по координате можно не учитывать и для описания аэродинамических процессов использовать более простые модели – обыкновенные дифференциальные уравнения. Отметим при этом одно существенное в данном случае обстоятельство, присущее аэродинамическим сетевым объектам: относительно большие потери напора в сети и незначительные скорости изменения возмущений. В силу этого рекомендации по реализации упрощенных моделей, используемые в гидравлических и электрических сетях, здесь не вполне приемлемы и не обеспечивают оптимальных решений.

Для оценки возможности упрощения математического описания аэродинамических процессов сети рассмотрим динамические свойства локальной ветви с постоянной депрессией и регулированием ее расхода шибером в конце ветви.

В неограниченном частотном диапазоне аэродинамические процессы ветви произвольной длины в общем случае, как известно, описываются нелинейными телеграфными уравнениями/1/:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \bar{L} \frac{\partial G}{\partial t} + \bar{\gamma} G^2 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial G}{\partial x} = \bar{C} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2)$$

Здесь H, G – распределение давления и расхода вдоль оси локальной ветви; \bar{L} – удельная акустическая масса; $\bar{C} = F/\rho a^2$ – удельная акустическая гибкость; $\rho, F, \bar{\gamma}$ – плотность, сечение, удельное аэродинамическое сопротивление ветви; a – скорость звука в воздухе; t, x – соответственно время процесса и расстояние от конца ветви (регулируемого сечения).

В нормальных режимах проветривания отклонения расходов сравнительно небольшие и изменения аэродинамического сопротивления являются незначительными. В силу этого оценку качества переходных процессов можно проводить по линеаризованным телеграфным уравнениям в отклонениях от номинального режима (H_0, G_0):

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \bar{L} \frac{\partial Q}{\partial t} + \bar{r} Q \quad (3)$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = \bar{C} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4)$$

Здесь $Q(x, t) = G(x, t) - G_0$; $P(x, t) = H(x, t) - H_0$; $H_0(x) = H_{v0} - RG^2(1-x)$ - распределение давления вдоль ветви в стационарном режиме при номинальном расходе G_0 ; l - длина ветви; H_{v0} - давление в конце ветви на шибере при номинальном расходе в регулируемом сечении G_{v0} ; $\bar{r} = 2 \tilde{r} G_0$ - удельное дифференциальное сопротивление ветви в окрестности номинального режима; $R = \tilde{r} l$ - полное сопротивление ветви.

При синтезе и анализе систем управления регулируемой сети практический интерес представляют переходные процессы в месте установки шибера. Поэтому уравнения динамики ветви (3), (4) решим относительно давления и расхода регулирующего вентиля:

$$A_V(s) = -(\gamma/s) \operatorname{th}(\gamma\tau/2) \quad (5)$$

Здесь $A_V(s) = W_V(s) / \bar{\rho}$; $W_V(s) = P_V(s) / Q_V(s)$; $\tau = 2l/a$ - удвоенное время пробега волны вдоль ветви; $\bar{\rho} = \rho a / F$; $\gamma^2 = s(s+\delta)$; $\delta = \bar{r} F / \rho$; s - оператор Лапласа.

Передаточная функция (5) описывает динамику локальной ветви произвольной длины для всех частот вплоть до $\omega = \infty$. В реальной шахтной сети 90% всех регулируемых ветвей имеют длину не более 600 м, а максимальная длина не превышает 1200 м. Полоса существенных частот аэродинамических возмущений также ограничена на уровне $\omega \leq 0.3 \text{ с}^{-1}$. В этих условиях при практических расчетах вполне допустимо ограничиться приближенными функциями выражения (5).

Для получения упрощенной модели выполним аппроксимацию трансцендентной передаточной функции (5) дробно-рациональным выражением путем разложения экспоненциальной функции $\exp(-\gamma s)$ в (5) по степеням ее аргумента в ряд Паде первого и второго порядка.

При использовании формулы Паде первого порядка приближенная модель передаточной функции (5) имеет наиболее простой вид:

$$A_I(s) = -((s+\delta)\tau)/2 \quad (6)$$

Здесь A_I - приближение первого порядка передаточной функции $A_V(s)$.

Аппроксимируя функцию $\exp(-\gamma\tau)$ в (5) формулой Паде второго порядка, для передаточной функции (5) локальной ветви получим выражение

$$A_{II}(s) = (s\tau/2 + \delta\tau/2) / ((1+s(s+\delta))\tau^2/12) \quad (7)$$

Здесь A_{II} - приближение второго порядка передаточной функции $A_V(s)$.

Для выяснения качественных основных показателей упрощенных передаточных функций (6) и (7) определим амплитудные характеристики оригинала (5) и приближенных функций (6) и (7). С этой целью представим (5) в виде

$$A_V(s) = D(s) T(s) \quad (8)$$

Здесь $D(s) = \gamma / s$; $T(s) = \text{th}(\gamma s / 2)$.

Тогда амплитудная характеристика (5) может быть представлена в виде

$$A(\omega) = D(\omega) T(\omega)$$

Здесь $D(\omega) = F^{1/2}$; $F = (1 + (\delta / \omega)^2)^{1/2}$; $T(\omega) = (M^2 + K^2)^{1/2} / (E^2 + K^2)^{1/2}$;
 $\alpha = \omega ((F-1) / 2)^{1/2}$; $\beta = \omega ((F+1) / 2)^{1/2}$; $\bar{a} = \alpha \tau$; $\bar{b} = \beta \tau$; $K = \exp(-\bar{a}) \sin(\bar{b})$;
 $V = \exp(-\bar{a}) \cos(\bar{b})$; $M = (1-V)$; $E = (1+V)$;

Амплитудные характеристики приближенных функций (6) и (7) представляются выражениями:

$$A_I(\omega) = (\omega \tau / 2) F(\omega) \quad (9)$$

$$A_{II}(\omega) = A_I(\omega) / (K_{II}(\omega))^{1/2} \quad (10)$$

Здесь $K_{II}(\omega) = ((1 - (\omega \tau / 2)^2 / 3))^2 + ((\delta \tau / 2)(\omega \tau / 2) / 3)^2$

Для интегральной уточненной оценки качества переходных процессов упрощенных передаточных функций (6) и (7) используем модель системы с распределенными параметрами. С этой целью разделим регулируемую ветвь на небольшие участки, тогда для каждого дискретного элемента ветви телеграфные уравнения (3) и (4) могут быть представлены системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$L_i \frac{dQ_i}{dt} + \bar{R}_i Q_i = P_i - P_{(i+1)}; \quad (11)$$

$$C_i \frac{dP_{(i+1)}}{dt} = Q_i - Q_{(i+1)}. \quad (12)$$

Здесь $L_i = \rho l_i / F$; $C_i = F l_i / (\rho a^2)$; $\bar{R}_i = \bar{r} l_i$; l_i - длина i -го дискретного отрезка регулируемой ветви; Q_i , P_i , $Q_{(i+1)}$, $P_{(i+1)}$ - соответственно расход и давление в i -ом и $(i+1)$ -ом сечениях регулируемой ветви.

Аппроксимирующим уравнениям (11) и (12) соответствуют передаточная функция и амплитудная характеристика:

$$A_D(s) = -(\tau / 2s) \gamma^2 / (1 + (\gamma \tau / 2)^2) \quad (13)$$

$$A_D(\omega) = A_I(\omega) / K_D(\omega) \quad (14)$$

Здесь $A_D(s) = W_{D(i+1)} / \bar{\rho}$; $W_{D(i+1)}(s) = P_{(i+1)} / Q_{(i+1)}$;

$K_D(\omega) = (1 - (\omega \tau / 2)^2)^2 + ((\delta \tau / 2)(\omega \tau / 2))^2$.

Характер частотных характеристик оригинала (9), упрощенной модели первого порядка (6), модели второго приближения (7) и дискретного отрезка ветви с распределенными параметрами (14) показан на рис. 1.

Амплитудно-частотная характеристика точной модели (A_V) имеет резонансный характер. Минимумы и максимумы частотной характеристики, очевидно, не зависят от

потерь в линии. В силу этого резонансные пики точной модели определяются (5) и при $\delta=0$. При этом условии период повторения резонансных точек легко вычисляется и согласно (5) составляет $\Delta(\omega \tau) = \pi$. Для исследуемой ветви ($l=600\text{ м}$) $\tau \approx 3.64\text{ с}$, поэтому период повторения резонансных частот составляет $\Delta\omega \approx 0.86\text{ с}^{-1}$ и явления гидроудара и пониженного давления на регулирующем шибере возникают при $\omega \approx 0, 0.86, 1.72, 2.6\text{ с}^{-1}$.

Модель второго приближения (A_{II}) наиболее точно воспроизводит главную ветвь характеристики оригинала. Боковая ветвь характеристики оригинала отображается со значительно большей погрешностью.

Модель дискретного элемента (D) воспроизводит основную ветвь характеристики оригинала в значительно более узком диапазоне частот, а боковые ветви модели и оригинала существенно расходятся.

Характеристики оригинала и модели первого порядка (A_I) эквивалентны относительно в относительно малом интервале частот

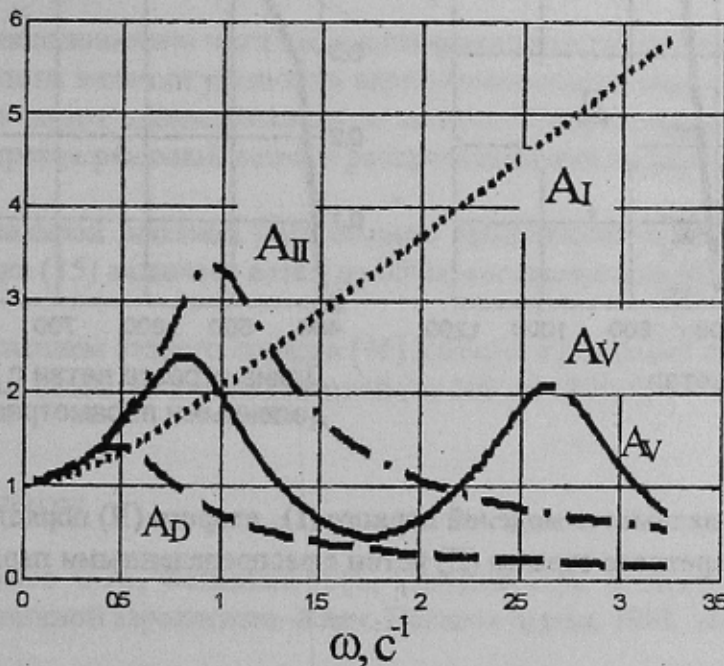


Рис. 1. Частотные характеристики, построенные по точным и приближенным уравнениям

По результатам анализа частотных характеристик локальных ветвей на рис.2 построена область практического использования упрощенных моделей первого, второго порядка и дискретного звена ветви с распределенными параметрами (при относительной погрешности амплитудных характеристик менее 10%). Из полученных зависимостей следует, что в существенном диапазоне частот ($\omega \leq 0.3\text{ с}^{-1}$) и реальном интервале аэродинамических сопротивлений регулируемых ветвей $\delta=0-0.8$ передаточные функции первого (6) и второго (7) порядка адекватно описывает свойства ветвей соответственно

до 600 и 1200 м (рис.2). Система обыкновенных дифференциальных уравнений (11) и (12) с достаточной для практики точностью описывает частотные свойства дискретных отрезков реальных регулируемых ветвей длиной до 400 м (рис.2).

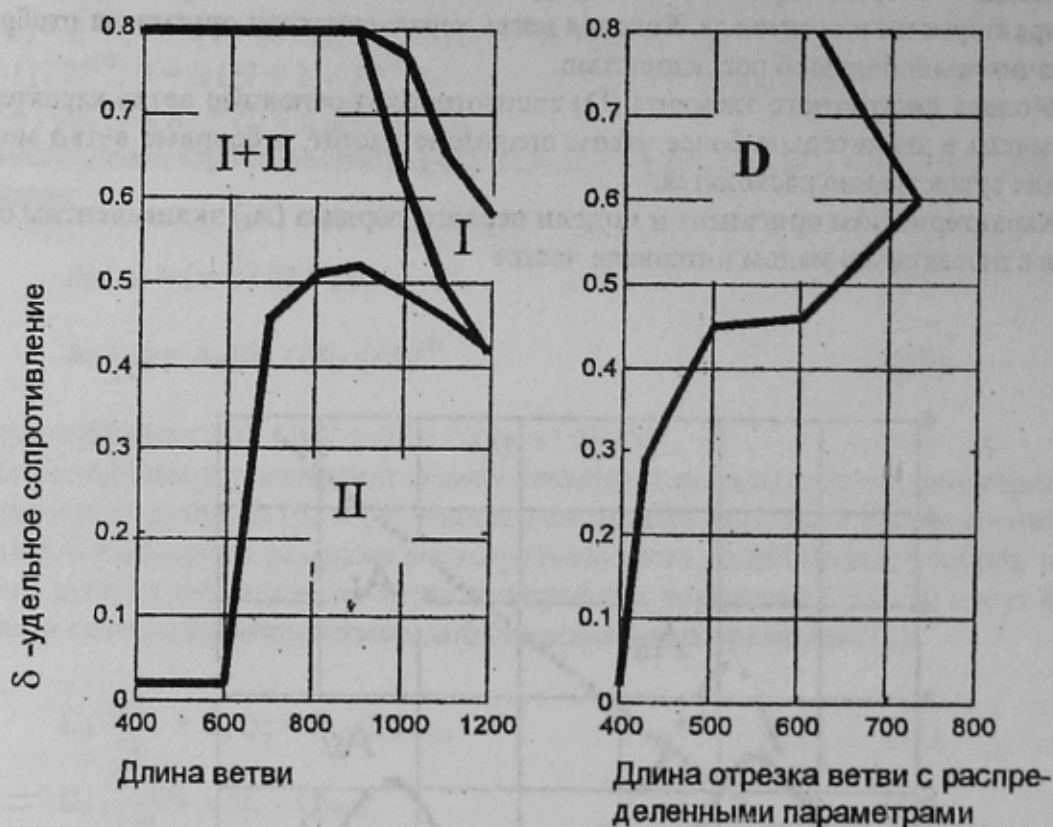


Рис. 2 Рабочая область моделей первого (I), второго (II) порядка и дискретного отрезка (D) ветви с распределенными параметрами

Следовательно, для коротких и средних ветвей (до 600 м) в соответствии с (6) уравнение динамики ветви представляется выражением:

$$L \frac{dG}{dt} + (R + R_V) G_V^2 = \Delta H \quad (15)$$

Здесь $L = \rho l / F$; R_V – аэродинамическое сопротивление регулирующего шибера; ΔH – депрессия регулируемой ветви; $R = \tilde{\tau} l$ – аэродинамическое сопротивление ветви.

Для длинных ветвей (от 600 до 1200м) переходные процессы в соответствии с (7) описываются уравнением более сложного вида:

$$T \frac{d^2 G_V}{dt^2} + L \frac{dG_V}{dt} + (R + R_V) G_V^2 = \Delta H \quad (16)$$

Здесь $T = \tau^2 R_V G_V / 6$.

Машинный анализ переходных процессов в модели регулируемой ветви с распределенными параметрами (на основе цепочечной схемы дискретных элементов (11) и (12)) и приближенных моделях с сосредоточенными параметрами для средних и длинных ветвей подтвердил допустимость использования уравнений (15) и (16) для описания динамики сети во всей области параметров реальных ветвей.

Выводы

1. С использованием частотных критериев качества показано, что в пределах реального диапазона величин удельного аэродинамического сопротивления и существенном интервале частот одним дискретным звеном (четырёхполосником) воспроизводятся свойства отрезка реальной ветви с распределенными параметрами длиной не меньше 400м.

2. В реальной шахтной сети область практического использования уравнений первого порядка (15) включает ветви до 600м, составляющие 90% всех ветвей шахтной сети.

3. Уравнением второго порядка (16) в области реальных параметров шахтной сети описываются свойства длинных ветвей (от 600 до 1200м).

Литература

1. Абрамов Ф.А., Фельдман Л.П., Святный В.А. Моделирование динамических процессов рудничной аэрологиию. - Киев: Наукова думка, 1981. - 284 с.