

УДК 539.4

Ф.Л. Шевченко, проф., д-р техн. наук,

Г.М. Улитин, проф., д-р техн. наук,

С.Н. Царенко, доц., канд. техн. наук

ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»

ул. Артема, 58, г. Донецк, Украина, 83001

E-mail: tzarenko@rambler.ru

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

В статье исследована задача устойчивости металлических конструкций на основе математической модели изгиба невесомого стержня, поперечная жесткость которого изменяется по квадратичному закону. Получены уравнения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил на основе метода начальных параметров. Выполнен расчет критической нагрузки для буровой башенной вышки ВБ-53-320 с использованием модели упругого стержня переменной жесткости с двумя участками.

Ключевые слова: металлическая башня, буровая вышка, стержень переменной жесткости, устойчивость сжатого стержня.

Во многих сферах промышленности широкое применение нашли металлоконструкции башенного типа (буровые вышки, башни теле-радиосвязи, стойки ветрогенераторов и т.д.). При расчете на устойчивость данных сооружений используют численные методы математического моделирования [1] или заменяют сквозную стержневую систему эквивалентным стержнем, при этом в расчетную схему вводят ряд упрощений; как например, переменную жесткость заменяют средней или ступенчато-переменной [2], распределенная продольная нагрузка от веса не учитывается или сводится к сосредоточенной силе [3]. В настоящее время в научной и справочной литературе приводятся расчеты стержневых систем на сосредоточенную нагрузку [4], [5], при этом не учитывается распределенная нагрузка, в частности, собственный вес. В работе [6] рассматривается устойчивость стержней переменной жесткости без учета сосредоточенных сил. Несмотря на наличие решения задач по устойчивости стержней переменной жесткости (вышек и башен различного назначения) рассматривается лишь одна схема консольного стержня, что сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, но для различных схем закрепления следует учитывать четыре крайних условия, что выполнено в настоящей статье. Таким образом, на основании приведенных в статье расчетов можно рассматривать пространственные стержневые системы переменной жесткости с любым количеством участков.

Для исследования устойчивости сквозных конструкций переменной поперечной жесткости от воздействия сосредоточенных, распределенных нагрузок и собственного веса рассмотрим

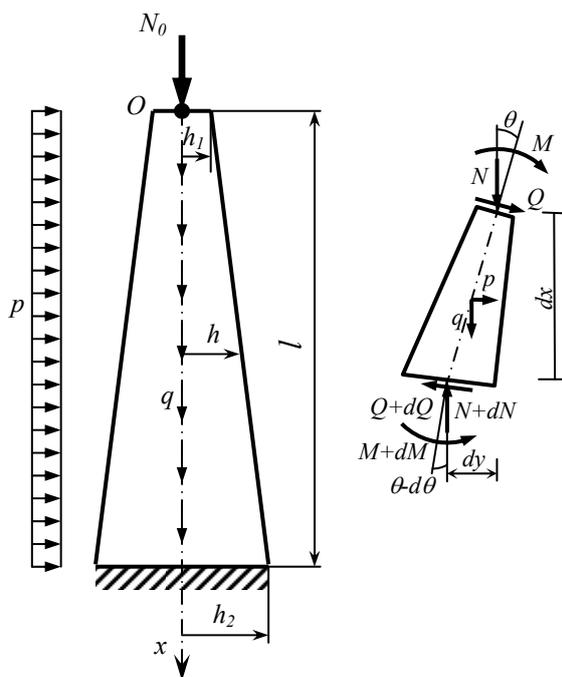


Рисунок 1 - Расчетная схема весового стержня переменного сечения

математическую модель упругого весового стержня переменного сечения длиной l . На стержень действует распределенная поперечная нагрузка интенсивностью p (ветровая нагрузка) на верхнем конце приложена вертикальная сила N_0 (вес оборудования) (рисунок 1).

Здесь h_1, h_2 – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений соответственно, $h = kx + h_1$ – радиус инерции произвольного сечения, а $k = \frac{h_2 - h_1}{l}$.

Из уравнений равновесия элемента такого стержня (рисунок 1) следуют зависимости:

$$EF(kx + h_1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x); \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) - N \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dQ}{dx} = p,$$

где $y(x)$ – уравнение изогнутой оси стержня, EF – продольная жесткость (для упомянутых конструкций является величиной постоянной или ступенчато-переменной), $N(x) = N_0 + qx$ – продольная нагрузка; $M(x)$ – изгибающий момент, $Q(x)$ – поперечная сила.

Исключая из уравнений (1) $M(x)$ и $Q(x)$ приходим к уравнению для изогнутой оси стержня

$$EF(kx + h_1)^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + 4EFk(kx + h_1) \frac{d^3 y}{dx^3} + (2EFk^2 + N_0 + qx) \frac{d^2 y}{dx^2} + q \frac{dy}{dx} = p. \quad (2)$$

Подробно остановимся на случае невесомого стержня, когда $p = 0$ и $q = 0$ ($N(x) = N_0$). Тогда выражение (2) примет вид

$$EF(kx + h_1)^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + 4EFk(kx + h_1) \frac{d^3 y}{dx^3} + (2EFk^2 + N) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

Для уравнения (3) выполним две замены:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = u(z), \quad z = \frac{kx + h_1}{h_1} = \frac{h}{h_1}.$$

Тогда оно примет вид

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + 4z \frac{du}{dz} + \left(2 + \frac{N}{EFk^2}\right) u = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) является уравнением Эйлера [7] и, следовательно, используем замену $\xi = \ln z$. Получим уравнение с постоянными коэффициентами для нахождения функции $u(\xi)$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + 3 \frac{du}{d\xi} + \left(2 + \frac{N}{EFk^2}\right) u = 0. \quad (5)$$

Находим корни характеристического уравнения (5)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm iv, \quad \text{где } v = \sqrt{\frac{N}{EFk^2} - \frac{1}{4}}.$$

С учетом замены получаем общее решение уравнения (5)

$$y''_{xx}(z) = u(z) = \frac{1}{z^{3/2}} (C_1 \cos(v \ln z) + C_2 \sin(v \ln z)). \quad (6)$$

Интегрируя дважды уравнение (6), определяем

$$y'_x(z) = \frac{C_1 h_1}{k \left(\frac{1}{4} + v^2\right) \sqrt{z}} \left(v \sin(v \ln z) - \frac{1}{2} \cos(v \ln z) \right) - \frac{C_2 h_1}{k \left(\frac{1}{4} + v^2\right) \sqrt{z}} \left(v \cos(v \ln z) + \frac{1}{2} \sin(v \ln z) \right) + C_3, \quad (7)$$

$$y(z) = -\frac{C_1 h_1^2 \sqrt{z}}{k^2 \left(\frac{1}{4} + v^2\right)} \cos(v \ln z) - \frac{C_2 h_1^2 \sqrt{z}}{k^2 \left(\frac{1}{4} + v^2\right)} \sin(v \ln z) + \frac{C_3 h_1}{k} z + C_4. \quad (8)$$

Из формулы (6) можно определить производную $y'''_{xxx}(z)$ и с учетом зависимостей (1), удовлетворить различным граничным условиям, которые дают систему для определения произвольных постоянных: C_1, C_2, C_3, C_4 .

Для практического расчета стержней, которые имеют несколько участков по нагрузке или по сечению выражение (8) удобней использовать, если выразить произвольные постоянные через начальные параметры:

$$y(1) = y_0; \quad y'_x(1) = \theta_0; \quad M(1) = EFh_1^2 y''(1) = M_0; \quad Q(1) = M'_x(1) + N\theta_0 = P_0.$$

Тогда уравнения прогибов, углов поворота, моментов и поперечных сил примут вид:

$$y(z) = y_0 + \frac{\theta_0 h_1}{kv} \sqrt{z} \sin(v \ln z) + \frac{M_0}{k^2 EF \left(\frac{1}{4} + v^2\right)} \left(1 - \sqrt{z} \cos(v \ln z) + \frac{\sqrt{z}}{2v} \sin(v \ln z) \right) + \frac{P_0 h_1}{k^3 EF \left(\frac{1}{4} + v^2\right)} \left(z - 1 - \frac{\sqrt{z}}{v} \sin(v \ln z) \right); \quad (9)$$

$$\theta(z) = \frac{\theta_0}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{2\nu} \sin(\nu \ln z) + \cos(\nu \ln z) \right) + \frac{M_0}{kv h_1 EF \sqrt{z}} \sin(\nu \ln z) + \frac{P_0}{k^2 EF \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right)} \left(1 - \frac{1}{2\nu \sqrt{z}} \sin(\nu \ln z) - \frac{1}{\sqrt{z}} \cos(\nu \ln z) \right); \quad (10)$$

$$M(z) = -\frac{\theta_0 EF k h_1 \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right)}{\nu} \sqrt{z} \sin(\nu \ln z) + \frac{M_0 \sqrt{z}}{\nu} \left(\nu \cos(\nu \ln z) - \frac{1}{2} \sin(\nu \ln z) \right) + \frac{P_0 h_1}{kv} \sqrt{z} \sin(\nu \ln z); \quad (11)$$

$$Q(z) = P_0. \quad (12)$$

Аналогичные зависимости можно получить, если принять начало координат со стороны большей жесткости, в этом случае переменная $z = \frac{h}{h_2}$, а в выражениях (9)-(12) h_1 надо заменить на h_2 .

Исследуем устойчивость на примере буровой башенной вышки БВ-53-320. Вышка представляет пространственную ферменную стержневую конструкцию в виде квадратной усеченной пирамиды, и ее расчетная схема приведена на рисунок 2. Грузонесущие стойки нижней части вышки до отметки $l_1=35,05$ м изготовлены из труб $\varnothing 245 \times 12$ мм, выше этой отметки – трубы $\varnothing 194 \times 6$ мм, элементы решетки ферм изготовлены: пояса – из труб 194×6 мм и 140×5 мм, диагональные тяги – из круглых стержней 24 и 30 мм.

Характеристики вышки: высота вышки $l=53,3$ м, ширина нижнего основания $b=10$ м, верхнего $b_1=2$ м, на стыке двух участков $b_c=4,74$ м ($h_1=1$ м, $h_2=5$ м, $h_c=2,37$ м, $k=0,075$), площадь поперечного сечения грузонесущих стоек верхнего участка $F_1=141,75$ см², нижнего участка $F_2=351,4$ см².

Приняв, начало координат со стороны свободного конца стержня и обозначив $\nu = \sqrt{\frac{N}{EF_1 k^2} - \frac{1}{4}}$, $\nu_1 = \sqrt{\left(\nu^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{F_1}{F_2} - \frac{1}{4}}$, получим

уравнения прогибов, углов поворота, моментов и поперечных сил для верхнего участка:

$$y_1(z) = y_0 + \frac{\theta_0 h_1}{kv} \sqrt{z} \sin(\nu \ln z); \quad \theta_1(z) = \frac{\theta_0}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{2\nu} \sin(\nu \ln z) + \cos(\nu \ln z) \right); \quad (13)$$

$$M_1(z) = -\frac{\theta_0 EF_1 k h_1 \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right)}{\nu} \sqrt{z} \sin(\nu \ln z); \quad Q_1(z) = 0.$$

Из выражений (13), приняв $z = \frac{h_c}{h_1}$, получим начальные

параметры для нижнего участка, тогда уравнения прогибов и углов поворота на нижнем участке будут иметь вид

$$y_2(z) = y_0 + \theta_0 \left(\sqrt{\frac{h_1}{h_c}} \left(\left(\frac{1}{2\nu} \sin \left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1} \right) + \cos \left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1} \right) \right) \right) \frac{h_c}{kv_1} \sqrt{z} \sin(\nu_1 \ln z) - \frac{F_1 h_1 \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right)}{\nu k F_2 \left(\frac{1}{4} + \nu_1^2 \right)} \sqrt{\frac{h_c}{h_1}} \sin \left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1} \right) \left(1 - \sqrt{z} \cos(\nu_1 \ln z) + \frac{\sqrt{z}}{2\nu_1} \sin(\nu_1 \ln z) \right) \right);$$

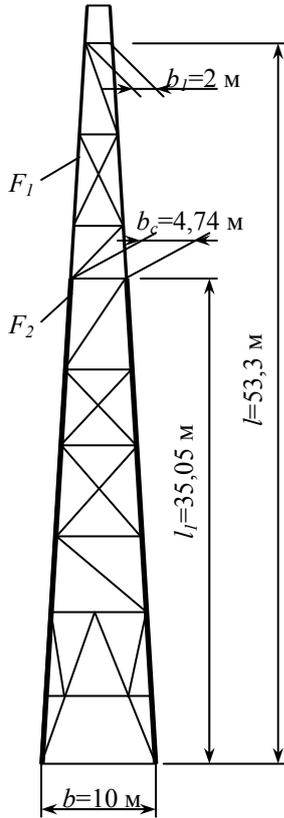


Рисунок 2 - Расчетная схема вышки

$$\theta_2(z) = \theta_0 \left(\sqrt{\frac{h_1}{h_c}} \left(\left(\frac{1}{2v} \sin \left(v \ln \frac{h_c}{h_1} \right) + \cos \left(v \ln \frac{h_c}{h_1} \right) \right) \right) \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{2v_1} \sin(v_1 \ln z) + \cos(v_1 \ln z) \right) - \frac{F_1 \left(\frac{1}{4} + v^2 \right)}{vv_1 F_2} \sqrt{\frac{h_1}{h_c}} \sin \left(v \ln \frac{h_c}{h_1} \right) \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(v_1 \ln z) \right).$$

Из условий жесткого закрепления второго конца стержня получаем уравнение для определения параметра v

$$\left(\left(\frac{1}{2v} \sin \left(v \ln \frac{h_c}{h_1} \right) + \cos \left(v \ln \frac{h_c}{h_1} \right) \right) \right) \left(\frac{1}{2v_1} \sin \left(v_1 \ln \frac{h_2}{h_c} \right) + \cos \left(v_1 \ln \frac{h_2}{h_c} \right) \right) - \frac{F_1 \left(\frac{1}{4} + v^2 \right)}{vv_1 F_2} \sin \left(v \ln \frac{h_c}{h_1} \right) \sin \left(v_1 \ln \frac{h_2}{h_c} \right) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) решается численным методом, из его решения получаем значение первого корня $v = 1,647$, чему соответствует $N_{кр} = 47,29$ МН. При использовании упрощенной модели стержня с одним участком и усредненной площадью $F_{cp} = \frac{l_1}{l} F_2 + \frac{l-l_1}{l} F_1$ получаем значение первого корня $v = 1,218$, чему соответствует $N_{кр} = 54,6$ МН, что отличается от точного значения на 15,5%. Таким образом, подобные упрощения расчетной модели вносят значительную погрешность в результат расчета.

ВЫВОДЫ

1. Впервые для расчета стержневых систем переменной жесткости использовано дифференциальное уравнение 4-го порядка, что позволяет рассчитывать различные стержневые конструкции, состоящие из нескольких участков;

2. На примере буровой вышки ВБ-53-320 проиллюстрирован пример расчета на устойчивость пространственной консоли с двумя участками.

Библиографический список использованных литературных источников

1. Editor Madugula. Dynamic response of lattice towers and guyed masts (Committee rapport) / Editor Madugula. - М.К.С. Reston (US): ASCE, 2002. - 266 p.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений / В.А. Киселев - М.: Стройиздат, 1964. - 332 с.
3. Савицкий Г.А. Основы расчета радиомачт / Г.А. Савицкий - М.: Гос. изд-во по вопросам связи и радио, 1953. - 275 с.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко - М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1971. - 807 с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир - М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1967. - 983 с.
6. Динник А.Н. Продольный изгиб, кручение / А.Н. Динник - М.: Изд. АН СССР, 1955. - 392 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. - М.: Наука, 1976. - 576 с.

Shevchenko F.L., Ulitin G.M., Tsarenko S.N.

Calculation on steadiness of the compound metalwork of variable rigidity

In article the problem of steadiness of metal constructions on the basis of mathematical model of a bend of a weightless bar of variable rigidity is investigated. The equations of displacement, the angles of rotation, the bending moments and cross-section forces on the basis of a method of initial parameters are received. Calculation of critical loading for derrick VB-53-320 with use of model of an elastic bar of variable rigidity with two lengths is executed.

Keywords: lattice towers, derrick, bare of variable rigidity, steadiness of the press bare.

Шевченко Ф.Л., Улітін Г.М., Царенко С.М.

Розрахунок на стійкість складених металоконструкцій змінної жорсткості

В статті досліджено задачу стійкості металевих конструкцій на основі математичної моделі згину невагомго стержня, поперечна жорсткість якого змінюється за квадратичним законом. Отримані рівняння прогинів, кутів повороту, згинаючих моментів та поперечних сил на основі методу початкових

параметрів. Виконано розрахунок критичного навантаження для бурової баштової вежі ВБ-53-320 з використанням моделі пружного стержня змінної жорсткості з двома ділянками.

Ключові слова: металева башта, бурова вежа, стержень змінної жорсткості, стійкість стиснутого стержня.