

УДК 681.51.015.4

**Е.Є. Зайцева (асист.), В.І. Бессараб (канд. техн. наук, доц.), А.О. Воропаєва (асп.)**  
 Донецький національний технічний університет, м. Донецьк  
 кафедра автоматики та телекомунікацій  
 E-mail: voropaeva\_anna@meta.ua

## ВИЗНАЧЕННЯ ДОСЯЖНОСТІ ТА КЕРОВАНОСТІ В ДИСКРЕТНО-БЕЗПЕРЕРВНИХ СИСТЕМАХ

*Виконано аналіз методики визначення досяжності та керованості станів дискретно-безперервних систем. Наведено алгоритм перевірки керованості стану дискретно-безперервного об'єкта. Роботу алгоритму розглянуто на прикладі системи склад – вибій кар'єрного комплексу відкритого способу розробки корисних копалин.*

**Ключові слова:** граф синхронізації, вектор керуючих впливів, досяжність, фіксована точка матриці.

### Вступ

При розгляді питання досяжності та керованості по відношенню до дискретно-безперервних систем прийнято застосовувати математичні співвідношення, які характерні не лише для «Max-plus»-алгебри, а і для «Min-plus»-алгебри. Тому для однозначного трактування застосовуються деякі специфічні поняття і позначення, характерні для цих розділів математичної теорії.

Нехай  $R$  — полукільце скалярів, розширене до  $\bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ . Для найменшого  $-\infty$  елемента використовується позначення  $-\varepsilon$ , а для найбільшого елемента  $\infty$  — позначення  $\varepsilon$ . Операції Max і Min позначаються, відповідно,  $\oplus$  і  $\wedge$ . Крім того, для операції  $+$  в «Max-plus»-алгебрі та «Min-plus»-алгебрі використовуються різні символи [1]:  $\cdot$  та  $\cdot'$  відповідно, оскільки

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \varepsilon &= -\varepsilon, \\ -\varepsilon \cdot' \varepsilon &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Нейтральний елемент для операції  $+$  позначається  $e$  і відповідає 0 в звичайній алгебрі.

Для будь-якої  $m \times n$  матриці  $A = (a_{ij})$ , через  $A^{-T}$  позначають матрицю, транспоновану до матриці  $A^{-} = (a_{ij}^{-1})$ , а через  $A^{\nabla}$  — добуток [2]:

$$A^{\nabla} = A \cdot A^{-T}.$$

Степінь  $k$  квадратної  $n \times n$  матриці  $B$  і оператор  $*$  позначають  $B^k$  і  $B^*$  відповідно та обчислюють як в «Max-plus»-алгебрі [1]:

$$\begin{aligned} B^k &= \underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_k, \\ B^* &= I \oplus B \oplus B^2 \oplus \dots \oplus B^{n-1}. \end{aligned}$$

Для неперервних та дискретних систем поняття досяжності та керованості є тотожними, однак для дискретно-безперервних систем це не так. Якщо стан дискретно-безперервної системи є керованим, то він також є досяжним, але зворотнє невірно. Крім того, в теорії ДБС говориться лише про керованість стану, а не системи в цілому, оскільки керованість — дискретна властивість в лінійних системах «Max-plus»-алгебри [2].

### Постановка задачі дослідження

Розглядається дискретно-безперервна система, яка задана в канонічній формі наступною системою рівнянь в базисі «Max-plus»-алгебри:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) \oplus B \cdot u(k+1), \\ y(k+1) &= C \cdot x(k+1), \end{aligned} \tag{1}$$

де  $x(k) \in \bar{R}^m$ , елемент  $x_i(k)$  — це момент часу, в який  $i$ -а подія відбудеться в  $k$ -му циклі розвитку процесу,  $i = \overline{1, m}$ ;

$u(k) \in \bar{R}^n$  — момент часу, в який  $k$ -й вектор керування безпосередньо діє на систему,

$A, B, C$  — матриці відповідних розмірностей, елементи яких належать до  $\bar{R}$ .

Перше рівняння системи (1) означає, що поява події  $i$  в  $(k+1)$ -му циклі має місце лише тоді, коли відбудуться всі події у всіх попередніх  $k$  циклах та буде завершено керуючий вплив, що діє на подію  $i$ . Тобто маємо  $\bigoplus_{j=1}^m a_{ij} x_j(k)$ ,  $\bigoplus_{l=1}^n b_{il} u_l$  ( $a_{ij}$  — тривалість  $j$ -ї події, що безпосередньо передуює події  $i$ ,  $u_l$  — момент часу запуску керування  $l$  та  $b_{il}$  — затримка часу до запуску події  $i$ , крім того,  $b_{il} = -\varepsilon$  в випадку, якщо  $l$  безпосередньо не передуює  $i$ ).

У випадках представлення системи графом синхронізації, стан відповідає часу маркування позицій графа, а керування докладається до деяких переходів, затримка відповідна часу запуску переходу.

Перше рівняння в системі (1) можна записати

$$x(k+1) = [B \mid A] \cdot \begin{pmatrix} u(k+1) \\ x(k) \end{pmatrix} \quad (2)$$

та в розгорнутому виді:

$$x(k+1) = [\Gamma_{k-i} \mid A^{(k+1-i)}] \cdot \begin{pmatrix} u_{k-i} \\ x(i) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де  $\Gamma_{k-i} = [B \mid A \cdot B \mid \dots \mid A^{(k-i)} \cdot B]$  та  $u_{k-i} = (u(k+1) \ u(k) \ \dots \ u(i+1))^T$  — послідовність керуючих впливів, що переводить систему зі стану  $x(i)$  в стан  $x(k+1)$ .

Припустимо, що для заданого  $x = x(k+1)$ , існує допустимий початковий стан  $x(i)$  і послідовність вхідних впливів  $u(i+1), u(i+2), \dots, u(k+1)$ , така, що рівняння (3) є тотожністю. Тоді, починаючи зі стану

$$x(i+1) = A \cdot x(i) \oplus B \cdot u(i+1),$$

можна досягти  $x(k+1)$  за  $k-i$  кроків розвитку процесу (тобто  $x(i), x(i+1), \dots, x(k)$  — всі є допустимими початковими станами). Оскільки  $x(i) \leq x(i+1)$ , отримаємо, що множини допустимих початкових станів  $AIC$  та вхідних керуючих векторів  $ICV$  є частково впорядкованими.

Можна сформулювати задачу досяжності у вигляді: нехай задано  $x \in \bar{R}^m$ . Потрібно, якщо це можливо, знайти таку множину  $AIC(x) \neq \emptyset$  допустимих початкових станів та множину  $ICV(x) \neq \emptyset$  вхідних керуючих векторів, такі, що рівняння (3) вірно для деякого  $i$  ( $0 \leq i \leq k$ ).

При  $i=0$  з рівняння (3) отримаємо початковий стан  $x(0)$  (момент часу, в який не було запущено жодного переходу) та послідовність вхідних векторів  $u_k$  з першим керуванням  $u(1)$ . Оскільки момент  $t=0$  може бути часом першого запуску переходів, раціонально припустити, що  $x(0) = -\varepsilon$ . В цьому випадку, оскільки

$$A^{(k+1)} \cdot x(-\varepsilon) = A \cdot x(-\varepsilon) = -\varepsilon,$$

рівняння (3) прийме вид:

$$x(k+1) = \Gamma_k \cdot u_k. \quad (4)$$

Стан  $x$  вважається досяжним, якщо  $AIC(x) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ , та керованим, якщо  $-\varepsilon \in AIC(x)$ .

В [2] було доведено, що для того, щоб стан  $x$  був керованим, необхідно, щоби він був фіксованою точкою матриці

$$\Gamma_k^\nabla : \bar{R}^{m(k+1)} \rightarrow \bar{R}^{m(k+1)}, \\ x \mapsto \Gamma_k^\nabla \cdot' x.$$

Таким чином, перевірка необхідної умови керованості стану  $x(k+1)$ , є перевіркою, чи є стан  $x(k+1)$  фіксованою точкою матриці  $\Gamma_k^\nabla$ .

Запишемо рівняння (4) в розгорнутому виді:

$$x(k+1) = [B \mid A \cdot B \mid \dots \mid A^{(k)} \cdot B] \cdot \begin{pmatrix} u(k+1) \\ u(k) \\ \dots \\ u(1) \end{pmatrix}.$$

При розв'язанні (4) відносно вектору  $u_k$ , отримаємо рівняння для відновлення керуючих впливів:

$$\begin{pmatrix} u(k+1) \\ \dots \\ u(1) \end{pmatrix} = \Gamma_k^{-T} \cdot' x(k+1),$$

або скорочено

$$u_k = \Gamma_k^{-T} \cdot' x. \quad (5)$$

Отже, алгоритм перевірки керованості стану  $x$  за необхідною умовою має вид:

*Крок 1.*  $k := 1$ ,  $x(0) := -\varepsilon$ .

*Крок 2.* Перевірити необхідну умову керованості. Обчислити матриці  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma_k^{-T}$ , та матрицю  $\Gamma_k^\nabla = \Gamma_k \cdot \Gamma_k^{-T}$ . Якщо умова виконана, переходити до кроку 3, інакше — переходити до кроку 5.

*Крок 3.* Використовуючи матрицю  $\Gamma_k^{-T}$  з рівняння (5) обчислити вектор  $u_k$ . За рівнянням (4) обчислити вектор стану  $x(k+1)$ .

*Крок 4.* Якщо виконане  $x(k+1) = x$ , то стан  $x$  є досяжним, починаючи зі стану  $x(0) = -\varepsilon$  за  $k$  кроків, а отже, є керованим. Перехід до кінця алгоритму. Інакше — перехід до кроку 6.

*Крок 5.*  $k := k + 1$  і переходити на крок 2.

*Крок 6.* Вважати стан  $x$  некерованим. Виконання умови виходу з циклу.

### Рішення задачі та результати дослідження

Роботу алгоритму можна розглянути на прикладі системи склад – вибій кар'єрного комплексу відкритого способу розробки корисних копалин [3,4,5]. В [3] було розроблено модель руху транспортних засобів по односмугових ділянках в такій системі в виді графу синхронізації з часовими оцінками (рис. 1).

Поведінка об'єкта задається системою рівнянь у змінних стану:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{x}(k+1) \oplus \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(k+1), \quad (6)$$

матриці  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}$  визначаються з графу синхронізації системи на основі множин немаркованих, маркованих позицій та множини керованих переходів відповідно.

Структура системи керування зі зворотним зв'язком описується рівнянням:

$$\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{x}(k+1) \oplus \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{x}(k). \quad (7)$$

Тут  $x(k)$  — вектор стану,  $i$ -й елемент якого визначає момент часу маркування позиції  $P_i$  графу синхронізації на  $k$ -у циклі, а матриці  $K_0$  і  $K_1$  — дві додатньо визначені матриці, які формують характер закону керування процесом в поточному та наступному циклах відповідно.

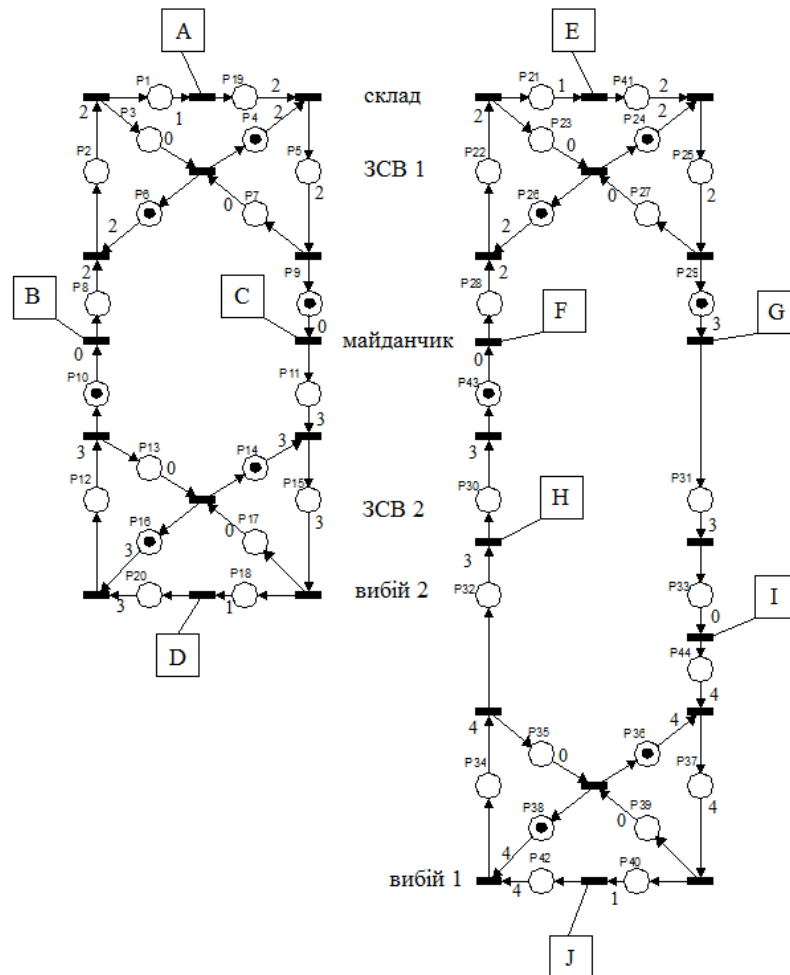


Рисунок 1 — Граф синхронізації системи склад – вибій кар’єрного комплексу

Таким чином, для керованого процесу маємо рівняння в просторі станів замкнутої системи:

$$x(k+1) = (A_0 \oplus BK_0) \cdot x(k+1) \oplus (A_1 \oplus BK_1) \cdot x(k) \text{ або} \\ x(k+1) = M_s \cdot x(k). \quad (8)$$

де  $M_s$  — матриця динаміки керованої системи,

$$M_s = (A_0 \oplus BK_0)^* \cdot (A_1 \oplus BK_1).$$

В [4,5] для заданих точок докладання керуючих впливів було сформовано матриці зворотного зв’язку  $K_0, K_1$ , які забезпечують коректну роботу транспортної мережі. У випадку, коли в системі рухається 4 транспортних засоби (2 в підсистемі склад – вибій 2 та 2 в підсистемі склад – вибій 1), а отже, власне число матриці динаміки другої підсистеми більше за власне число матриці динаміки першої підсистеми, доцільно в поточному циклі затримувати переходи графу синхронізації першої підсистеми. Індеси скінчених елементів матриць  $(B)_{im}$ ,  $(K_0)_{mj}$ ,  $(K_1)_{mj}$  зведемо у таблицю 1. Зауважимо, що скінчені елементи

матриці  $\mathbf{K}_0$  відповідають затримці переходів A, B, C, D ( $m = 1,2,3,4$ ), а матриці  $\mathbf{K}_1$  — переходів E, G, F, H ( $m = 5,6,7,8$ ) відповідно.

Таблиця 1 — Індеси скінчених елементів матриць управління та зворотного зв'язку

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8
$i$	19	8	11	20	41	28	31	30
$j$	21	29	43	33	1	9	10	18

Для системи склад – вибій було обчислено матрицю динаміки керованої системи  $\mathbf{M}_s$  (розмірності  $44 \times 44$ ) та її власний вектор  $\nu_s$ :

$$\nu_s = [8 \ 6 \ 8 \ 0 \ 11 \ 0 \ 13 \ 4 \ 13 \ 17 \ 0 \ 14 \ 17 \ 4 \ 7 \ 4 \ 10 \ 10 \ 9 \ 11 \ 33 \ 31 \ 33 \ 0 \ 36 \ 0 \ 38 \ 29 \ 38 \ 64 \ 41 \ 61 \ 44 \ 57 \ 61 \ 23 \ 48 \ 23 \ 52 \ 52 \ 34 \ 53 \ 67 \ 44]^T$$

Для розрахунку часових точок маркування позицій графу синхронізації прийемо, що  $\mathbf{x}(1) = \nu_s$ . За формулою (8) отримано вектор стану  $\mathbf{x}(2)$ :

$$\mathbf{x}(2) = [86 \ 84 \ 86 \ 52 \ 89 \ 52 \ 91 \ 82 \ 91 \ 121 \ 108 \ 118 \ 121 \ 82 \ 111 \ 82 \ 114 \ 114 \ 87 \ 115 \ 73 \ 71 \ 73 \ 39 \ 76 \ 39 \ 78 \ 69 \ 78 \ 105 \ 82 \ 102 \ 85 \ 98 \ 102 \ 63 \ 89 \ 63 \ 93 \ 93 \ 74 \ 94 \ 108 \ 85]^T$$

Перевірка стану системи  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(2)$  на керованість проводиться за приведеним вище алгоритмом. Для цього система рівнянь (6) зводиться до виду

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) \oplus \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k+1),$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_0^* \mathbf{A}_1, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Матриці  $\tilde{\mathbf{A}}$  та  $\tilde{\mathbf{B}}$  використовуються для обчислення матриці  $\Gamma_k$  і послідовності векторів керування  $\mathbf{u}(k)$ .

Отримано, що вектор  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(2)$  є керованим, причому його можна досягти за 2 кроки, починаючи з вектору  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = -\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(1) &= [47 \ 45 \ 47 \ \varepsilon \ 50 \ \varepsilon \ 52 \ 43 \ 52 \ 82 \ 69 \ 79 \ 82 \ \varepsilon \ 72 \ \varepsilon \ 75 \ 75 \ 48 \ 76 \ 34 \ 32 \ 34 \ \varepsilon \ 37 \ \varepsilon \ 39 \ 30 \ 39 \ 66 \ 43 \ 63 \ 46 \ 59 \ 63 \ \varepsilon \ 50 \ \varepsilon \ 54 \ 54 \ 35 \ 55 \ 69 \ 46]^T, \\ \tilde{\mathbf{x}}(2) &= \mathbf{x}(2). \end{aligned}$$

Відповідні вектори керування:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(1) &= [48 \ 43 \ 69 \ 76 \ 35 \ 30 \ 43 \ 66]^T, \\ \mathbf{u}(2) &= [87 \ 82 \ 108 \ 115 \ 74 \ 69 \ 82 \ 105]^T, \end{aligned}$$

докладаються до переходів A – H графу синхронізації з рис.1.

Зауважимо, що той самий вектор  $\mathbf{u}(2)$  можна отримати за формулою (7):

$$\mathbf{u}(2) = \mathbf{K}_0 \tilde{\mathbf{x}}(2) \oplus \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{x}}(1).$$

Тепер змінимо координату в векторі  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(2)$  таким чином, щоб отримати завідомо некерований. Припустимо, що позиції  $P_2$  і  $P_5$  графу синхронізації маркуються одночасно:

$$\bar{\mathbf{x}}_2(2) = \bar{\mathbf{x}}_5(2).$$

Перевіримо, чи є вектор стану  $\bar{\mathbf{x}}$  керованим. Оскільки кількість циклів роботи транспорту в системі обумовлена виробничим процесом, будемо вважати достатнім для перевірки умови виходу з циклу значення  $k_{\max} = 10$ . Отримаємо, що для будь-якого значення  $k \in 1, \dots, 10$  не виконана необхідна умова керованості стану системи, тобто

$$\bar{\mathbf{x}} \neq \Gamma_k^v \cdot \bar{\mathbf{x}},$$

а отже, не можна знайти керування, що за прийнятну кількість виробничих циклів переведе систему в заданий стан.

### Висновки

1. Розглянуто проблему досяжності та керованості дискретно-безперервних систем з використанням «Min-Max»-алгебри.

2. Наведено алгоритм перевірки керованості стану системи та відновлення керуючих впливів за необхідною умовою керованості.

3. Роботу алгоритму проілюстровано на прикладі системи склад – вибій кар'єрного комплексу. Отримано, що вектори управління відновлені за алгоритмом та обчислені з використанням матриць зворотного зв'язку є рівними між собою.

### Список використаної літератури

1. Бессараб В.І. Математичні основи теорії дискретно-безперервних систем: монографія / В.І. Бессараб. — Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. — 175 с.
2. Prou J. Controllability in the max-algebra [Text] / J. Prou, E. Wagneur // Kybernetika. — 1999. — vol. 35, issue 1. — P. 13–24.
3. Зайцева Е.Є. Моделирование транспортных потоков как дискретно-безперервного объекта [Текст] / Е.Є. Зайцева, В.В. Червинський, В.В. Турупалов // АСУ и приборы автоматики. — 2010. — № 152. — С. 15 – 21.
4. Зайцева Е.Є. Алгоритм управления транспортной системой как дискретно-безперервным объектом [Текст] / Е.Є. Зайцева, В.І. Бессараб, В.В. Червинський // Наукові праці ДонНТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. — 2011. — Вип. 21 (183) — С. 19 – 25.
5. Бессараб В.І. Компенсация збурень в транспортній системі [Текст] / В.І. Бессараб, В.В. Червинський, Е.Є. Зайцева // «Автоматика-2011»: матеріали XVIII міжнародної конференції з автоматичного управління / В.І. Бессараб, В.В. Червинський, Е.Є. Зайцева. — Львів: ЛПІ, 2011. — Том 1. — С. 183–184.

Надійшла до редакції:  
15.02.2012р.

Рецензент:  
д-р техн. наук, проф. Скобцов Ю.О.

*E.Y. Zaytceva, V.I. Bessarab, A.A. Voropaeva. Reachability and controllability determination in discrete-event systems. Methods for determining the reachability and controllability states in discrete-event systems analyzed. An algorithm to test discrete-event object controllability condition is described. The algorithm discussed by the example of career complex system.*

**Keywords:** synchronization graphs, input control vector, reachability, fixed point of matrix.

*Э.Е. Зайцева, В.И. Бессараб, А.А. Воропаева. Определение достижимости и управляемости в дискретно-непрерывных системах. Проведён анализ методики определения достижимости и управляемости дискретно-непрерывных систем. Приведён алгоритм проверки управляемости состояния дискретно-непрерывного объекта. Работу алгоритма рассмотрено на примере системы склад-забой карьерного комплекса открытого способа разработки полезных ископаемых.*  
**Ключевые слова:** граф синхронизации, вектор управляющих воздействий, достижимость, фиксированная точка матрицы.

© Зайцева Е.Є., Бессараб В.І., Воропаева А.О., 2012