УДК 512.2

ПОВЕРХНІ КОНГРУЕНЦІЙ КООРДИНАТНИХ ЛІНІЙ ТРИОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ

Скідан І.А., д.т.н.
Стребіж Н.В., пошукувач
Донецький національний технічний університет
Тел.: (062) 338-48-85

Анотація – **вивчаються поверхні, утворені каркасом координатних ліній триортогональних систем, формулюються умови, за яких вони віднесені до ліній кривини.**

Ключові слова – **триортогональна система, конгруенція, поверхня конгруенції, лінія кривини, комп'ютерна технологія.**

Постановка проблеми. В багатьох випадках проблема проектування полягає у визначенні форми об'єкта, яка б найкращим чином відповідала споживчим, технічним чи естетичним якостям, а також можливостям застосування сучасних технологій проектування, вироблення чи спорудження. Успіх у вирішенні цієї проблеми забезпечується наявністю розмаїття засобів формоутворення з врахуванням умов, які суттєво впливають на згадані якості об'єкта, що проектується. Отже, розвиток способів аналітичного формоутворення поверхонь за наперед поданими умовами як основи для застосування комп'ютерних технологій проектування чи вироблення є актуальною проблемою.

Аналіз останніх досліджень. В працях [1-5] проблема аналітичного формоутворення вирішується на двох рівнях:

- введенням функцій

$$x = x(t,u,v), y = y(t,u,v), z = z(t,u,v); \quad (1)$$

- одним із способів встановлення безпосереднього чи побічного зв'язку між параметрами t, u, v функцій (1), який є внутрішнім рівнянням і разом з функціями (1) визначає поверхню параметрично.

Дворівнева схема аналітичного опису поверхонь застосована для аналітичної інтерпретації відомих конструктивних способів формоутворення поверхонь. Функції (1) призначають з врахуванням способу формоутворення:

- для кінематичного способу: u, v – криволінійні координати на поверхні-носії твірної, t – параметр руху поверхні-носія [1]; в окремому випадку u, v – система координації нормальної площини напрямної лінії, t – параметр положення точки на напрямній;

- для способу виділення поверхні із конгруенції ліній: функції (1) подають конгруенцію ліній [3], якщо u, v – параметри форми чи положення елемента конгруенції, t – параметр положення точки на елементі конгруенції; в окремому випадку конгруенція є нормальною (u, v – криволінійні координати на опорній поверхні, t – параметр положення точки на нормалі до неї [2];
- для способу конструювання методом точкового перетворення: t, u, v – координати точки в будь-якій системі віднесення образу [4];
- для способу утворення криволінійним проекціюванням: u, v – параметри криволінійного променя, t – параметр положення точки на промені [5].

Таким чином, функції (1) забезпечують попередню координацію усього простору і, в залежності від способу формоутворення, враховують частково бажану форму об'єкта, що конструюється, лишаючи конструктора вільним у переході до другого рівня.

На другому рівні, як було вже сказано, є можливість врахувати додаткові умови до поверхні при складанні її внутрішнього по відношенню до функцій (1) рівняння.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). На основі того, що функціями (1) можна не тільки вводити спеціальну систему координації простору, але й описувати три конгруенції її координатних ліній, в статті вивчаються поверхні конгруенцій координатних ліній відомих криволінійних координатних систем.

Основна частина. Спеціальні координати, введені функціями (1), мають область визначеності

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{2}$$

Якщо функції (1) виражають конгруенцію ліній, то умові

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(t,u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

відповідають фокальні фігури конгруенції.

Оскільки функції (1), як було вже відмічено, описують три конгруенції координатних ліній певної системи координації простору, фокальні фігури спільні для усіх трьох конгруенцій.

В різноманітних застосуваннях теорії поля особливо важливу роль відіграють триортогональні системи координації. Умови, яким мусять задовольняти функції (1), щоб система, введена ними, була триортогональною

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial t}=0.
\end{aligned}\qquad(4)$$

В області простору, де виконується умова (2), вирази (1) можуть бути розв'язані відносно t, u, v, тобто, отримання однозначних функцій

$$t=t(x,y,z),u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)\qquad(5)$$

можливе.

Примітимо, що подання як криволінійною системи координат, так і трьох конгруенцій координатних ліній цієї системи функціями (5) також можливе.

Умови триортогональності системи (5)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\
&\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}=0,
\end{aligned}\qquad(6)$$

а спільні фокальні фігури конгруенцій координатних ліній описують рівнянням

$$J_1=\frac{D(t,u,v)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial t}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}=0.\qquad(7)$$

Для системи координат, поданої функціями (1), на координатних поверхнях t=const встановлюється криволінійна система віднесення u, v, на координатних поверхнях u=const – криволінійна система віднесення t, v, на координатних поверхнях v=const – криволінійна система віднесення t, u.

Якщо функції (1) задовільнюють умовам триортогональності (4), то координатні поверхні t=const, u=const, v=const віднесені до ліній кривини.

Конгруенції, що подаються функціями (1):

- t-ліній як ліній перетину двох сімей координатних поверхонь u=const і v=const;
- u-ліній як ліній перетину двох сімей координатних поверхонь t=const і v=const;
- v-ліній як ліній перетину двох сімей координатних поверхонь t=const і u=const.

Подання поверхонь конгруенцій координатних ліній здійснюємо параметричними рівняннями (1) і одним із внутрішніх рівнянь:

- для поверхонь конгруенції t-ліній

$$u = u(w), v = v(w), \tag{8}$$

$$u = u(v), \tag{9}$$

$$v = v(u), \tag{10}$$

$$f(u, v) = 0; \tag{11}$$

- для поверхонь конгруенції u-ліній

$$t = t(w), v = v(w), \tag{12}$$

$$t = t(v), \tag{13}$$

$$v = v(t), \tag{14}$$

$$\varphi(v, t) = 0; \tag{15}$$

- для поверхонь конгруенції v-ліній

$$t = t(w), u = u(w), \tag{16}$$

$$t = t(u), \tag{17}$$

$$u = u(t), \tag{18}$$

$$\psi(t, u) = 0. \tag{19}$$

Визначимо умови віднесення до ліній кривини поверхні конгруенції v-ліній триортогональної системи, якщо поверхня подана внутрішнім рівнянням (18).

Підстановка рівняння (18) до функцій (1) дає

$$x = x[t, u(t), v], y = y[t, u(t), v], z = z[t, u(t), v] \tag{20}$$

На координатній поверхні v=const триортогональної системи координатні лінії t=const, u=const збігаються з лініями кривини. Внутрішнє рівняння (18) подає на усіх поверхнях v=const лінію, яка є лінією кривини лише у випадках, коли сім’я поверхонь v=const складається із площин або сфер. Оскільки в триортогональній системі v-лінії є ортогональними траєкторіями поверхонь v=const, поверхня (1), (18) конгруенції v-ліній віднесена до ліній кривини у випадку, коли сім’я координатних поверхонь v=const триортогональної системи складається з площин чи сфер.

Висновки. Дослідження поверхонь конгруенцій координатних ліній триортогональних систем корисне тим, що, по-перше, дає методологічно прозорий спосіб візуалізації поверхні засобами комп'ютерної графіки з нанесенням на неї передбаченої сім'ї ліній, що характеризує клас поверхонь (прямолінійних твірних лінійчатих поверхонь, кіл – для циклічних поверхонь, і таке інше). По-друге, в триортогональних системах з участю сімей сфер та (або) площин є можливість віднесення поверхні до ліній кривини. Остання можливість сприяє застосуванню методів розрахунку оболонок та визначенню траєкторій оброблянн різанням на обладнанні з ЧПУ.

Література.

1. *Скидан И.А.* Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: Автореф. дис…д-ра техн. наук: 05.01.01/Моск. автомоб.-дор. ин-т. - М., 1989. - 36 с.
2. *Коломієць О.А.* Математичні та комп'ютерні моделі поверхонь в спеціальних нормальних координатах: Автореф. дис…канд. техн. наук: 05.01.01/Донецький нац. техн. ун-т. – Донецьк, 2000. – 17 с.
3. *Звєрєва С.О.* Узгоджені конструктивні, аналітичні та комп'ютерні моделі поверхні: Автореф. дис…канд. техн. наук: 05.01.01/Донецький нац. техн. ун-т. – Донецьк, 2000. – 18 с.
4. *Гайдар О.Г.* Аналітичні моделі поверхонь на основі перетворень і тангенціальних рівнянь: Автореф. дис…канд. техн. наук: 05.01.01/Донецький нац. техн. ун-т. – Донецьк, 2002. – 18 с.
5. *Сименко О.В.* Аналітичні та комп'ютерно-графічні моделі нетрадиційних систем проекціювання та їхніх проекціювальних поверхонь: Автореф. дис…канд. техн. наук: 05.01.01/Донецький нац. техн. ун-т. – Донецьк, 2006. – 18 с.

SURFACES OF COORDINATE LINES CONGRUENCES OF TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEMS

I.SKIDAN, N.STREBIZSH

Summary

Surfaces of congruences which are generated by coordinate lines of a triply-orthogonal system are stadied. Conditions of coinciding coordinate lines with curvature lines for these surfaces are announced.