УДК 515.2

ПОВЕРХНІ В ЛІНІЯХ КРИВИНИ В ТРИОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВІ ПЛОСКИХ БІПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ

Стребіж Н.В., пошукувач
Горлівський автомобільно-дорожній інститут Державного вищого навчального закладу «Донецький національний технічний університет»
Тел.: (0624) 55-39-99

Анотація – **в триортогональних циліндричних і обертально-симетричних координатах, побудованих на основі плоских біполярних координат, розглядається формоутворення поверхонь, віднесених до ліній кривини.**

Ключові слова – **лінія кривини, триортогональна система, сферична крива, меридіан поверхні обертання.**

Постановка проблеми. Задача віднесення поверхні до ліній кривини, за умов, що вона представлена в довільній параметризації, не є елементарною, за нечисленними випадками. Оскільки формоутворення поверхонь за умов їх віднесення до ліній кривини представляє значний інтерес для розрахунку оболонок і для складання програм обробляння на обладнанні з ЧПУ, способи отримання таких поверхонь в такій параметризації є актуальними.

Аналіз останніх досліджень. Плоска біполярна система координат [1, 2, 3] утворюється двома пучками кіл: еліптичним і спряженим з ним гіперболічним (рис. 1, [3]), що утворюють двоортогональну систему. Кола еліптичного пучка проходять через дві точки на відстані 2*a* одна від іншої, пряма PP', що проходить через ці точки, є спільною радикальною віссю для будь-якої пари кіл еліптичного пучка. Пряма QQ', що проходить посередині між цими точками і перпендикулярна першій прямій, є радикальною віссю будь-якої пари гіперболічного пучка. Центри кіл еліптичного пучка належать QQ', центри кіл гіперболічного пучка належать PP'.

Плоскі біполярні координати вводяться функціями

$$x = \frac{a\,sh v}{ch v - \cos u}, y = \frac{a \sin u}{ch v - \cos u}, \qquad (1)$$

$-\pi \le u \le \pi, 0 \le v \le \infty.$

Геометрична сутність криволінійних координат:
u – кут, під яким видно відрізок, обмежений полюсами A, B;
e^v – відношення полярних радіусів поточної точки.

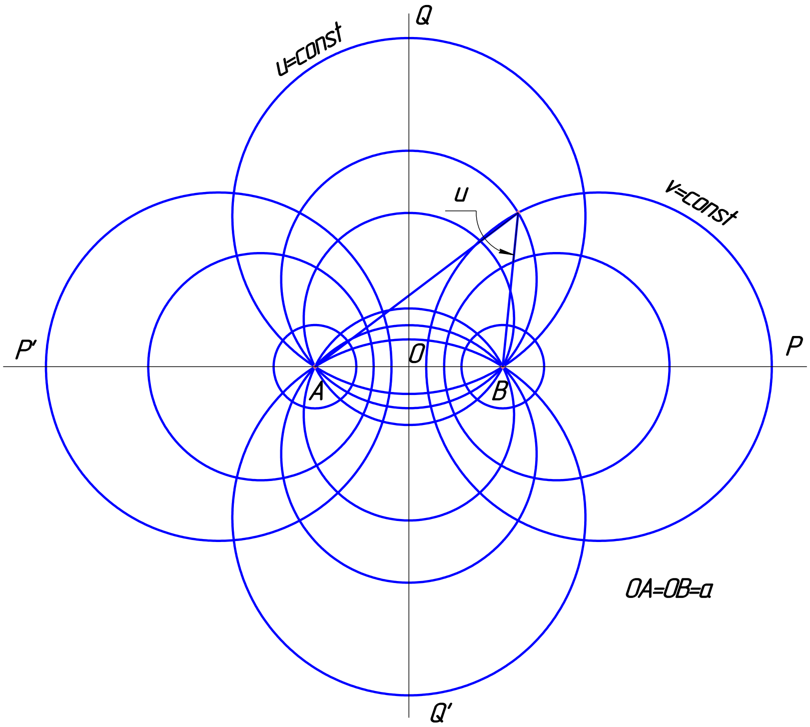

Рис. 1

Координатні лінії плоскої біполярної системи:

- u=const – кола з центрами на QQ' $(0, a\,ctg\,u)$ радіуса $\dfrac{a}{\sin u}$;
- v=const – кола з центрами на PP' $(a\,cth\,v, 0)$ радіуса $\dfrac{a}{sh\,v}$.

Триортогональні біциліндричні координати [3], які в [1] названі bipolarcylindrical, отримують паралельним перенесенням площини віднесення плоскої біполярної системи в напрямі *oz*.

$$x = \frac{a\,sh\,v}{ch\,v - \cos u}, y = \frac{a \sin u}{ch\,v - \cos u}, z = w,$$

$-\pi \le u \le \pi, 0 \le v \le \infty.$

Координатні поверхні:

- u=const – циліндри, основами яких слугують кола u=const плоскої системи (1);
- v=const – циліндри, основами яких слугують кола v=const плоскої системи (1);
- w=const – площини, перпендикулярні *oz*.

Триортогональні тороідальні координати [1, 2, 3] отримують обертанням пучків кіл навколо осі QQ' (рис. 1) на кут w

$$x = \frac{a\,sh\,v \cos w}{ch\,v - \cos u}, y = \frac{a\,sh\,v \sin w}{ch\,v - \cos u}, z = \frac{a \sin u}{ch\,v - \cos u}, \tag{2}$$

$-\pi \le u \le \pi, 0 \le v < \infty, 0 \le w < 2\pi.$

Координатні поверхні:

- u=const – сфери з центрами $(0,0,a\,ctg\,u)$ радіусів $\frac{a}{\sin u}$;

- v=const – торові області, отримані обертанням дуг кіл з центрами $(a\,cth\,v,0,0)$ радіусів $\frac{a}{sh\,v}$.

- w=const – півплощини пучка з віссю oz, нахилені до півплощини xoz під кутом w.

Функції залежності тороідальних координат від прямокутних декартових

$$u=\frac{i}{2}\ln\frac{x^2+y^2+(z-ia)^2}{x^2+y^2+(z+ia)^2}, v=\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}+a\right)^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2}, tg\,w=\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Триортогональні біполярні координати [2, 3], які в [1] названо бісферичними, отримують обертанням пучків кіл навколо осі PP', яку суміщають з віссю oz:

$$x=\frac{a\sin u\cos w}{ch\,v-\cos u}, y=\frac{a\sin u\sin w}{ch\,v-\cos u}, z=\frac{a\,sh\,v}{ch\,v-\cos u}, \tag{4}$$

$0\le u<\pi, -\infty<v<\infty, 0\le w<2\pi.$

Координатні поверхні:

- v=const – сфери з центрами $(0,0,a\,cth\,v)$ радіусів $\frac{a}{sh\,v}$;

- u=const – тори, отримані обертанням кіл з центрами $(0,a\,ctg\,u,0)$ радіусів $\frac{a}{\sin u}$;

- w=const – півплощини пучка з віссю oz, нахилені до півплощини xoz під кутом w.

Функції залежності біполярних координат від прямокутних декартових

$$v=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2+(z+a)^2}{x^2+y^2+(z-a)^2}, u=\frac{i}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-ia\right)^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+ia\right)^2+z^2}, tg\,w=\frac{y}{x}. \tag{5}$$

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Якщо застосування біциліндричних координат для формоутворення поверхонь, віднесених до ліній кривини, суто тривіальне, оскільки в цьому випадку йдеться лише про циліндричні поверхні, то тороідальні і біполярні координати можуть бути застосовані до класу поверхонь, привабливих з точки зору їх використання для конструювання і розрахунку складчастих оболонок.

Основна частина. Наведемо алгоритм формоутворення поверхонь в тороідальних і біполярних координатах за умов їх віднесення до ліній кривини.

Обидві системи триортогональні і до їх складу входить сім'я Ламе, що складається із сфер. Подання довільної лінії на будь-якій сфері сім'ї Ламе вилучає із конгруенції кіл, що є ортогональними траєкторіями сім'ї сфер, циклічну поверхню. Оскільки кола цієї поверхні ортогональні сфері-носію уздовж поданої лінії, яка в свою чергу є лінією кривини сфери, вона є лінією кривини і для вилученої циклічної поверхні. Сім'я ліній кривини отримується у перетині циклічного каркасу вилученої поверхні з сім'єю сфер. Таким чином, шукана поверхня має сім'ю ліній кривини із кіл і сферичних ліній.

Приклад 1. Сконструювати складчасту поверхню в тороідальних координатах і віднести її до ліній кривини.

Розв'язання. На сфері, параметричні рівняння якої отримаємо підстановкою u=u_0 до (2), подамо лінію внутрішнім рівнянням

$$v = v_0 + b\sin(nw) \qquad (6)$$

Параметричні рівняння цієї лінії отримаємо підстановками u_0 замість u і правої частини (6) замість v до (2):

$$x_0 = \frac{a\, sh[v_0 + b\sin(nw)]\cos w}{ch[v_0 + b\sin(nw)] - \cos u_0},\; y_0 = \frac{a\, sh[v_0 + b\sin(nw)]\sin w}{ch[v_0 + b\sin(nw)] - \cos u_0},$$
$$z_0 = \frac{a\sin u_0}{ch[v_0 + b\sin(nw)] - \cos u_0}, \qquad (7)$$

Оскільки внутрішнє рівняння (7) спільне для усіх сфер сім'ї u=const, воно виражає сім'ю сферичних ліній, якщо u_0 уявляти змінним. Тому сукупність рівнянь (2) і (6) виражає складчасту поверхню з n складок, віднесену до сітки ліній кривини u=const – сферичні лінії, w=const – кола.

На рис 2 показані ці поверхні, які відповідають значенням a=1, b=0.4, v_0=1.5, n=3, 4, 5, $0.45 \le u \le 1.57, 0 \le w < 2\pi$.

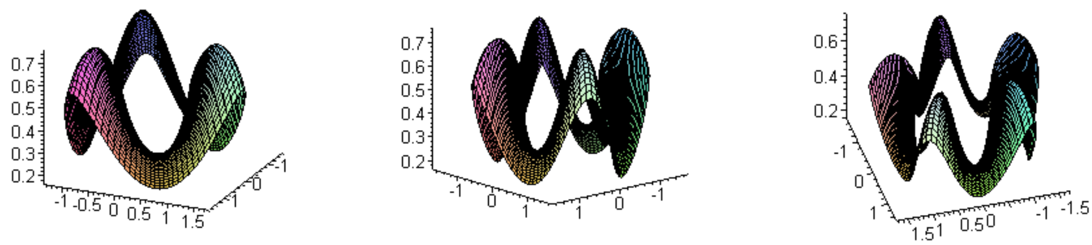

Рис. 2

Приклад 2. Сконструювати складчасту поверхню в просторових біполярних координатах і віднести її до ліній кривини.

Розв'язання. На сфері, параметричні рівняння якої отримуємо підстановкою $v = v_0$ до (5), подамо лінію внутрішнім рівнянням

$$u = u_0 + b\sin(nw) \qquad (8)$$

Параметричні рівняння цієї лінії отримаємо підстановкою v_0 замість v і правої частини (8) замість u до (4):

$$x_0 = \frac{a\sin[u_0 + b\sin(nw)]\cos w}{ch\,v - \cos[u_0 + b\sin(nw)]},\quad y_0 = \frac{a\sin[u_0 + b\sin(nw)]\sin w}{ch\,v - \cos[u_0 + b\sin(nw)]},$$
$$z_0 = \frac{a\,sh\,v}{ch\,v - \cos[u_0 + b\sin(nw)]}, \qquad (9)$$

Будуємо поверхню за формулами (4), (8). На рис. 3 показано поверхню, що відповідає значенням a=1, b=0.2, u_0=0.45, n=4, $0 \le w < 2\pi$.

Ліворуч показано поверхню з межами $0.45 \le v \le 1.57$, праворуч – з межами $0.2 \le v \le 1$.

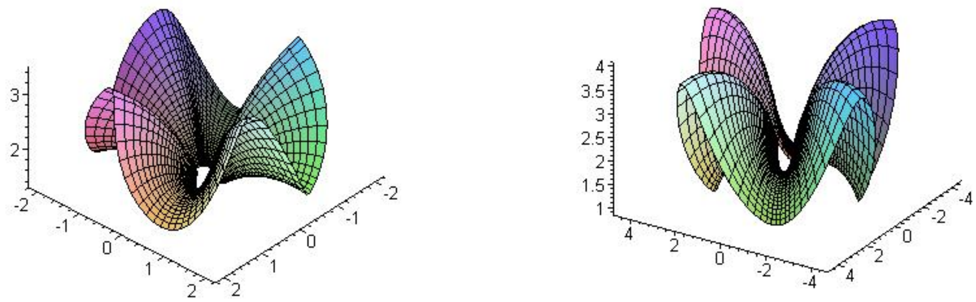

Рис. 3

Висновки. Запропонований спосіб конструювання поверхні в тороідальних і біполярних координатах зводиться до подання лінії на координатній сфері, що забезпечує спеціальну параметризацію поверхні в лініях кривини.

Література.

1. *Spiegel, Murrey R.* "Mathematical Handbook of Formulas and Tables" New York: McGraw Hill Book Company, 1968, 126-30
2. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики М.: Госиздат физ.-мат. лит-ры. 1961. – 618 с.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: "Наука", 1973. – 831 с.

SURFACES IN LINES OF CURVATURE IN TRIPLY-ORTHOGONAL SYSTEMS BASED ON PLANE BIPOLAR COORDINATES

N.STREBIZSH

Summary

The representation of surfaces in lines of curvature using bipolar and toroidal coordinates is proposed.