УДК 621.311

И.В. ЖЕЖЕЛЕНКО (д-р техн.наук, проф.), **Ю.Л. САЕНКО** (д-р техн.наук, проф.), **А.М. ХОЛЬКИН**
Приазовский государственный технический университет
zhezhelenko@pstu.edu; sayenko_y_l@pstu.edu; kholkin@pstu.edu

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВХОДНОГО ТОКА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ СО ЗВЕНОМ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Convergence of Fourier series obtained in result of series expansion of the input current of frequency converter and pulsating current in DC link is studied. Uniform convergence one whole number axis of these series and their product is proved. Therefore, applying of harmonic analysis for estimating current and voltage composition of frequency converters is verified.

В системах электроснабжения современных промышленных предприятий в настоящее время интенсивно внедряется частотный элетропривод с применением тиристорных преобразователей частоты со звеном постоянного тока. Преимуществом таких преобразователей является возможность регулирования скорости вращения электропривода в широком диапазоне. Этот преобразователь представляет собой выпрямитель с последовательно включенным инвертором. Недостатком применения преобразователя частоты являются вносимые в сеть искажения напряжения и тока. С целью снижения негативного влияния на питающую сеть между инвертором и выпрямителем включают сглаживающие фильтр-индуктивность и (или) емкость.

Одним из наиболее широко распространенных методов расчета и анализа режимов работы преобразователей частоты является гармонический анализ, заключающийся в разложении токов и напряжений в ряд Фурье [1, 2].

Известно, что входной ток преобразователя частоты со звеном постоянного тока может быть получен произведением коммутационной функции, разложение которой имеет вид [3, 4]

$$\sin\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin(6n-1)\omega t}{6n-1}+\frac{\sin(6n+1)\omega t}{6n+1}\right) \tag{1}$$

и тока пульсаций в звене постоянного тока преобразователя

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 6n\ \omega t}{(6n-1)(6n+1)} \tag{2}$$

В связи с этим возникает важный с точки зрения математического анализа вопрос о корректности используемых подходов для решения поставленной задачи, связанный с исследованием сходимости рядов (1) и (2), а также их произведения.

В настоящей статье рассмотрено доказательство сходимости указанных рядов и их произведения, а следовательно, и правомерность применения гармонического анализа при исследовании режимов частотного электропривода.

1. На множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$ функциональный ряд (2) мажорируется сходящимся числовым рядом, поэтому функциональный ряд (2) равномерно сходится для всех $t\in\mathbb{R}$, при этом он является абсолютно сходящимся.

Если при некотором значении t сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(6n-1)\omega t}{6n-1},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(6n+1)\omega t}{6n+1} \tag{3-4}$$

то при этом же значении t будет сходиться и ряд (1).

Рассмотрим функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n(t)$ и исследуем его сходимость, используя для этого признак Дирихле [5], [6]

Пусть в этом ряде последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет признаку Дирихле, т.е. монотонно убывает и стремится к нулю. Положив $\beta_n(t)=(-1)^n\sin(6n-1)\omega t$, получим ряд более общего вида, чем ряд (3), а именно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \alpha_n \sin(6n-1)\omega t. \tag{5}$$

Предположим сначала, что $\cos 3\omega t \neq 0$, т.е. $3\omega t \neq \frac{\pi}{2}+\pi m$, $t \neq \frac{\pi}{6\omega}(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Обозначим $V_{m,\delta}$ окрестность точки $t_m = \frac{\pi}{6\omega}(2m+1)$, в которой выполняется неравенство $|\cos 3\omega t| \leq \delta$, где δ – достаточно малое положительное число.

Докажем, что частичные суммы $S_n(t)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(6n-1)\omega t$ при всех n и $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} V_{m,\delta}\right\} = \mathbb{R}_\delta$ равномерно ограничены. Действительно, при $t \in \mathbb{R}_\delta$

$$|S_n(t)| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin(6k-1)\omega t\right| = \left|\frac{1}{\cos 3\omega t}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin(6k-1)\omega t \cos 3\omega t\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\cos 3\omega t}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\sin(6k+2)\omega t + \sin(6k-4)\omega t\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2|\cos 3\omega t|}\Big|-(\sin 8\omega t + \sin 2\omega t) + (\sin 14\omega t + \sin 8\omega t) -$$

$$-(\sin 20\omega t + \sin 14\omega t) + \ldots + (-1)^n\left(\sin(6n+2)\omega t + \sin(6n-4)\omega t\right)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2|\cos 3\omega t|}\left|-\sin 2\omega t + (-1)^n \sin(6n+2)\omega t\right| \leq \frac{1}{2|\cos 3\omega t|}\left(|\sin 2\omega t| + |\sin(6n+2)\omega t|\right) \leq \frac{1}{|\cos 3\omega t|}.$$

Итак, $|S_n(t)| \leq \frac{1}{|\cos 3\omega t|} \leq \frac{1}{\delta} = \mathrm{M}$ при всех n и $t \in \mathbb{R}_\delta$, т.е. частичные суммы ряда равномерно ограничены. Поэтому на основании признака Дирихле ряд (5) при условии, что последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонно убывает и стремится к нулю, равномерно сходится при всех $x \in \mathbb{R}_\delta$. Сходимость ряда (5) при $t \in V_{m,\delta}$ для различных случаев α_n исследуется в зависимости от этого коэффициента. Например, при $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ или $\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ ряд (5) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ при всех $t \in \mathbb{R}$, поэтому функциональный ряд равномерно сходится на всей числовой оси.

Рассмотрим случай, когда $\alpha_n = \frac{1}{6n-1}$. Последовательность $\left\{\frac{1}{6n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6n-1} = 0$, поэтому ряд (3) равномерно сходится при всех $t \in \mathbb{R}_\delta$. Исследуем сходимость этого ряда при $t_m = \frac{\pi}{6\omega}(2m+1)$. В этом случае

$$\sin(6n-1)\frac{\pi}{6}(2m+1) = (-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{6}(2m+1)$$

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(6n-1)\omega t}{6n-1}\right|_{t=\frac{\pi}{6\omega}(2m+1)} = -\sin\frac{\pi}{6}(2m+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n-1}.$$

Таким образом, ряд (3) при $t_m = \frac{\pi}{6m}(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$ расходится.

Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда (4) при всех $t \in \mathbb{R}_\delta$. При $t_m = \frac{\pi}{6m}(2m+1)$ ряд (4) расходится.

Т.к. ряды (3) и (4) равномерно сходятся при всех $t \in \mathbb{R}_\delta$, то ряд (1) также равномерно сходится при всех этих значениях t. Покажем, что ряд (1) сходится при значениях $t_m = \frac{\pi}{6m}(2m+1), \quad m \in \mathbb{Z}$, а поэтому по непрерывности равномерно сходится в некоторой достаточно малой окрестности этой точки, т.е. в каждой окрестности $V_{m,\delta}, \ m \in \mathbb{Z}$. Отсюда будет следовать, что ряд (1) равномерно сходится на всей числовой оси.

Действительно, при $t_m = \frac{\pi}{6m}(2m+1), \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin(6n-1)\omega t}{6n-1}+\frac{\sin(6n+1)\omega t}{6n+1}\right)_{t=\frac{\pi}{6\omega}(2m+1)} = \sin\frac{\pi}{6}(2m+1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^{n+1}}{6n-1}+\frac{(-1)^n}{6n+1}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{6}(2m+1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6n+1}-\frac{1}{6n-1}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6}(2m+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36n^2-1}.$$

Последний ряд сходится.

2. Рассмотрим два числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Определим произведение этих рядов по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1\right) \tag{6}$$

Такое произведение числовых рядов в литературе [5], [6] называется **произведением Коши.** Известно, что, если перемножаемые ряды сходятся и при этом хотя бы один из них сходится абсолютно, то сходится и ряд в правой части формулы (6), при этом справедлива формула (6). Произведение условно сходящихся рядов может оказаться либо рядом сходящимся (и тогда справедлива формула (6)), либо расходящимся.

При любом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ каждый из рядов (1) и (2) является числовым сходящимся, кроме того, ряд (2) сходится абсолютно, поэтому произведение этих рядов по Коши при фиксированном t является сходящимся рядом. Таким образом, для произведения по Коши рядов (1) и (2) устанавливается поточечная сходимость при любом $t \in \mathbb{R}$.

Определим иначе произведение тригонометрических рядов (1) и (2) – произведение рядов по Фурье, и докажем равномерную сходимость при всех $t \in \mathbb{R}$ для ряда произведения.

Пусть даны два равномерно сходящихся на всей числовой оси ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(a_n \sin(6n-1)\omega t + b_n \sin(6n+1)\omega t\right) \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} c_n \cos 6n\omega t \tag{8}$$

Для рядов (1) и (2) имеем:

$$a_0 = -\frac{1}{2};\ b_0 = \frac{1}{2};\ a_n = \frac{1}{6n-1};\ b_n = \frac{1}{6n+1};\ c_0 = -\frac{1}{2};\ c_n = \frac{1}{(6n-1)(6n+1)}. \tag{9}$$

Рассмотрим формально произведение рядов (7) и (8)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,m=0}^{\infty}(-1)^{k+m+1}\left(a_k c_m \sin(6k-1)\omega t\cdot\cos 6m\,\omega t + b_k c_m \sin(6k+1)\omega t\cdot\cos 6m\,\omega t\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,m=0}^{\infty}(-1)^{k+m+1}\left(a_k c_m\left(\sin(6k-6m-1)\omega t + \sin(6k+6m-1)\omega t\right) + \right. \\
&\qquad \left. + b_k c_m\left(\sin(6k-6m+1)\omega t + \sin(6k+6m+1)\omega t\right)\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Видим, что произведение рядов является рядом вида (7), т.е. его можно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(d_n \sin(6n-1)\omega t + e_n \sin(6n+1)\omega t\right) \tag{11}$$

Такое произведение рядов (7) и (8) назовем **произведением по Фурье**. Т.к. последовательности $\{\sin(6n-1)\omega t\}$ и $\{\sin(6n+1)\omega t\}$ линейно независимы, то коэффициенты при одинаковых функциях в формулах (10) и (11) будут равны.

Найдем коэффициенты d_n и e_n. Приравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$, т.е при $n=0$, в формуле (11) найдем коэффициент e_0-d_0:

$$e_0-d_0=\frac{1}{2}\left(a_0c_0-b_0c_0\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k-b_k\right)c_k=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_0-b_0\right)c_0+\frac{1}{2}\left(a_0-b_0\right)c_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k-b_k\right)c_k=\left(a_0-b_0\right)c_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k-b_k\right)c_k$$

Для рядов (1) и (2) эта формула принимает вид

$$e_0-d_0=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(6k-1)^2(6k+1)^2}.$$

Более подробно покажем, как находятся коэффициенты d_n, e_n при произвольном натуральном n. Для этого необходимо будет найти целочисленные решения нескольких уравнений.

Приравнивая коэффициенты при первом слагаемом в формуле (10), получаем два уравнения

$$6k-6m-1=6n-1,\quad 6k-6m-1=-6n+1,\quad k,m,n\in N,\quad k=0,\quad m=0.$$

Второе уравнение целочисленных решений не имеет. Первое уравнение принимает вид $k-m=n$, $m=k-n$. Это уравнение имеет целочисленные решения при произвольном $k\geq n$. Коэффициент при $\sin(6n-1)\omega t$ в первом слагаемом формулы (10) будет иметь вид

$$\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty}a_kc_{k-n}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+n}c_k.$$

Аналогично, приравнивая коэффициенты при остальных слагаемых в формуле (10) и при $\sin(6n-1)\omega t$ в формуле (11), получим

$$(-1)^n d_n=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+n}c_k-\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kc_{k+n}+\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}$$

$$d_n=-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{k+n}c_k-b_kc_{k+n}\right)+\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}\right].$$

$$d_n=-\frac{1}{2}\left[\left(2a_nc_0+a_0c_n-b_0c_n\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{k+n}c_k-b_kc_{k+n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}a_kc_{n-k}\right].$$

Для рядов (1) и (2) коэффициенты определяются формулой (9), поэтому

$$d_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(6k-1)(6n-6k-1)(6n-6k+1)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(6k+6n-1)(6k-1)(6k+1)}-\frac{1}{(6k+1)(6k+6n-1)(6k+6n+1)}\right)\right].$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$d_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(6k-1)(6k+1)(6n-6k-1)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6n+2}{(6k-1)(6k+1)(6k+6n-1)(6k+6n+1)}\right)\right].$$

Аналогично выводится формула для e_n, $n\geq 1$

$$e_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6n+1}-\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(6k-1)(6k+1)(6n-6k+1)}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6n-2}{(6k-1)(6k+1)(6k+6n-1)(6k+6n+1)}\right)\right] \qquad (12)$$

Упростим эти формулы. Для этого каждую из дробей под знаком сумм методом неопределенных коэффициентов разложим на простейшие

$$d_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}-\frac{1}{12n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+1}+\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+6n-1}-\frac{1}{6k+6n+1}\right)\right]\right\}. \qquad (13)$$

Упростим выражение в квадратной скобке, использовав при этом определение суммы ряда. Это выражение можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+6n-1}-\frac{1}{6k+6n+1}\right)\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+1}\right)+\sum_{k=n+1}^{N+n}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)\right]=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+1}\right)+\sum_{k=1}^{N+n}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right]$$

Каждую из сумм разобьем на три суммы, как это записано ниже

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+n}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+1}\right)-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{N+n}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+n}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{N+n}\left(\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right]$$

Сгруппируем теперь первую и пятую суммы, вторую и четвертую, третью и шестую:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{6n+2}{6n-2}\right)\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{6n+2}{6n-2}\right)\sum_{k=1}^{N+n}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{6n+2}{6n-2}-1\right)\sum_{k=N+1}^{N+n}\left(\frac{1}{6k-1}+\frac{1}{6k+1}\right)-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right]=$$
$$=\frac{6n}{6n-2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)+\frac{6n}{6n-2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6k-1}-\frac{1}{6k+1}\right)-\frac{6n+2}{6n-2}\cdot\frac{1}{6n-1}+ \qquad (14)$$
$$+\frac{1}{6n+1}+\frac{2}{6n-2}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=N+1}^{N+n}\left(\frac{1}{6k-1}+\frac{1}{6k+1}\right)$$

Последнее равенство является справедливым, если будет доказано, что существует конечный последний предел.

Аналогично тому, как при доказательстве интегральной теоремы Коши для знакоположительного ряда, можно показать, что, если последовательность $\{\alpha_k\}, \alpha_k > 0$ монотонно убывает и $f(x)$ – непрерывная монотонно убывающая функция такая, что $f(k) = \alpha_k$, то справедливо неравенство:

$$\sum_{k=N+1}^{N+n} \alpha_k < \alpha_{N+1} + \int_{N+1}^{N+n} f(x)\,dx.$$

В данном случае это неравенство принимает вид

$$0 < \sum_{k=N+1}^{N+n}\left(\frac{1}{6k-1}+\frac{1}{6k+1}\right) < \frac{1}{6N+5}+\frac{1}{6N+7}+\int_{N+1}^{N+n}\left(\frac{1}{6x-1}+\frac{1}{6x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{6N+5}+\frac{1}{6N+7}+\frac{1}{6}\ln(6x-1)(6x+1)\Big|_{N+1}^{N+n} =$$

$$= \frac{1}{6N+5}+\frac{1}{6N+7}+\frac{1}{6}\ln\frac{(6(N+n)-1)(6(N+n)+1)}{(6(N+1)-1)(6(N+1)+1)} \to 0$$

при $N \to \infty$.

Таким образом, предел в формуле (14) существует и равен 0, формула (14) справедлива, а формула (13) принимает вид

$$d_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}-\frac{2}{6n-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(6k-1)(6k+1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{6n+2}{12n(6n-2)(6n-1)}-\frac{1}{12n(6n+1)}\right] \qquad (15)$$

Ряд в формуле (15) сходится. Найдем сумму этого ряда, используя разложение в ряд Фурье функции $f(x) = \cos x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$:

$$\cos x = \frac{3}{\pi}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(6k-1)(6k+1)}\cos 6kx, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right].$$

Подставим в обе части $x = \frac{\pi}{6}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\pi}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(6k-1)(6k+1)}\cdot(-1)^k$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\pi}-\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(6k-1)(6k+1)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(6k-1)(6k+1)} = \frac{6-\sqrt{3}\pi}{12}.$$

Окончательно формула для вычисления d_n принимает вид:

$$d_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6n-1}-\frac{6-\sqrt{3}\pi}{6}\cdot\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}+\frac{6n+2}{12n(6n-2)(6n-1)}-\frac{1}{12n(6n+1)}\right] \qquad (16)$$

Аналогично из формулы (12) получаем e_n:

$$e_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6n+1}-\frac{6-\sqrt{3}\pi}{6}\cdot\frac{1}{6n+2}-\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}-\frac{6n-2}{12n(6n+2)(6n+1)}+\frac{1}{12n(6n-1)}\right] \qquad (17)$$

Очевидно, что $d_n \to 0$, $e_n \to 0$ при $n \to \infty$. Строгая монотонность d_n и e_n доказывается значительно более громоздко, поэтому ограничимся только схемой доказательства. Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ такую, что $\varphi(n) = d_n$. Если привести все дроби к общему знаменателю, то получим

$$\varphi(x)=\frac{\alpha x^3+\ldots}{5184\left(x^4+\ldots\right)},$$

где коэффициент $\alpha>0$ в силу того, что $\frac{6-\sqrt{3}}{6}<1$ (в числителе и знаменателе записаны только старшие степени x, а остальные заменены многоточием). Тогда

$$\varphi'(x)=\frac{1}{5184}\cdot\frac{-\alpha x^6+\ldots}{\left(x^4+\ldots\right)^2}$$

(здесь опять выписаны только старшие степени). При достаточно больших значениях x $\varphi'(x)<0$, поэтому функция $\varphi(x)$ монотонно убывает. Таким образом, коэффициенты d_n (аналогично e_n) убывают, начиная с некоторого номера, но конечное число членов ряда на сходимость не влияет. Следовательно, подобно тому, как для ряда (5), имеем, что ряд (11) равномерно сходится при всех $x\in\mathbb{R}_\delta$. Докажем, сходимость ряда (11) в точках $t_m=\frac{\pi}{6\omega}(2m+1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(d_n\sin(6n-1)\omega t+e_n\sin(6n+1)\omega t\right)\Big|_{t_m=\frac{\pi}{6\omega}(2m+1)}=\sin\frac{\pi}{6}(2m+1)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e_n-d_n\right) \qquad (18)$$

В силу формул (16) и (17) имеет:

$$e_n-d_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6n+1}-\frac{1}{6n-1}\right)-\frac{2}{(6n-1)(6n+1)}-\frac{6-\sqrt{3}\pi}{6}\left(\frac{1}{6n+2}-\frac{1}{6n-2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right)-\frac{1}{12n}\left(\frac{6n-2}{(6n+2)(6n+1)}+\frac{6n+2}{(6n-2)(6n-1)}\right)\right]$$

Таким образом, $e_n-d_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ и поэтому ряд (18) сходится. По непрерывности ряд сходится в некоторой достаточно малой окрестности точки $t_m=\frac{\pi}{6\omega}(2m+1)$, т.е. в окрестности $\mathrm{V}_{m,\delta}$, а поэтому ряд (11) равномерно сходится на всей числовой оси, что подтверждает корректность применения разложения в ряд Фурье при анализе спектрального состава токов и напряжений преобразователей частоты.

Список литературы

1. Жежеленко И.В. Качество электроэнергии на промышленных предприятиях / И.В.Жежеленко, Ю.Л.Саенко.– М. Энергоатомиздат, 2005. – 261 с.
2. Жежеленко И.В. Избранные вопросы несинусоидальных режимов в электрических сетях / И.В.Жежеленко, Ю.Л.Саенко, Т.И.Бараненко и др. – М. Энергоатомиздат, 2007. – 296 с.
3. Жежеленко И.В. Оценка гармоник сетевого тока преобразователей частоты со звеном постоянного тока / И.В.Жежеленко, Ю.Л.Саенко, Н.А.Барвинский // Промислова електроенергетика та електротехніка (Промелектро), 2007. – № 2.– С.22–24.
4. Францковяк Л. Интергармоники сетевого тока преобразователей частоты со звеном постоянного тока / Л.Францковяк, И.В.Жежеленко, Ю.Л.Саенко и др. // Промислова електроенергетика та електротехніка (Промелектро), 2006. – № 3.– С.17–22.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.II / Г.М.Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 864 с.
6. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А.Шмелев.– М.: В.ш., 1983. – 176 с.

Надійшла до редколегії 06.04.2009 *Рецензент: В.Ф.Сивокобиленко*

И.В. ЖЕЖЕЛЕНКО, Ю.Л. САЕНКО, А.М. ХОЛЬКИН
Приазовский государственный технический университет

Математический аспект гармонического анализа входного тока преобразователей со звеном постоянного тока. В данной статье приведен метод расчета и гармонического анализа для преобразователей частоты, заключающийся в разложении токов и напряжений в ряд Фурье.
Математика, аспект, гармонический анализ, входной ток, преобразователь.

І.В. ЖЕЖЕЛЕНКО, Ю.Л. САЄНКО, О.М. ХОЛЬКІН
Приазовський державний технічний університет

Математичний аспект гармонійного аналізу вхідного струму перетворювачів із ланкою постійного струму. В статті представлений метод розрахунку і гармонійного аналізу частоти, який полягає в розкладанні струмів напруг в ряд Фур'є.
Математика, аспект, гармонический анализ, вхідний струм, перетворювач.