

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНИЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»
М. М. Чальцев
01.03.2012р.

Кафедра «Загальнонаукові дисципліни»

**МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ЗАГАЛЬНОГО КУРСУ ФІЗИКИ
ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 0701 «ТРАНСПОРТ І ТРАНСПОРТНА
ІНФРАСТРУКТУРА» ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ
НАВЧАННЯ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ – 6.070106
«АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»**

15/42–2012–13

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична
комісія факультету
«Автомобільний транспорт»
Протокол № 4 від 20.12.2011

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра «Загальнонаукові дисципліни»
Протокол № 4 від 01.12.2011р.

УДК 538 (07)

Методичний посібник та контрольні завдання з загального курсу фізики галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура» для студентів заочної форми навчання напряму підготовки – 6.070106 «Автомобільний транспорт», [Електронний ресурс] / укладач : А. М. Галіахметов. – Електрон. дані. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-R); 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 Mb RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 2000. – Назва з титул. екрану.

Наведено основні формули, методичні вказівки до розв'язку задач та приклади їх розв'язку, контрольні завдання та довідкові таблиці.

Укладач: Галіахметов А. М., к.ф. – м. н., доц.

Відповідальний за випуск: Галіахметов А. М., к.ф. – м. н., доц.

Рецензент: Сирота В. М., к.т.н., доц.
каф. «Технічна експлуатація автомобілів»

© Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут, 2012

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
РОБОЧА ПРОГРАМА ЗАГАЛЬНОГО КУРСУ ФІЗИКИ	5
ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ	11
1 ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ	13
1.1 Основні формули	13
1.2 Методичні вказівки до розділу «Фізичні основи класичної механіки»	19
1.3 Приклади розв'язання задач	21
1.4 Контрольна робота № 1	35
2 МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕРМОДИНАМІКА	45
2.1 Основні формули	45
2.2 Методичні вказівки до розділу «Молекулярна фізика. Термодинаміка»	51
2.3 Приклади розв'язання задач	52
2.4. Контрольна робота № 2	63
3 ЕЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ	71
3.1 Основні формули	71
3.2 Методичні вказівки до розділу «Електростатика. Постійний електричний струм»	77
3.3 Приклади розв'язання задач	78
3.4 Контрольна робота № 3	101
4 ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ	112
4.1 Основні формули	112
4.2 Методичні вказівки до розділу «Електромагнетизм»	116
4.3 Приклади розв'язання задач	118
4.4 Контрольна робота № 4	144
5 ОПТИКА	155
5.1 Основні формули	155
5.2 Методичні вказівки до розділу «Оптика»	160
5.3 Приклади розв'язання задач	161
5.4 Контрольна робота № 5	174
6 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ ТА КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ. ФІЗИКА ТВЕРДОГО ТІЛА	183
6.1 Основні формули	183
6.2 Методичні вказівки до розділу «Елементи атомної фізики та квантової механіки. Фізика твердого тіла»	189
6.3 Приклади розв'язання задач	189
6.4 Контрольна робота № 6	202
ДОДАТОК А	210
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	218

ПЕРЕДМОВА

Необхідною умовою розуміння фізичних законів є грамотне застосування їх під час розв'язку задач. Основна мета цього навчально-методичного посібника – надати допомогу студентам-заочникам факультету «Автомобільний транспорт» під час самостійного рішення задач загального курсу фізики.

Основний навчальний матеріал програми курсу в посібнику розподілений на шість розділів. Передбачається, що, працюючи з даним посібником, читач буде користуватися рекомендованою літературою загального курсу фізики. Тому, на початку кожного розділу розташований лише короткий перелік формул, пов'язаних з рішенням задач, які наведені у даному розділі.

Слідом за списком формул поміщені методичні вказівки до розв'язку задач на тему даного розділу. В методичних вказівках наводяться методи та приклади розв'язання конкретних задач. При цьому, акцент зроблено на фізичному боці питання, перевірці розмірності кінцевих формул, методах обчислення. Далі наводяться варіанти контрольних завдань.

Робочими програмами спеціальності АТР передбачені три контрольні роботи:

- КР № 1 «Фізичні основи класичної механіки» та «Молекулярна фізика. Термодинаміка»;
- КР № 2 «Електростатика. Постійний електричний струм» та «Електромагнетизм»;
- КР № 3 «Оптика» та «Елементи атомної фізики та квантової механіки. Фізика твердого тіла».

Робочими програмами спеціальності АТР (ПР) передбачені чотири контрольні роботи:

- КР № 1 «Фізичні основи класичної механіки»;
- КР № 2 «Молекулярна фізика. Термодинаміка»;
- КР № 3 «Електростатика. Постійний електричний струм» та «Електромагнетизм»;
- КР № 4 «Оптика» та «Елементи атомної фізики та квантової механіки. Фізика твердого тіла».

Для кожної спеціальності викладачі визначають правила вибірки номерів задач з наведених у посібнику таблиць варіантів завдань.

РОБОЧА ПРОГРАМА ЗАГАЛЬНОГО КУРСУ ФІЗИКИ

У цьому розділі наведемо робочу програму загального курсу фізики, щодо галузі знань 0701 «Транспорт і транспортна інфраструктура» для студентів заочної форми навчання напряму підготовки – 6.070106 «Автомобільний транспорт».

Фізичні основи класичної механіки

Механічний рух як найпростіша форма руху матерії. Уявлення про властивості простору й часу, що лежать в основі класичної (ньютонівської) механіки. Елементи кінематики матеріальної точки. Швидкість і прискорення точки як похідні радіуса-вектора за часом. Нормальне та тангенціальне прискорення. Радіус кривизни траєкторії. Поступальний рух твердого тіла.

Динаміка матеріальної точки й поступального руху твердого тіла. Закон інерції й інерціальні системи відліку. Закони динаміки матеріальної точки й системи матеріальних точок. Зовнішні та внутрішні сили. Центр мас (центр інерції) механічної системи та закон його руху. Закон збереження імпульсу.

Енергія як універсальна міра різних форм руху й взаємодії. Робота змінної сили. Кінетична енергія механічної системи та її зв'язок з роботою зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до системи.

Поле як форма матерії, що здійснює силову взаємодію між частинками речовини. Потенційна енергія матеріальної точки в зовнішньому силовому полі та її зв'язок з силою, що діє на матеріальну точку. Поняття про градієнт скалярної функції координат. Поле центральних сил. Потенційна енергія системи. Закон збереження механічної енергії. Дисипація енергії. Закон збереження й перетворення енергії як прояв незнищенності матерії та її руху. Застосування законів збереження до зіткнення пружних і не пружних тіл.

Елементи кінематики обертального руху. Кутова швидкість і кутове прискорення, їх зв'язок з лінійними швидкостями та прискореннями точок тіла, що обертаються. Момент сили й момент імпульсу механічної системи. Момент сили відносно осі. Момент імпульсу тіла відносно нерухомої осі обертання. Момент інерції тіла відносно осі. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі. Кінетична енергія тіла, що обертається. Закон збереження моменту імпульсу та його зв'язок з ізотропністю простору. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції.

Елементи спеціальної (приватної) теорії відносності

Перетворення Галілея. Механічний принцип відносності. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца. Поняття одночасності. Відносність довжин і проміжків часу. Інтервал між подіями та його інваріантність по відношенню до вибору інерціальної системи відліку як

прояв взаємозв'язку простору й часу. Релятивістський закон додавання швидкостей. Релятивістський імпульс. Основний закон релятивістської динаміки матеріальної точки. Релятивістський вираз для кінетичної енергії. Взаємозв'язок маси й енергії. Енергія зв'язку системи. Співвідношення між повною енергією та імпульсом частинки. Межі застосування класичної (ньютонівської) механіки.

Механічні коливання й хвилі в пружних середовищах

Гармонійні механічні коливання. Кінематичні характеристики гармонійних коливань. Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Пружинний, фізичний і математичний маятники. Енергія гармонічних коливань. Додавання гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти. Биття. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Диференціальне рівняння затухаючих коливань і його рішення. Аперіодичний процес. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його рішення. Амплітуда зміщення й фаза вимушених коливань. Поняття про резонанс.

Хвильові процеси. Механізм утворення механічних хвиль в пружному середовищі. Поздовжні й поперечні хвилі. Синусоїдальні (гармонійні) хвилі. Рівняння біжучої хвилі. Довжина хвилі й хвильове число. Хвильове рівняння. Фазова швидкість і дисперсія хвиль. Енергія хвилі. Принцип суперпозиції хвиль і межі його застосовності. Хвильовий пакет. Групова швидкість. Когерентність.

Інтерференція хвиль. Утворення стоячих хвиль. Рівняння стоячої хвилі та його аналіз.

Основи молекулярної фізики й термодинаміки

Статистичний та термодинамічний метод дослідження. Термодинамічні параметри. Рівноважні стани й процеси, їх зображення на термодинамічних діаграмах. Виведення рівняння молекулярно – кінетичної теорії ідеальних газів для тиску та його порівняння з рівнянням Менделєєва – Клапейрона. Середня кінетична енергія молекул. Молекулярно-кінетичне тлумачення термодинамічної температури. Число ступенів свободи молекули. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи молекул. Внутрішня енергія ідеального газу. Робота газу при зміні його об'єму. Кількість теплоти. Теплоємність. Перший закон термодинаміки. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів та адіабатного процесу ідеального газу. Залежність теплоємності ідеального газу від виду процесу. Класична молекулярно-кінетична теорія теплоємностей ідеальних газів та її обмеженість.

Закон Максвелла для розподілу молекул ідеального газу за швидкостями й енергіями теплового руху. Барометрична формула. Закон Больцмана для розподілу частинок у зовнішньому потенціальному полі. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул. Час релакса-

ції. Явища переносу у термодинамічно нерівноважних системах. Дослідні закони дифузії, теплопровідності та внутрішнього тертя. Молекулярно-кінетична теорія цих явищ.

Зворотні й незворотні процеси. Круговий процес (цикл). Теплові двигуни й холодильні машини. Цикл Карно та його ККД для ідеального газу. Другий закон термодинаміки. Незалежність ККД циклу Карно від природи робочого тіла. Ентропія. Ентропія ідеального газу. Статистичне тлумачення другого закону термодинаміки.

Відхилення від законів ідеальних газів. Реальні гази. Сили і потенціальна енергія міжмолекулярної взаємодії. Ефективний діаметр молекул. Рівняння Ван-дер-Ваальса. Порівняння ізотерм Ван-дер-Ваальса з експериментальними. Фазові переходи I і II роду. Критичний стан. Внутрішня енергія реального газу. Особливості рідкого й твердого станів речовини.

Електростатика

Закон збереження електричного заряду. Електричне поле. Основні характеристики електростатичного поля – напруженість і потенціал. Напруженість як градієнт потенціалу. Розрахунок електростатичних полів методом суперпозиції. Потік вектора напруженості. Теорема Остроградського – Гаусса для електростатичного поля у вакуумі. Застосування теореми Остроградського – Гаусса до розрахунку поля. Електричне поле в речовині. Вільні та пов'язані заряди в діелектриках. Типи діелектриків. Електронна та орієнтаційна поляризація. Поляризованність. Діелектрична сприйнятність. Електричне зміщення. Діелектрична проникність середовища. Обчислення напруженості поля в діелектрику. Сегнетоелектрики. Провідники в електричному полі. Поле всередині провідника й біля його поверхні. Розподіл зарядів у провіднику. Електроємність відокремленого провідника. Взаємна ємність двох провідників. Конденсатори. Енергія заряджених провідника, конденсатора й системи провідників. Енергія електростатичного поля. Об'ємна густина енергії.

Постійний електричний струм

Постійний електричний струм, його характеристики й умови існування. Класична електронна теорія електропровідності металів та її дослідне обґрунтування. Виведення закону Ома в диференціальній формі з електронних уявлень. Закон Відемана – Франца. Закон Ома в інтегральній формі. Різниця потенціалів, електрорушійна сила, напруга. Труднощі класичної теорії електропровідності металів. Межі застосовності закону Ома. Струм у газах. Плазма. Робота виходу електронів з металу. Термоелектронна емісія.

Електромагнетизм

Магнітне поле. Магнітна індукція. Закон Ампера. Магнітне поле струму. Закон Біо – Савара-Лапласа та його застосування до розрахунку магнітного поля. Магнітне поле прямолінійного провідника зі струмом.

Магнітне поле кругового струму. Магнітний момент витка зі струмом. Вихровий характер магнітного поля. Закон повного струму (циркуляція вектора магнітної індукції) для магнітного поля у вакуумі та його застосування до розрахунку магнітного поля тороїда та довгого соленоїда. Дія магнітного поля на рухомий заряд. Сила Лоренца. Рух заряджених частинок в магнітному полі. Принцип дії циклічних прискорювачів заряджених частинок. Ефект Холла. МГД-генератор. Контур зі струмом у магнітному полі. Магнітний потік. Теорема Остроградського – Гаусса. Робота переміщення провідника й контуру зі струмом у магнітному полі.

Явище електромагнітної індукції (досліди Фарадея). Правило Ленца. Закон електромагнітної індукції та його висновок із закону збереження енергії. Явище самоіндукції. Індуктивність. Струми при замиканні й розмиканні ланцюга. Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність. Енергія системи провідників зі струмом. Густина енергії магнітного поля.

Магнітне поле в речовині. Магнітні моменти атомів. Типи магнетиків. Намагніченість. Мікро – і макроструми. Елементарна теорія дія – і парамагнетизму. Магнітна сприйнятливості речовини та її залежність від температури. Закон повного струму для магнітного поля в речовині. Напруженість магнітного поля. Магнітна проникність середовища. Феромагнетика. Досліди Столетова. Крива намагнічування. Магнітний гістерезис. Точка Кюрі. Домени. Спінова природа феромагнетизму.

Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля. Струм зміщення. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля в інтегральній формі.

Електромагнітні коливання і хвилі

Гармонічні електромагнітні коливання та їх характеристики. Диференціальне рівняння електромагнітних коливань. Електричний коливальний контур. Енергія електромагнітних коливань. Диференціальне рівняння електромагнітних коливань і його рішення. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його рішення. Амплітуда й фаза вимушених коливань. Випадок резонансу. Електромагнітні хвилі. Диференціальне рівняння електромагнітної хвилі. Основні властивості електромагнітних хвиль. Монохроматична хвиля. Енергія електромагнітних хвиль. Потік енергії. Вектор Умова – Пойнтінга. Випромінювання диполя.

Хвильова оптика

Інтерференція світла. Когерентність і монохроматичність світлових хвиль. Розрахунок інтерференційної картини від двох когерентних джерел. Оптична довжина шляху. Інтерференція світла в тонких плівках. Інтерферометри. Дифракція світла. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Прямолінійне поширення світла. Дифракція Френеля на круглому отворі й диску. Дифракція Фраунгофера на одній щілині й дифракційної решітці. Роздільна здатність оптичних приладів. Дифракція на

просторовій решітці. Формула Вульфа – Бреґга. Принцип голографії. Дослідження структури кристалів. Оптично неоднорідне середовище. Дисперсія світла. Області нормальної й аномальної дисперсії. Електронна теорія дисперсії світла. Ефект Доплера. Випромінювання Вавилова – Черенкова. Поляризація світла. Природне й поляризоване світло. Поляризація світла при відображенні. Закон Брюстера. Подвійне променезаломлення. Одноосьові кристали. Поляроїди й поляризаційні призми. Закон Малюса.

Квантова природа випромінювання

Теплове випромінювання. Чорне тіло. Закон Кірхгофа. Закон Стефана – Больцмана. Розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла. Закон зміщення Віна. Квантова гіпотеза й формула Планка. Оптична пірометрія. Зовнішній фотоефект і його закони. Фотони. Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту. Маса та імпульс фотона. Тиск світла. Досліди Лебедева. Квантове і хвильове пояснення тиску світла. Ефект Комптона та його теорія. Діалектична єдність корпускулярних і хвильових властивостей електромагнітного випромінювання.

Елементи атомної фізики та квантової механіки

Дослідне обґрунтування корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей речовини. Формула де Бройля. Співвідношення невизначеностей як прояв корпускулярно-хвильового дуалізму властивостей матерії. Хвильова функція та її статистичний зміст. Обмеженість механічного детермінізму. Принцип причинності в квантовій механіці. Стаціонарні стани. Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів. Вільна частинка. Тунельний ефект. Частинка в одновимірній прямокутній «потенціальній ямі». Квантування енергії та імпульсу частинки. Поняття про лінійний гармонійний осцилятор. Атом водню. Головні, орбітальні і магнітні квантові числа. Дослід Штерна й Герлаха. Спін електрона. Спінове квантове число. Ферміони й бозони. Принцип Паулі. Розподіл електронів в атомі за станами. Поняття про енергетичні рівні молекул. Спектри атомів і молекул. Поглинання, спонтанне й вимушене випромінювання. Поняття про лазер.

Елементи квантової статистики та фізики твердого тіла

Фазовий простір. Елементарна комірка. Густина станів. Поняття про квантову статистику Бозе – Ейнштейна. Фотонний і фононний газ. Розподіл фононів за енергіями. Теплоємність кристалічної решітки. Надплинність. Поняття про квантову статистику Фермі – Дірака. Розподіл електронів провідності в металі за енергіями при абсолютному нулі температури. Енергія Фермі. Вплив температури на розподіл електронів. Рівень Фермі. Внутрішня енергія та теплоємність електронного газу в металі. Електропровідність металів. Надпровідність. Магнітні властивості надпровідників.

Енергетичні зони в кристалах. Розподіл електронів по енергетичним зонам. Валентна зона й зона провідності. Метали, діелектрики та напів-

провідники. Власна провідність напівпровідників. Квазічастинки – електрони провідності й дірки. Ефективна маса електрона в кристалі. Домішкова провідність напівпровідників. Електронний і дірковий напівпровідники. Контактні явища. Контакт електронного й діркового напівпровідника (р-n-перехід) та його вольт-амперна характеристика. Фотоелектричні явища в напівпровідниках. Люмінесценція твердих тіл.

Елементи фізики атомного ядра й елементарних частинок

Заряд, розмір і маса атомного ядра. Масове й число заряду. Момент імпульсу ядра та його магнітний момент. Склад ядра. Роботи Іваненко та Гейзенберга. Нуклони. Взаємодія нуклонів і поняття про властивості та природу ядерних сил. Дефект маси й енергія зв'язку ядра. Закономірності й походження альфа -, бета-і гамма-випромінювань атомних ядер. Ядерні реакції та закони збереження. Реакція поділу ядер. Ланцюгова реакція поділу. Поняття про ядерну енергетику. Реакція синтезу атомних ядер. Проблема керованих термоядерних реакцій. Елементарні частинки. Їх класифікація та взаємна перетворюваність. Чотири типи фундаментальних взаємодій: сильні, електромагнітні, слабкі й гравітаційні. Поняття про основні проблеми сучасної фізики й астрофізики.

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

1. За час вивчення курсу загальної фізики студент-заочник повинен представити до навчального закладу в залежності від спеціальності від трьох до чотирьох контрольних робіт.

2. Номери завдань, які студент повинен включити в свою контрольну роботу, визначаються за таблицями варіантів (див., наприклад, с. 35).

3. Контрольні роботи потрібно виконувати у шкільному зошиті, на обкладинці якої навести відомості за таким зразком:

«Студент будівельного факультету «Автомобільний транспорт» ДВНЗ АДІ ДонНТУ Кисельов О. В. Шифр 257320 Адреса: м. Маріуполь Донецької обл., вул. Остапенко, 5, кв. 10. Контрольна робота № 1 з фізики».

4. Умови завдань у контрольній роботі треба переписати повністю без скорочень. Для зауважень викладача на сторінках зошита залишати поля.

5. В кінці контрольної роботи вказати, яким підручником або навчальним посібником студент користувався при вивченні фізики (назва підручника, автор, рік видання). Це робиться для того, щоб рецензент у разі потреби міг вказати, що слід студенту вивчити для завершення контрольної роботи.

6. Вислати на рецензію слід одночасно не більше однієї роботи. Щоб уникнути одних і тих самих помилок, чергову роботу слід вислати тільки після отримання рецензії на попередню.

7. Якщо контрольна робота при рецензуванні не зарахована, студент зобов'язаний подати її на повторну рецензію, включивши в неї ті завдання, вирішення яких виявилися невірними. Повторну роботу необхідно подати разом з незархованою.

8. Зараховані контрольні роботи подаються екзаменатору. Студент повинен бути готовий під час іспиту дати пояснення по суті рішення задач, що входять до контрольної роботи.

9. Рішення завдань слід супроводжувати короткими, але вичерпними поясненнями; в тих випадках, коли це можливо, дати креслення, що виконане за допомогою креслярського приладдя.

10. Розв'язувати завдання треба у загальному вигляді, тобто висловити шукану величину в буквених позначеннях величин, заданих в умові завдання. При такому способі розв'язування не проводять обчислення проміжних величин.

11. Після отримання розрахункової формули для перевірки правильності її слід підставити в праву частину формули замість символів величин позначення одиниць цих величин, провести з ними необхідні дії й упевнитися в тому, що отримана при цьому одиниця відповідає шуканій

величині. Якщо такої відповідності немає, то це означає, що завдання виконано невірно (див. приклад 3 на с. 55).

12. Числові значення величин при підстановці їх в розрахункову формулу слід подавати тільки в одиницях СІ. Як виняток, допускається виражати в будь-яких, але однакових одиницях числові значення однорідних величин, що стоять у чисельнику та знаменнику дроби й мають однакові ступені (див. приклад 6 на с. 25).

13. Під час підстановки в розрахункову формулу, а також під час запису відповіді числові значення величин слід записувати як добуток десяткового дроби з однією значущою цифрою перед комою на відповідний ступінь десяти. Наприклад, замість 3520 треба записати $3,52 \cdot 10^{-3}$, замість 0,00129 записати $1,29 \cdot 10^{-3}$ і т.п.

14. Обчислення за розрахунковою формулою треба проводити з дотриманням правил наближених обчислень (див. у «Задачнику по фізиці» А. Г. Чертова, А. А. Воробьева. Приложение о приближенных вычислениях). Як правило, остаточну відповідь слід записувати з трьома значущими цифрами. Це відноситься і до випадку, коли результат отриманий із застосуванням калькулятора.

1 ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

1.1 Основні формули

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки (центру мас твердого тіла) вздовж осі x :

$$x = f(t), \quad (1.1)$$

де $f(t)$ – деяка функція часу.

Проекція середньої швидкості на вісь x :

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Середня шляхова швидкість:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

де Δs – шлях, пройдений точкою за інтервал часу Δt . Шлях Δs на відміну від різниці координат $\Delta x = x_2 - x_1$ не може спадати й приймати негативні значення, тобто $\Delta s \geq 0$.

Проекція миттєвої швидкості на вісь x :

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \quad (1.4)$$

Проекція середнього прискорення на вісь x :

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Проекція миттєвого прискорення на вісь x :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \quad (1.6)$$

Для прямолінійного рівнозмінного руху вздовж осі x :

$$v_x = v_{ox} + a_x t; \quad (1.7)$$

$$\Delta S = v_{ox} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (1.8)$$

де v_x та v_{ox} – кінцева та початкова швидкості, відповідно.

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по колу:

$$\varphi = f(t); \quad r = R = \text{const}. \quad (1.9)$$

Модуль кутової швидкості:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.10)$$

Модуль кутового прискорення:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.11)$$

Формули рівнозмінного обертального руху тіла навколо нерухомої осі:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad (1.12)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (1.13)$$

де ω та ω_0 – кінцева та початкова кутова швидкість, відповідно.

Зв'язок між модулями лінійних та кутових величин, що характеризують рух точки по колу:

$$v = \omega R; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon R; \quad a_n = \omega^2 R, \quad (1.14)$$

де v – модуль лінійної швидкості;

a_τ та a_n – модулі тангенціального і нормального прискорень;

ω – модуль кутової швидкості ;

ε – модуль кутового прискорення;

R – радіус кола.

Модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \quad \text{або} \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.15)$$

Кут між повним a і нормальним a_n прискореннями:

$$\alpha = \arccos(a_n / a). \quad (1.16)$$

Кінематичне рівняння гармонічних коливань матеріальної точки:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.17)$$

де x – зміщення;

A – амплітуда коливань;

ω – кутова або циклічна частота;

φ – початкова фаза.

Швидкість і прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання:

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi); \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.18)$$

Додавання гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти:

а) амплітуда результативного коливання:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (1.19)$$

б) початкова фаза результативного коливання:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (1.20)$$

Траєкторія точки, яка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях:

$$x = A_1 \cos \omega t; \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi):$$

$$\text{а) } y = \frac{A_2}{A_1} x, \text{ якщо різниця фаз } \varphi = 0; \quad (1.21)$$

$$\text{б) } y = -\frac{A_2}{A_1} x, \text{ якщо різниця фаз } \varphi = \pm \pi; \quad (1.22)$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \text{ якщо різниця фаз } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (1.23)$$

Рівняння плоскої біжної хвилі:

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (1.24)$$

де y – зміщення будь-якої з точок середовища з координатою x у момент t ;

v – швидкість поширення коливань у середовищі.

Зв'язок різниці фаз $\Delta\varphi$ коливань з відстанню Δx між точками середовища, відрахованих у напрямку поширення коливань:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x, \quad (1.25)$$

де λ – довжина хвилі.

Імпульс матеріальної точки масою m , що рухається зі швидкістю v :

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.26)$$

Другий закон Ньютона:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \quad (1.27)$$

де \vec{F} – вислідна сила, що діє на матеріальну точку.

Сили, що розглядаються в механіці:

а) сила пружності:

$$F = -kx, \quad (1.28)$$

де k – коефіцієнт пружності (у разі пружини – жорсткість);

x – абсолютна деформація;

б) сила тяжіння:

$$\vec{F} = m\vec{g};$$

в) сила гравітаційної взаємодії:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.29)$$

де G – гравітаційна постійна;

m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл;

r – відстань між тілами (тіла розглядаються як матеріальні точки).

У разі гравітаційної взаємодії силу можна виразити також через напруженість G гравітаційного поля:

$$\vec{F} = m\vec{G}; \quad (1.30)$$

г) сила тертя (ковзання):

$$\vec{F} = f\vec{N}, \quad (1.31)$$

де f – коефіцієнт тертя;

\vec{N} – сила нормального тиску.
Закон збереження імпульсу:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const \quad (1.32)$$

або для двох тіл ($i = 2$):

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (1.33)$$

де \vec{v}_1 та \vec{v}_2 – швидкості тіл у момент часу, прийнятий за початковий;
 \vec{u}_1 и \vec{u}_2 – швидкості тих самих тіл у момент часу, прийнятий за кінцевий.

Кінетична енергія тіла, що рухається поступально:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad \text{або} \quad T = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.34)$$

Потенційна енергія:

а) пружно-деформованої пружини:

$$П = kx^2/2, \quad (1.35)$$

де k – жорсткість пружини;

x – абсолютна деформація;

б) гравітаційної взаємодії:

$$П = - Gm_1m_2 / r, \quad (1.36)$$

де G – гравітаційна постійна;

m_1 та m_2 – маси тіл, які взаємодіють;

r – відстань між ними (тіла розглядаються як матеріальні точки);

в) тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння:

$$П = mgh, \quad (1.37)$$

де g – прискорення вільного падіння ;

h – висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий (формула справедлива за умови $h \ll R$ де R – радіус Землі).

Закон збереження механічної енергії:

$$E = T + П = const. \quad (1.38)$$

Робота A , здійснена вислідною силою, визначається як міра зміни кінетичної енергії матеріальної точки:

$$A = T_2 - T_1. \quad (1.39)$$

Основне рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі z :

$$M_z = J_z \varepsilon, \quad (1.40)$$

де M_z – вислідний момент зовнішніх сил відносно осі z , що діють на тіло;

ε – кутове прискорення;

J_z – момент інерції відносно осі обертання.

Моменти інерції деяких тіл масою m відносно осі z , що проходить через центр мас:

а) стрижня довжиною l відносно осі, перпендикулярної стрижню:

$$J_z = ml^2/12; \quad (1.41)$$

б) обруча (тонкостінного циліндра) щодо осі, перпендикулярної площині обруча (що збігається з віссю циліндра):

$$J_z = mR^2, \quad (1.42)$$

де R – радіус обруча (циліндра);

в) диска радіусом R відносно осі, перпендикулярної площині диска:

$$J_z = mR^2/2. \quad (1.43)$$

Проекція на вісь z моменту імпульсу тіла, що обертається відносно нерухомої осі z :

$$L_z = J_z \omega, \quad (1.44)$$

де ω – кутова швидкість тіла.

Закон збереження моменту імпульсу систем тіл, що обертаються навколо нерухомої осі z :

$$J_z \omega = \text{const}, \quad (1.45)$$

де J – момент інерції системи тіл відносно осі z ;

ω – кутова швидкість обертання тіл системи навколо осі z .

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі z :

$$T = J_z \omega^2 / 2 \quad \text{або} \quad T = L_z^2 / (2J_z). \quad (1.46)$$

1.2 Методичні вказівки до розділу «Фізичні основи класичної механіки»

Для вирішення завдань по кінематиці прямолінійного руху необхідно чітко уявляти фізичний зміст формул шляху й швидкості цього руху. Запис законів руху виробляється в координатній формі. Вибір системи координат довільний; вибирати її необхідно таким чином, щоб математичне рішення було спрощено. Наприклад, під час руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, зручно вісь y направити вертикально, а вісь x – по горизонталі, так як рух вздовж вісі x буде рівномірним, а вздовж вісі y – рівнозмінним.

У завданнях на рівномірний прямолінійний рух двох тіл зручно перейти до системи відліку, пов'язану з одним із тіл.

Для вирішення завдань по **кінематиці обертального руху** необхідно мати на увазі, що в формулах (1.12) та (1.13) величини φ , ω_0 , ω та ε – алгебраїчні. Знак φ визначається напрямком повороту тіла за час t , а знаки ω та ω_0 – напрямком обертання тіла у відповідні моменти часу. Величини ω та ε мають однакові знаки при прискореному обертанні й протилежні – при сповільненому. При вирішенні завдань будь-яке з двох напрямків обертання можна прийняти за позитивне.

Якщо тіло одночасно бере участь у двох обертальних рухах з кутовими швидкостями $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ щодо двох пересічних осей, то вислідний рух буде також обертальним з кутовою швидкістю, що дорівнює $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Для розв'язання задач **динаміки поступального руху** необхідно застосовувати II закон Ньютона. Доцільно дотримуватися наступного порядку дій:

- а) зробити рисунок до задачі;
- б) вказати всі сили, які діють на кожне тіло системи;
- в) записати II закон Ньютона у векторній формі для кожного тіла системи;
- г) вибрати зручні осі координат;
- д) записати II закон Ньютона у скалярній формі для кожного тіла системи;
- е) розв'язати отриману систему рівнянь.

Якщо тіла пов'язані ниткою, масою якої можна знехтувати, то силу натягу нитки вважають однаковою по всій її довжині.

Закон збереження імпульсу та механічної енергії слід застосовувати в тих випадках, коли обчислення сил або утруднене, або не потрібне за умовою задачі. У тому випадку, коли сили, що діють на дане тіло, виявляються залежними від часу, закон руху визначається за допомогою інтегрального числення. Застосування законів збереження дозволяє обійти ме-

ханічні труднощі.

При використанні законів збереження перш за все, необхідно з'ясувати можливість застосування цих законів в конкретній задачі. **Закон збереження імпульсу**, точно кажучи, застосовується тільки для замкнутих систем, тобто до таких систем тіл, на які не діють зовнішні сили чи їх векторна сума дорівнює нулю. Однак, цей закон можна застосувати й для незамкнутих систем, якщо:

а) внутрішніх сил у багато разів більше, ніж зовнішніх. Наприклад, при розриві летючого снаряду;

б) проекція вислідної зовнішньої сили на будь-який напрямок під час взаємодії дорівнює нулю. Вздовж цього напрямку справедливий закон збереження імпульсу.

При складанні рівняння на підставі закону збереження імпульсу слід звертати увагу на те, що швидкості всіх розглянутих тіл мають обов'язково відраховуватися щодо однієї й тієї ж системи відліку, а так само на векторний характер закону.

Система тіл, механічна енергія яких постійна, називається консервативною. Умова консервативності – відсутність переходу механічної енергії в інші види енергії та обміну механічною енергією між тілами, що належать до даної системи, і зовнішніми тілами. Перша умова виконується для консервативних сил, які, за визначенням, не залежать від координат взаємодіючих тіл, або коли робота внутрішніх консервативних сил дорівнює нулю. Не консервативними силами є, наприклад, сила тертя, сили, що виникають при не пружному ударі. Друга умова виконується в тих випадках, коли алгебраїчна сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю.

Методика рішення задач по обертальному руху принципово не відрізняється від методики вирішення завдань поступального руху. У завданнях цього розділу зазвичай розглядають обертання твердого тіла лише навколо нерухомої вісі або вісі, що переміщається в просторі паралельно самій собі. У цьому випадку всі псевдовектори, що характеризують обертальний рух тіла: $\vec{\omega}$, $\vec{\epsilon}$, \vec{M} , \vec{L} – спрямовані вздовж вісі обертання. Це дозволяє вибрати вісь обертання за вісь проекції.

Складний плоский рух, наприклад рух тіла, яке котиться, слід розглядати як суму двох рухів – обертальний навколо вісі, що проходить через центр мас, і поступальний рух зі швидкістю центру мас. Для вирішення завдання слід користуватися одночасно рівнянням динаміки обертального руху:

$$I\vec{\epsilon} = \sum \vec{M}_i$$

та II законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Механічні коливання відрізняються від розглянутих вище видів руху тим, що прискорення при коливальному русі є змінна величина.

З (1.17) та (1.18) випливає, що максимальному зсуву при гармонійному коливанні відповідають нульова швидкість і максимальне прискорення, спрямоване протилежно зміщенню (убік рівноваги). Навпаки, в положенні рівноваги ($x = 0$) швидкість максимальна, а прискорення дорівнює нулю.

1.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Рівняння руху матеріальної точки вздовж вісі має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = -0,5$ м/с³. Знайти координату x , швидкість v_x та прискорення a_x точки в момент часу $t = 2$ с.

Розв'язок. Координату x знайдемо, підставивши в рівняння руху числові значення коефіцієнтів A , B та C та часу t :

$$x = (2 + 1 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^3) \text{ м} = 0.$$

Миттєва швидкість відносно осі x є перша похідна від координати за часом:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Прискорення точки знайдемо, взявши першу похідну від швидкості за часом:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct.$$

У момент часу $t = 2$ с:

$$v_x = (1 - 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2) \text{ м/с} = -5 \text{ м/с},$$

$$a_x = 6(-0,5) \cdot 2 \text{ м/с}^2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 2. Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с². Знайти повне прискорення точки, що знаходиться на відстані $r = 0,1$ м від вісі обертання, для моменту часу $t = 4$ с.

Розв'язок. Повне прискорення \vec{a} точки, що рухається по кривій лінії, може бути знайдено як геометрична сума тангенціального прискорення \vec{a}_τ , що спрямоване по дотичній до траєкторії, і нормального прискорення \vec{a}_n , спрямованого до центру кривини траєкторії (рис. 1):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

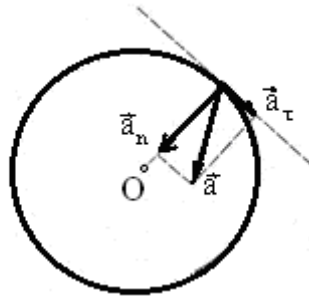


Рисунок 1. – Повне прискорення точки, що рухається по кривій лінії

Так як вектори \vec{a}_τ та \vec{a}_n взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \quad (1)$$

Модулі тангенціального та нормального прискорення точки тіла, що обертається виражаються формулами:

$$a_\tau = \varepsilon r; \quad a_n = \omega^2 r ,$$

де ω – модуль кутової швидкості тіла;
 ε – модуль його кутового прискорення.

Підставляючи вирази a_τ та a_n у формулу (1), знаходимо:

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \quad (2)$$

Кутову швидкість ω знайдемо, взявши першу похідну кута повороту за часом:

$$\omega = d\varphi/dt = B + 2Ct .$$

У момент часу $t = 4$ с модуль кутової швидкості:

$$\omega = [20 + 2(-2)4] \text{ рад/с} = 4 \text{ рад/с} .$$

Кутове прискорення знайдемо, взявши першу похідну від кутової швидкості за часом:

$$\varepsilon = d\omega/dt = 2C = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Підставляючи значення ω , ε і r у формулу (2), отримуємо:

$$a = 0,1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 3. Ящик масою $m_1 = 20$ кг зісковзує по ідеально гладенькій дощечці довжиною $l = 2$ м на нерухомий візок з піском і застрягає в ньому. Візок з піском масою $m_2 = 80$ кг може вільно (без тертя) переміщуватись по рейках в горизонтальному напрямку. Визначити швидкість u візка з ящиком, якщо дощечка нахилена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до рейок.

Розв'язок. Візок та ящик можна розглядати як систему двох не пружних взаємодіючих тіл. Але ця система не замкнута, так як на неї діють зовнішні сили: сили тяжіння $m_1\vec{g}$ та $m_2\vec{g}$ і сила реакції \vec{N}_1 (рис. 2). Тому застосувати закон збереження імпульсу до системи ящик – візок не можна. Але так як проекції зазначених сил на напрям вісі x , що збігається з напрямком рейок, дорівнюють нулю, то проекцію імпульсу системи на цей напрям можна вважати сталою, тобто:

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \quad (1)$$

де p_{1x} і p_{2x} – проекції імпульсу ящика й візка з піском у момент падіння ящика на візок;

p'_{1x} і p'_{2x} – ті ж величини після падіння ящика.

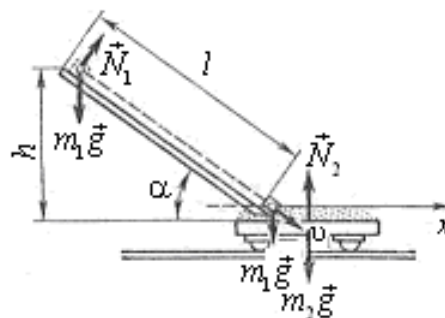


Рисунок 2 – Схема взаємодії ящика з візком

Розглядаючи тіла системи як матеріальні точки, виразимо у рівності (1) імпульси тіл через їх маси й швидкості, враховуючи, що $p_{2x} = 0$ (візок до взаємодії з ящиком знаходився у спокої), а також що після взаємодії обидва тіла системи рухаються з однієї тією ж швидкістю u :

$$m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2) u$$

або

$$m_1 v_1 \cos \alpha = (m_1 + m_2) u,$$

де v_1 – модуль швидкості ящика перед падінням на візок;

$v_{1x} = v_1 \cos \alpha$ – проекція цієї швидкості на вісь x .

Звідси:

$$u = m_1 v_1 \cos \alpha / (m_1 + m_2) \quad . \quad (2)$$

Модуль швидкості v_1 визначимо з закону збереження енергії:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

де $h = l \sin \alpha$, звідки

$$v_1 = \sqrt{2gl \sin \alpha}.$$

Підставивши вираз v_1 у формулу (2), отримаємо:

$$u = \frac{m_1 \sqrt{2gl \sin \alpha} \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

Після обчислень знайдемо:

$$\begin{aligned} u &= \frac{20 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2 \sin 30^\circ}}{20 + 80} \cos 30^\circ \text{ м/с} = \\ &= 0,2 \sqrt{19,6} \cdot 0,867 \text{ м/с} = 0,767 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Приклад 4. При пострілі з пружинного пістолета вертикально вгору куля масою $m = 20$ г піднялася на висоту $h = 5$ м. Визначити жорсткість пружини пістолета, якщо вона була стиснута на $x = 10$ см. Масою пружини й силами тертя знехтувати.

Розв'язок. Розглянемо систему пружина – куля. Так як на тіла системи діють лише консервативні сили, то для вирішення задачі можна застосувати закон збереження енергії в механіці. Згідно з ним повна механічна енергія E_1 системи в початковому стані (в даному випадку перед пострілом) дорівнює повній енергії E_2 в кінцевому стані (коли куля піднялася на висоту h), тобто:

$$E_1 = E_2 \quad \text{або} \quad T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (1)$$

де T_1 , T_2 , Π_1 і Π_2 – кінетичні та потенційні енергії системи в початковому й кінцевому станах.

Так як кінетичні енергії кулі в початковому й кінцевому станах дорівнюють нулю, то рівність (1) набуде вигляду:

$$P_1 = P_2. \quad (2)$$

Візьмемо потенційну енергію кулі в полі сил тяжіння Землі, коли куля знаходиться у спокої на стиснутій пружині, рівною нулю, а висоту підйому кулі будемо відраховувати від торця стиснутої пружини. Тоді енергія системи в початковому стані буде дорівнювати потенційній енергії стиснутої пружини, тобто $P_1 = \frac{kx^2}{2}$, а в кінцевому стані – потенційна енергія кулі на висоті h , тобто $P_2 = mgh$.

Підставивши вирази P_1 і P_2 у формулу (2), отримаємо $\frac{kx^2}{2} = mgh$, звідки

$$k = \frac{2mgh}{x^2}. \quad (3)$$

Перевіримо, чи дає отримана формула одиницю жорсткості k . Для цього в праву частину формули (3) замість величин підставимо їх одиниці:

$$\frac{[m][g][h]}{[x^2]} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ Н/м}.$$

Переконавшись, що отримана одиниця є одиницею жорсткості (1 Н/м), підставляємо у формулу (3) значення величин і зробимо обчислення:

$$k = \frac{2 \cdot 0,02 \cdot 9,81 \cdot 5}{(0,1)^2} \text{ Н/м} = 196 \text{ Н/м}.$$

Приклад 5. Куля масою m_1 , що рухається горизонтально з деякою швидкістю v_1 , зіткнулася з нерухомою кулею масою m_2 . Кулі абсолютно пружні, удар прямий, центральний. Яку частку ε своєї кінетичної енергії перша куля передає другій?

Розв'язок. Частка енергії, переданої першою кулею другій, виразиться співвідношенням:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{u_2}{v_1} \right)^2, \quad (1)$$

де T_1 – кінетична енергія першої кулі до удару;

u_2 та T_2 – швидкість і кінетична енергія другої кулі після удару.

Як видно з формули (1), для визначення ε треба знайти u_2 . Згідно з умовою задачі, імпульс системи двох куль щодо горизонтального напрямку не змінюється й механічна енергія куль в інші види не переходить. Користуючись цим, знайдемо:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \quad (2)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3)$$

Розв'яжемо спільно рівняння (2) і (3):

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Підставивши цей вираз u_2 у формулу (1) й скоротивши на v_1 та m_1 , отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \left[\frac{2m_1 v_1}{v_1 (m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Із знайденого співвідношення видно, що частка переданої енергії залежить тільки від мас куль, які взаємодіють.

Приклад 6. Через блок у вигляді суцільного диска, що має масу $m = 80$ г (рис. 3), перекинута тонка гнучка нитка, до кінців якої підвішені вантажі з масами $m_1 = 100$ г і $m_2 = 200$ г. Визначити прискорення, з яким будуть рухатися вантажі, якщо їх надати самим собі. Тертям і масою нитки знехтувати.

Розв'язок. Розглянемо сили, що діють на кожен вантаж і на блок окремо. На кожен вантаж діють дві сили: сила тяжіння й сила пружності (сила натягу нитки). Направимо вісь x вертикально вниз і напишемо для кожного вантажу рівняння руху (другий закон Ньютона) в проекціях на цю вісь.

Для першого вантажу:

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a; \quad (1)$$

для другого вантажу:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a. \quad (2)$$

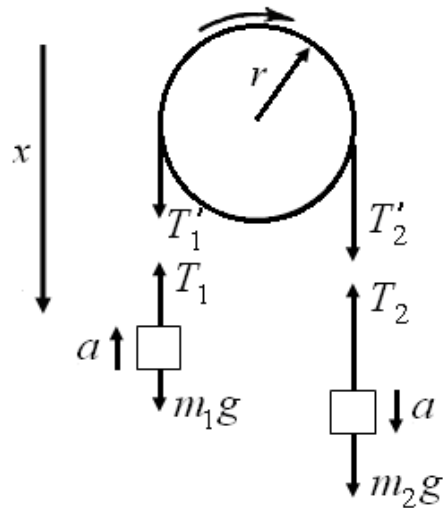


Рисунок 3 – Система блок – вантажі

Під дією моментів сил T'_1 і T'_2 щодо осі z , перпендикулярної площині креслення й спрямованої за креслення, блок набуває кутового прискорення. Згідно з основним рівнянням динаміки обертального руху:

$$T'_2 r - T'_1 r = J_z \varepsilon, \quad (3)$$

де $\varepsilon = a/r$;

$J_z = mr^2/2$ – момент інерції блоку (суцільного диска) щодо осі z .

Згідно з третім законом Ньютона, з урахуванням невагомості нитки $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$. Скориставшись цим, підставимо в рівняння (3) замість T'_1 та T'_2 вираз T_1 і T_2 , отримавши їх попередньо з рівнянь (1) і (2):

$$(m_2 g - m_2 a) r - (m_1 g + m_1 a) r = mr^2 a / (2r).$$

Після скорочення на r і перегрупування членів знайдемо:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g. \quad (4)$$

Формула (4) дозволяє маси m_1 , m_2 та m виразити в грамах, як вони дані в умові завдання, а прискорення – в одиницях СІ. Після підстановки числових значень у формулу (4) отримаємо:

$$a = \frac{(200 - 100) \text{ г}}{(200 + 100 + 80/2) \text{ г}} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 2,88 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 7. Крутень у вигляді суцільного диска радіусом $R = 0,2$ м та масою $m = 50$ кг розкручений до частоти обертання $n_1 = 480 \text{ хв}^{-1}$ і нада-

ний самому собі. Під дією сил тертя крутень зупинився через $t = 50$ с. Знайти момент M сил тертя.

Розв'язок. Для розв'язку завдання скористаємося основним рівнянням динаміки обертального руху у вигляді:

$$dL_z = M_z dt,$$

де dL_z – зміна проекції на вісь z моменту імпульсу крутня, що обертається щодо осі z , збігається з геометричною віссю крутня, за інтервал часу dt ;

M_z – момент зовнішніх сил (у даному випадку момент сил тертя), що діють на крутень щодо осі z .

Момент сил тертя можна вважати не змінними з плином часу ($M_z = \text{const}$), тому інтегрування рівняння (1) приводить до виразу:

$$\Delta L_z = M_z \Delta t. \quad (2)$$

При обертанні твердого тіла відносно нерухомої вісі відбувається зміна проекції моменту імпульсу:

$$\Delta L_z = J_z \Delta \omega, \quad (3)$$

де J_z – момент інерції крутня щодо осі z ;

$\Delta \omega$ – зміна кутової швидкості крутня.

Прирівнявши праві частини рівностей (2) та (3), отримаємо:

$$M_z \Delta t = J_z \Delta \omega,$$

звідки

$$M_z = J_z \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \quad (4)$$

Момент інерції крутня у вигляді суцільного диска визначається за формулою:

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Зміну кутової швидкості $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ виразимо через кінцеву n_2 та початкову n_1 частоти обертання, користуючись співвідношенням $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Підставивши у формулу (4) вираження J_z та $\Delta \omega$, отримаємо:

$$M_z = \pi m R^2 (n_2 - n_1) / \Delta t. \quad (5)$$

Перевіримо, чи дає розрахункова формула одиницю моменту сили (Н м). Для цього в праву частину формули замість символів величин підставимо їх одиниці:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ с}^{-1}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Підставимо в (5) числові значення величин і зробимо обчислення, враховуючи, що $n_1 = 480 \text{ хв}^{-1} = 460/60 \text{ с}^{-1} = 8 \text{ с}^{-1}$:

$$M_z = \frac{3,14 \cdot 50 \cdot (0,2)^2 \cdot (0 - 8)}{50} \text{ Н} \cdot \text{м} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Знак мінус показує, що момент сил тертя чинить крутню опір.

Приклад 8. Платформа у вигляді суцільного диска радіусом $R = 1,5 \text{ м}$ та масою $m = 180 \text{ кг}$ обертається навколо вертикальної осі з частотою $n = 10 \text{ хв}^{-1}$. В центрі платформи стоїть людина масою $m = 60 \text{ кг}$. Яку лінійну швидкість v щодо підлоги приміщення має людина, якщо вона перейде на край платформи?

Розв'язок. Згідно з умовою задачі, момент зовнішніх сил відносно осі обертання z , що збігається з геометричною віссю платформи, можна вважати рівним нулю. При цій умові проекція L_x моменту імпульсу системи платформа – людина залишається сталою:

$$L_z = J_z \omega = \text{const}, \quad (1)$$

де J_z – момент інерції платформи з людиною щодо осі z ;

ω – кутова швидкість платформи.

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції тіл, що входять до складу системи, тому в початковому стані $J_z = J_1 + J_2$, а в кінцевому стані $J'_z = J'_1 + J'_2$.

З урахуванням цієї рівності (1) вираз набуде вигляду:

$$(J_1 + J_2) \omega = (J'_1 + J'_2) \omega', \quad (2)$$

де значення моментів інерції J_1 та J_2 платформи та людини в початковому стані системи; J'_1 та J'_2 – в кінцевому.

Момент інерції платформи щодо осі під час переходу людини не змінюється: $J_1 = J'_1 = m_1 R^2 / 2$. Момент інерції людини щодо тієї ж осі буде змінюватися. Якщо розглядати людину як матеріальну точку, то його момент інерції J_2 в початковому стані (в центрі платформи) можна вважати рівним нулю. У кінцевому стані (на краю платформи) момент інерції людини:

$$J'_2 = m_2 R^2 / 2.$$

Підставимо у формулу (2) вираження моментів інерції, початкової кутової швидкості обертання платформ з людиною ($\omega = 2\pi n$) і кінцевої кутової швидкості ($\omega' = v/R$, де v – швидкість людини відносно підлоги):

$$\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + 0 \right) 2\pi n = \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2 \right) v/R.$$

Після скорочення на R^2 і простих перетворень знаходимо швидкість:

$$v = 2\pi n R m_1 / (m_1 + 2m_2).$$

Зробимо обчислення:

$$v = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}.$$

Приклад 9. Ракета встановлена на поверхні Землі для запуску у вертикальному напрямку. При якій мінімальній швидкості v_1 заданій ракеті при запуску, вона віддаляться від поверхні на відстань, рівну радіусу Землі ($R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$)? Всіма силами, крім сили гравітаційної взаємодії ракети й Землі, знехтувати.

Розв'язок. З боку Землі на ракету діє сила тяжіння, що є потенційною силою. При непрацюючому двигуні під дією потенційної сили механічна енергія ракети змінюватися не буде. Отже:

$$T_1 + P_1 = T_2 + P_2, \quad (1)$$

де T_1 , P_1 і T_2 , P_2 – кінетична і потенційна енергії ракети після вимкнення двигуна в початковому (у поверхні Землі) й кінцевому (на відстані, рівному радіусу Землі) станах.

Відповідно до визначення кінетичної енергії:

$$T_1 = m v_1^2 / 2.$$

Потенційна енергія ракети в початковому стані (потенційна енергія гравітаційної взаємодії тіл, які нескінченно віддалені одне від одного, приймається рівною нулю):

$$\Pi_1 = - GmM/R,$$

тому що потенційна енергія гравітаційної взаємодії тіл, нескінченно віддалених одне від одного, приймається рівною нулю. При віддаленні ракети від поверхні Землі її потенційна енергія зростає, а кінетична – спадає. У кінцевому стані кінетична енергія T_2 стане рівною нулю, а потенційна – досягне максимального значення:

$$\Pi_2 = - GmM/(2R).$$

Підставивши вирази T_1 , Π_1 , T_2 і Π_2 в (1), отримаємо:

$$m v_1^2 / 2 - GmM/R = - GmM/(2R),$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{GM/R}.$$

Помітивши, що $GM/R^2 = g$ (g – прискорення вільного падіння біля поверхні Землі), перепишемо цю формулу у вигляді:

$$v_1 = \sqrt{gR},$$

що збігається з виразом для першої космічної швидкості.

Зробимо обчислення:

$$v_1 = \sqrt{9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6} \text{ м/с} = 7,9 \text{ км/с}.$$

Приклад 10. Точка здійснює гармонійні коливання з частотою $\nu = 10$ Гц. У момент, прийнятий за початковий, точка мала максимальне зміщення: $x_{max} = 1$ мм. Написати рівняння коливань точки й накреслити їх графік.

Розв'язок. Рівняння коливань точки можна записати у вигляді:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (1)$$

де A – амплітуда коливань;

ω – циклічна частота;

t – час;

φ_1 – початкова фаза.

За визначенням, амплітуда коливань:

$$A = x_{max}. \quad (2)$$

Циклічна частота ω пов'язана з частотою ν співвідношенням:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (3)$$

Для моменту часу $t = 0$ формула (1) набуде вигляду:

$$x_{max} = A \sin \varphi_1,$$

звідки початкова фаза:

$$\varphi_1 = \arcsin(x_{max}/A) = \arcsin 1$$

або

$$\varphi_1 = (2k + 1)\pi/2; \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Зміна фази на 2π не змінює стану коливання точки, тому можна прийняти:

$$\varphi_1 = \pi/2. \quad (4)$$

З урахуванням рівностей (2) – (4) рівняння коливань набуде вигляду:

$$x = A \sin(2\pi\nu t + \varphi) \quad \text{або} \quad x = A \cos 2\pi\nu t,$$

де $A = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$, $\nu = 10 \text{ Гц}$, $\varphi = \pi/2$.

Графік відповідного гармонійного коливання наведено на рис. 4

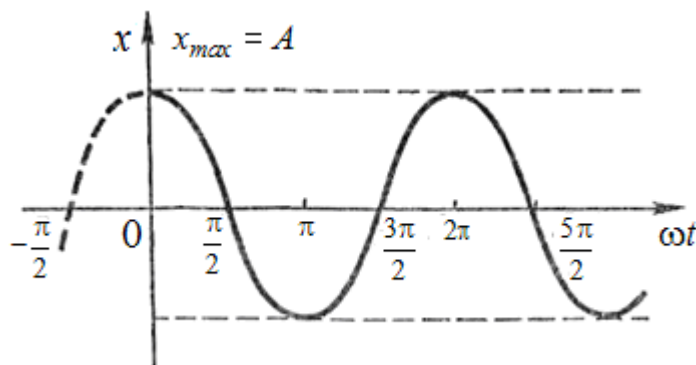


Рисунок 4 – Графік коливання $x = A \cos \omega t$

Приклад 11. Частинка масою $m = 0,01 \text{ кг}$ здійснює гармонійні коливання з періодом $T = 2 \text{ с}$. Повна енергія частинки, що коливається $E = 0,1 \text{ мДж}$. Визначити амплітуду A коливань і найбільше значення сили F_{max} , яка діє на частинку.

Розв'язок. Для визначення амплітуди коливань скористаємося виразом повної енергії частинки:

$$E = m\omega^2 A^2/2,$$

де $\omega = 2\pi/T$. Звідси амплітуда:

$$A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (1)$$

Оскільки частинка робить гармонійні коливання, то сила, що діє на неї, є квазіпружною і, отже, може бути виражена співвідношенням:

$$F = -kx,$$

де k – коефіцієнт квазіпружної сили;

x – зміщення коливної точки.

Максимальна сила буде при максимальному зміщенні x_{max} , рівному амплітуді:

$$F_{max} = kA. \quad (2)$$

Коефіцієнт k виразимо через період коливань:

$$k = m\omega^2 = m \cdot 4\pi^2/T^2. \quad (3)$$

Підставивши вирази (1) та (3) в (2) і провівши спрощення, отримаємо:

$$F_{max} = 2\pi\sqrt{2mE}/T.$$

Зробимо обчислення:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} \text{ м} = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм};$$

$$F_{max} = \frac{2 \cdot 3,14}{2} \sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} \text{ Н} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 4,44 \text{ мН}.$$

Приклад 12. Плоска хвиля поширюється вздовж прямої зі швидкістю $v = 20$ м/с. Дві точки, які знаходяться на цій прямій на відстанях $x_1 = 12$ м та $x_2 = 15$ м від джерела хвиль, коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi = 0,75\pi$. Знайти довжину хвилі λ , написати рівняння хвилі й знайти

зміщення зазначених точок у момент $t = 1,2$ с, якщо амплітуда коливань $A = 0,1$ м.

Розв'язок. Точки, що знаходяться одна від одної на відстані, рівній довжині хвилі λ , коливаються з різницею фаз, яка дорівнює 2π ; точки, що знаходяться одна від одної на будь-якій відстані Δx , коливаються з різницею фаз, яка дорівнює:

$$\Delta\varphi = \Delta x \cdot 2\pi / \lambda = (x_2 - x_1) \cdot 2\pi / \lambda.$$

Вирішуючи цю нерівність щодо λ , отримуємо:

$$\lambda = 2\pi(x_2 - x_1) / \Delta\varphi. \quad (1)$$

Підставивши числові значення величин, що входять у вираз (1), і виконавши арифметичні дії, отримаємо:

$$\lambda = \frac{2\pi(15 - 12)}{0,75\pi} \text{ м} = 8 \text{ м}.$$

Для того щоб написати рівняння плоскої хвилі, треба ще знайти циклічну частоту ω . Так як $\omega = 2\pi / T$ ($T = \lambda / v$ – період коливань), то:

$$\omega = 2\pi v / \lambda.$$

Зробимо обчислення:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8} \text{ с}^{-1} = 5\pi \text{ с}^{-1}.$$

Знаючи амплітуду A коливань, циклічну частоту ω та швидкість v поширення хвилі, можна написати рівняння плоскої хвилі для даного випадку:

$$y = A \cos \omega(t - x / v),$$

де $A = 0,1$ м; $\omega = 5\pi \text{ с}^{-1}$; $v = 20$ м/с.

Щоб знайти зміщення y вказаних точок, достатньо в рівняння (2) підставити значення t та x :

$$y_1 = 0,1 \cos 5\pi(1,2 - 12 / 20) \text{ м} = 0,1 \cos 3\pi \text{ м} = -0,1 \text{ м};$$

$$y_2 = 0,1 \cos 5\pi(1,2 - 15 / 20) \text{ м} = 0,1 \cos 2,25\pi \text{ м} = 0,1 \cos 2,25\pi \text{ м} = 0,071 \text{ м} = 7,1 \text{ м}.$$

1.4 Контрольна робота № 1

Таблиця варіантів.

Варіант	Номери задач							
	110	120	130	140	150	160	170	180
0	110	120	130	140	150	160	170	180
1	101	111	121	131	141	151	161	171
2	102	112	122	132	142	152	162	172
3	103	113	123	133	143	153	163	173
4	104	114	124	134	144	154	164	174
5	105	115	125	135	145	155	165	175
6	106	116	126	136	146	156	166	176
7	107	117	127	137	147	157	167	177
8	108	118	128	138	148	158	168	178
9	109	119	129	139	149	159	169	179

101. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 4$ м/с. Коли воно досягло верхньої точки польоту з того ж початкового пункту, з тією ж початковою швидкістю v_0 вертикально вгору кинуто друге тіло. На якій відстані h від початкового пункту зустрінуться тіла? Опір повітря не враховувати.

102. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням $a = 5$ м/с². Визначити, на скільки шлях, пройдений точкою в n -ю секунду, буде більше шляху, пройденого в попередню секунду. Прийняти $v_0 = 0$.

103. Дві автомашини рухаються по дорогах, кут між якими $\alpha = 60^\circ$. Швидкість автомашин $v_1 = 54$ км/год та $v_2 = 72$ км/год. З якою швидкістю v віддаляються машини одна від одної?

104. Матеріальна точка рухається прямолінійно з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с та постійним прискоренням $a = -5$ м/с². Визначити, у скільки разів шлях Δs , пройдений матеріальною точкою, буде перевищувати модуль її переміщення Δr через $t = 4$ с після початку відліку часу.

105. Велосипедист їхав з одного пункту в інший. Першу третину шляху він проїхав зі швидкістю $v_2 = 18$ км/год. Далі половину часу, що залишилось, він їхав зі швидкістю $v_0 = 22$ км/год, після чого до кінцевого пункту він йшов пішки зі швидкістю $v_3 = 5$ км/год. Визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ велосипедиста.

106. Тіло кинуто під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 30$ м/с. Яким будуть нормальне a_n та тангенціальне a_τ прискорення тіла через час $t = 1$ с після початку руху?

107. Матеріальна точка рухається по колу з постійною кутовою швидкістю $\omega = \pi/6$ рад/с. У скільки разів шлях Δs , пройдений точкою за час $t = 4$ с, буде більше модуля її переміщення Δr ? Прийняти, що в момент початку відліку часу радіус-вектор r , що задає положення точки на колі, щодо вихідного положення був повернутий на кут $\varphi_0 = \pi/3$ рад.

108. Матеріальна точка рухається в площині xu відповідно до рівнянь $x = A_1 + B_1t + C_1t^2$ і $y = A_2 + B_2t + C_2t^2$, де $B_1 = 7$ м/с, $C_1 = -2$ м/с², $B_2 = -1$ м/с, $C_2 = 0,2$ м/с². Знайти модулі швидкості й прискорення точки в момент часу $t = 5$ с.

109. По краю платформи, що рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\omega = 1$ рад/с йде людина й обходить платформу за час $t = 9,9$ с. Яке найбільше прискорення a руху людини відносно Землі? Прийняти радіус платформи $R = 2$ м.

110. Точка рухається по колу радіусом $R = 30$ см з постійним кутовим прискоренням ε . Визначити тангенціальне прискорення a_τ точки, якщо відомо, що за час $t = 4$ с вона зробила три оберти й в кінці третього обороту її нормальне прискорення $a_n = 2,7$ м/с².

111. Під час горизонтального польоту зі швидкістю $v = 250$ м/с снаряд масою $m = 8$ кг розірвався на дві частини. Велика частина масою $m_1 = 6$ кг отримала швидкість $u_1 = 400$ м/с у напрямку польоту снаряда. Визначити модуль і напрямок швидкості u_2 меншої частини снаряда.

112. З візка, що вільно рухається по горизонтальному шляху зі швидкістю $v_1 = 3$ м/с, у бік, протилежний руху візка, стрибає людина, після чого швидкість візка змінилася й стала рівною $u_1 = 4$ м/с. Визначити горизонтальну складову швидкості u_{2x} людини при стрибку щодо візка. Маса візка $m_1 = 210$ кг, маса людини $m_2 = 70$ кг.

113. Гармата, що жорстко закріплена на залізничній платформі, робить постріл вздовж залізничної дороги під кутом $\alpha = 30^\circ$ до лінії горизонту. Визначити швидкість u_2 відкату платформи, якщо снаряд вилітає зі швидкістю $u_1 = 480$ м/с. Маса платформи з гарматою й снарядами $m_2 = 18$ т, маса снаряда $m_1 = 60$ кг.

114. Людина масою $m_1 = 70$ кг, яка біжить зі швидкістю $v_1 = 9$ км/год, наздоганяє візок масою $m_2 = 190$ кг, що рухається зі швидкістю $v_2 = 3,6$ км/год, і стрибає на нього. З якою швидкістю стане рухатися

візок з людиною? З якою швидкістю буде рухатися візок з людиною, якщо людина до стрибка бігла назустріч візку?

115. Ковзаняр, стоячи на ковзанах на льоду, кидає камінь масою $m_1 = 2,5$ кг під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту зі швидкістю $v = 10$ м/с. Яка буде початкова швидкість v_0 руху ковзаняра, якщо маса його $m_2 = 60$ кг? Переміщенням ковзаняра під час кидка знехтувати.

116. На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки, з легкими колесами. На одному кінці дошки стоїть людина. Маса її $m_1 = 60$ кг, маса дошки $m_2 = 20$ кг. З якою швидкістю (щодо підлоги) буде рухатися візок, якщо людина піде вздовж неї зі швидкістю (щодо дошки) $v = 1$ м/с? Масою коліс й тертям знехтувати.

117. Снаряд, що летів зі швидкістю $v = 400$ м/с, у верхній точці траєкторії розірвався на два осколки. Менший осколок, маса якого становить 40 % від маси снаряда, полетів у протилежному напрямку зі швидкістю $u_1 = 150$ м/с. Визначити швидкість u_2 більшого уламка.

118. Два однакові човни масами $m = 200$ кг кожен (разом з людиною й вантажами, що знаходяться в човнах) рухаються паралельними курсами назустріч один одному з однаковими швидкостями $v = 1$ м/с. Коли човни порівнялися, то з першого човна на другий і з другого на перший одночасно перекидають вантажі масами $m_1 = 200$ кг. Визначити швидкості u_1 та u_2 човнів після перекидання вантажів.

119. На скільки переміститься відносно берега човен довжиною $l = 3,5$ м та масою $m_1 = 200$ кг, якщо людина масою $m_2 = 80$ кг ще переміститься на ніс човна? Вважати човен розташованої перпендикулярно березі.

120. Човен довжиною $l = 3$ м и масою $m = 120$ кг стоїть на спокійній воді. На носі й кормі знаходяться двоє рибалок масами $m_1 = 60$ кг та $m_2 = 90$ кг. На скільки зрушиться човен щодо води, якщо рибалки поміняються місцями?

121. У дерев'яну кулю масою $m_1 = 8$ кг, що підвішена на нитці довжиною $l = 1,8$ м, потрапляє куля масою $m_2 = 4$ г, що летить горизонтально. З якою швидкістю летіла куля, якщо нитка з кулею й куля, що застрягла в ній відхилилася від вертикалі на кут $\alpha = 3^\circ$? Розміром кулі знехтувати. Удар кулі вважати прямим, центральним.

122. По невеличкому куску м'якого заліза, який лежить на ковадлі масою $m_1 = 300$ кг, вдаряє молот масою $m_2 = 8$ кг. Визначити ККД η удару, якщо удар не пружний. Корисною вважати енергію, витрачену на деформацію куска заліза.

123. Куля масою $m_1 = 1$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 4$ м/с та стикається з кулею масою $m_2 = 2$ кг, що рухалась назустріч їй зі швидкістю

$v_2 = 3$ м/с. Які швидкості u_1 та u_2 куль після удару? Удар вважати абсолютно пружним, прямим, центральним.

124. Куля масою $m_1 = 3$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 2$ м/с та стикається з кулею масою $m_2 = 5$ кг, що знаходиться в стані спокою. Яка робота буде здійснена при деформації куль? Удар вважати абсолютно не пружним, прямим, центральним.

125. Визначити ККД η не пружного удару бойка масою $m_1 = 0,5$ т, падаючого на палю масою $m_2 = 120$ кг. Корисною вважати енергію, витрачену на вбивання палі.

126. Куля масою $m_1 = 4$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 5$ м/с та стикається з кулею масою $m_2 = 6$ кг, яка рухається їй назустріч зі швидкістю $v_2 = 2$ м/с. Визначити швидкості u_1 та u_2 куль після удару. Удар вважати абсолютно пружним, прямим, центральним.

127. Зі ствола автоматичного пістолета вилетіла куля масою $m_1 = 10$ г зі швидкістю $v = 300$ м/с. Затвор пістолета масою $m_2 = 200$ г притискається до ствола пружиною, жорсткість якої $k = 25$ кН/м. На яку відстань відійде затвор після пострілу? Вважати, що пістолет жорстко закріплений.

128. Куля масою $m_1 = 5$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 1$ м/с та стикається з кулею масою $m_2 = 2$ кг, що знаходиться в стані спокою. Визначити швидкості u_1 та u_2 куль після удару. Удар вважати абсолютно пружним, прямим, центральним.

129. Із гармати, що не має противідкатного пристрою, здійснювалася стрілянина в горизонтальному напрямку. Коли гармата була нерухомо закріплена, снаряд вилетів зі швидкістю $v_1 = 600$ м/с, а коли гарматі дали можливість вільно відкочуватися назад, снаряд вилетів зі швидкістю $v_2 = 580$ м/с. З якою швидкістю відкотилася при цьому гармата?

130. Куля масою $m_1 = 2$ кг стикається з кулею більшої маси, що знаходиться в стані спокою й при цьому втрачає 40 % кінетичної енергії. Визначити масу m_2 більшого кулі. Удар вважати абсолютно пружним, прямим, центральним.

131. Визначити роботу розтягування двох з'єднаних послідовно пружин жорсткостями $k_1 = 400$ Н/м та $k_2 = 250$ Н/м, якщо перша пружина при цьому розтягнулася на $\Delta l = 2$ см.

132. З шахти глибиною $h = 600$ м піднімають кліть масою $m_1 = 3,0$ т на канаті, кожен метр якого має масу $m = 1,5$ кг. Яка робота A відбувається при піднятті кліті на поверхню Землі? Який коефіцієнт корисної дії η підйомного пристрою?

133. Пружина жорсткістю $k = 500$ Н/м стиснута силою $F = 100$ Н. Визначити роботу A зовнішньої сили, що додатково стискає пружину ще на $\Delta l = 2$ см.

134 Дві пружини жорсткістю $k_1 = 0,5$ кН/м та $k_2 = 1$ кН/м з'єднані паралельно. Визначити потенціальну енергію Π даної системи при абсолютній деформації $\Delta l = 4$ см.

135. Яку потрібно виконати роботу A , щоб пружину жорсткістю $k = 800$ Н/м, стислу на $x = 6$ см, додатково стиснути на $\Delta x = 8$ см?

136. Якщо на верхній кінець вертикально розташованої спіральної пружини покласти вантаж, то пружина стиснеться на $\Delta l = 3$ мм. На скільки стисне пружину той самий вантаж, що впав на кінець пружини з висоти $h = 8$ см?

137. З пружинного пістолета з пружиною жорсткістю $k = 150$ Н/м був зроблений постріл кулею масою $m = 8$ г. Визначити швидкість v кулі при вильоті її з пістолета, якщо пружина була стиснута на $\Delta x = 4$ см.

138. Налетівши на пружинний буфер, вагон масою $m = 16$ т, що рухався зі швидкістю $v = 0,6$ м/с, зупинився, стиснувши пружину на $\Delta l = 8$ см. Знайти загальну жорсткість k пружин буфера.

139. Ланцюг довжиною $l = 2$ м лежить на столі, одним кінцем звисаючи зі столу. Якщо довжина тієї частини, що звисає перевищує $1/3 l$, то ланцюг зісковзує зі столу. Визначити швидкість v ланцюга в момент її відриву від столу.

140. Яка робота A повинна бути здійснена при піднятті з землі матеріалів для споруди циліндричної димохідної труби висотою $h = 40$ м, зовнішнім діаметром $D = 3,0$ м і внутрішнім діаметром $d = 2,0$ м. Щільність матеріалу ρ прийняти рівною $2,8 \cdot 10^3$ кг/м.

141. Кулька масою $m = 60$ г, прив'язана до кінця нитки довжиною $l = 1,2$ м, обертається з частотою $n_1 = 2$ с⁻¹ спираючись на горизонтальну площину. Нитка коротшає, наближаючи кульку до осі на відстань $l_2 = 0,6$ м. З якою частотою n_2 буде при цьому обертатися кулька? Яку роботу A здійснює зовнішня сила, скорочуючи нитку? Тертям між кулькою й площину знехтувати.

142. По дотичній до шківів крутня у вигляді диска діаметром $D = 75$ см та масою $m = 40$ кг прикладена сила $F = 1$ кН. Визначити кутове прискорення ε та частоту обертання n крутня через час $t = 10$ с після початку дії сили, якщо радіус r шківів дорівнює 12 см. Силою тертя знехтувати.

143. На обід крутня діаметром $D = 60$ см намотаний шнур, до кінця якого прив'язаний вантаж масою $m = 2$ кг. Визначити момент інерції J крутня, якщо він, обертаючись рівноприскорено під дією сили тяжіння вантажу, за час $t = 3$ с набув кутову швидкість $\omega = 9$ рад/с.

144. Нитка з прив'язаними до її кінців вантажами масами $m_1 = 50$ г та $m_2 = 60$ г перекинута через блок діаметром $D = 4$ см. Визначити момент інерції J блоку, якщо під дією сили тяжіння вантажів він набув кутове прискорення $\varepsilon = 1,5$ рад/с². Тертям і прослизанням нитки по блоку знехтувати.

145. Стрижень обертається навколо осі, що проходить через його середину, згідно з рівнянням $\varphi = At + Bt^3$, де $A = 2$ рад/с, $B = 0,2$ рад/с³. Визначити обертаючий момент M , що діє на стрижень через час $t = 2$ с після початку обертання, якщо момент інерції стрижня $J = 0,048$ кг·м².

146. По горизонтальній площині котиться диск зі швидкістю $v = 8$ м/с. Визначити коефіцієнт опору, якщо диск, будучи наданим самому собі, зупинився, пройшовши шлях $s = 18$ м.

147. Визначити момент сили M , який необхідно прикласти до блоку, що обертається з частотою $n = 12$ с⁻¹, щоб він зупинився протягом часу $\Delta t = 8$ с. Діаметр блоку $D = 30$ см. Маса блока $m = 6$ кг вважати рівномірно розподіленою по ободу.

148. Блок, який має форму диска масою $m = 0,4$ кг, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені вантажі масами $m_1 = 0,3$ кг та $m_2 = 0,7$ кг. Визначити сили натягу T_1 та T_2 нитки по обидві сторони блоку.

149. До краю столу прикріплений блок. Через блок перекинута невагома й нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплені вантажі. Один вантаж рухається по поверхні столу, а інший – уздовж вертикалі вниз. Визначити коефіцієнт f тертя між поверхнями вантажу й столу, якщо маси кожного вантажу й маса блоку однакові й вантажі рухаються з прискоренням $a = 2,6$ м/с². Прослизанням нитки по блоку й силою тертя, що діє на блок, знехтувати.

150. До кінців легкої й нерозтяжної нитки, перекинutoї через блок, підвішені вантажі масами $m_1 = 0,2$ кг та $m_2 = 0,3$ кг. У скільки разів відрізняються сили, що діють на нитку з обох сторін блока, якщо маса блока $m = 0,4$ кг, а його вісь рухається вертикально вгору з прискоренням $a = 2$ м/с²? Силами тертя й прослизання нитки по блоку знехтувати.

151. На лаві Жуковського сидить людина й тримає на витягнутих руках гирі масою $m = 5$ кг кожна. Відстань від кожної гирі до осі лави $l_1 = 70$ см. Лава обертається з частотою $n_1 = 1$ с⁻¹. Як зміниться частота обертання лави й яку роботу A виконає людина, якщо вона стисне руки так, що відстань від кожної гирі до осі зменшиться до $l_2 = 20$ см? Момент інерції людини та лави (разом) відносно осі $J = 2,5$ кг·м².

152. На лаві Жуковського стоїть людина й тримає в руках стрижень вертикально по осі лави. Лава з людиною обертається з кутовою швидкіс-

тю $\omega_1 = 4$ рад/с. З якою кутовою швидкістю ω_2 буде обертатися лава з людиною, якщо повернути стрижень так, щоб він зайняв горизонтальне положення? Сумарний момент інерції людини й лави $J = 5$ кг·м². Довжина стрижня $l = 1,8$ м, маса $m = 6$ кг. Вважати, що центр мас стержня з людиною знаходиться на осі платформи.

153. Платформа у вигляді диска діаметром $D = 3$ м масою $m_1 = 180$ кг може обертатися навколо вертикальної осі. З якою кутовою швидкістю ω_1 буде обертатися ця платформа, якщо по її краю піде людина мас $m_2 = 70$ кг зі швидкістю $v = 1,8$ м/с щодо платформи?

154. Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде уздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться у вихідну (на платформі) точку? Маса платформи $m_1 = 280$ кг, маса людини $m_2 = 80$ кг.

155. На лаві Жуковського стоїть людина й тримає в руці за вісь велосипедне колесо, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega_1 = 5$ рад/с. Вісь колеса розташована вертикально й збігається з віссю лави Жуковського. З якою швидкістю ω_2 стане обертатися лава, якщо повернути колесо навколо горизонтальної осі на кут $\alpha = 90^\circ$? Момент інерції людини й лави J дорівнює $2,5$ кг·м², момент інерції колеса $J_0 = 0,5$ кг·м².

156. Однорідний стрижень довжиною $l = 1,0$ м може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через один з його кінців. В іншій кінець абсолютно непружно вдаряє куля масою $m = 7$ г, що летить перпендикулярно стрижню й його осі. Визначити масу M стрижня, якщо в результаті попадання кулі він відхилився на кут $\alpha = 60^\circ$. Прийняти швидкість кулі $v = 360$ м/с.

157. На краю платформи в вигляді диску, що обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою $n_1 = 8$ мин⁻¹, стоїть людина масою $m_1 = 70$ кг. Коли людина перейшла в центр платформи, вона стала обертатися з частотою $n_2 = 10$ хв⁻¹. Визначити масу m_2 платформи. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

158. На краю нерухомої лави Жуковського діаметром $D = 0,8$ м та масою $m_1 = 6$ кг стоїть людина масою $m_2 = 60$ кг. З якою кутовою швидкістю ω почне обертатися лава, якщо людина спіймає м'яч масою $m = 0,5$ кг, що летить на нього? Траєкторія м'яча горизонтальна й проходить на відстані $r = 0,4$ м від осі лави. Швидкість м'яча $v = 5$ м/с.

159. Горизонтальна платформа масою $m_1 = 150$ кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр, платформи, з часто-

тою $n = 8 \text{ хв}^{-1}$. Людина масою $m_2 = 70 \text{ кг}$ стоїть при цьому на краю платформи. З якою кутовою швидкістю ω почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу круглим однорідним диском, а людину – матеріальною точкою.

160. Однорідний стрижень довжиною $l = 1,0 \text{ м}$ та масою $M = 0,7 \text{ кг}$ підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. У точку, віддалену від осі на $2/3l$, абсолютно пружно ударяє куля масою $m = 5 \text{ г}$, що летить перпендикулярно стрижню та його осі. Після удару стрижень відхилився на $\alpha = 60^\circ$. Визначити швидкість кулі.

161. Визначити напруженість G гравітаційного поля на висоті $h = 1000 \text{ км}$ над поверхнею Землі. Вважати відомими прискорення g вільного падіння біля поверхні Землі й її радіус R .

162. Яка робота A буде здійснена силами гравітаційного поля при падінні на Землю тіла масою $m = 2 \text{ кг}$: 1) з висоти $h = 1000 \text{ км}$; 2) з нескінченності?

163. З нескінченності на поверхню Землі падає метеорит масою $m = 30 \text{ кг}$. Визначити роботу A , яка при цьому буде здійснена силами гравітаційного поля Землі. Прискорення вільного падіння g біля поверхні Землі та її радіус R вважати відомими.

164. З поверхні Землі вертикально вгору випущена ракета зі швидкістю $v = 5 \text{ км/с}$. На яку висоту вона підніметься?

165. По коловій орбіті навколо Землі обертається супутник з періодом $T = 90 \text{ хв}$. Визначити висоту супутника. Прискорення вільного падіння g біля поверхні Землі та її радіус R вважати відомими.

166. На якій відстані від центру Землі знаходиться точка, в якій напруженість сумарного гравітаційного поля Землі й Місяця дорівнює нулю? Прийняти, що маса Землі в 81 разів більше маси Місяця і, що відстань від центру Землі до центру Місяця дорівнює 60 радіусів Землі.

167. Супутник обертається навколо Землі по коловій орбіті на висоті $h = 520 \text{ км}$. Визначити період обертання супутника. Прискорення вільного падіння біля поверхні Землі та її радіус R вважати відомими.

168. Визначити лінійну й кутову швидкості супутника Землі звертається по коловій орбіті на висоті $h = 1000 \text{ км}$. Прискорення вільного падіння біля поверхні Землі та її радіус R вважати відомими.

169. Яка маса Землі, якщо відомо, що Місяць протягом року робить 13 обертань навколо Землі й відстань від Землі до Місяця дорівнює $3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$?

170. У скільки разів середня щільність земної речовини відрізняється від середньої щільності місячного? Прийняти, що радіус R_3 Землі в 390

разів більше радіуса R_M Місяця й вага тіла на Місяці в 6 разів менше ваги тіла на Землі.

171. На стрижні довжиною $l = 30$ см укріплені два однакових тягарця: один – в середині стрижня, інший на одному з його кінців. Стрижень з вантажами коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через вільний кінець стрижня. Визначити наведену довжину L й період T простих гармонійних коливань даного фізичного маятника. Масою стрижня знехтувати.

172. Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, рівняння яких $x = A_1 \sin \omega_1 t$ та $y = A_2 \cos \omega_2 t$, де $A_1 = 8$ см, $A_2 = 4$ см, $\omega_1 = \omega_2 = 2 \text{ с}^{-1}$. Написати рівняння траєкторії й побудувати її. Показати напрямок руху точки.

173. Точка здійснює прості гармонічні коливання, рівняння яких $x = A \sin \omega t$, де $A = 5$ см, $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. У момент часу, коли точка мала потенційну енергію $W = 0,1$ мДж, на неї діяла сила $F = 5$ мН, що повертає до положення рівноваги. Знайти цей момент часу t .

174. Визначити частоту ν простих гармонійних коливань диска радіусом $R = 20$ см навколо горизонтальної осі, що проходить через середину радіуса диска перпендикулярно його площині.

175. Визначити період T простих гармонійних коливань диска радіусом $R = 40$ см навколо горизонтальної осі, що проходить через твірну диска.

176. Визначити період T коливань математичного маятника, якщо його модуль максимального переміщення $\Delta r = 18$ см і максимальна швидкість $v_{max} = 16$ см/с.

177. Матеріальна точка здійснює прості гармонійні коливання так, що в початковий момент часу зміщення $x_0 = 4$ см, а швидкість $v_0 = 10$ см/с. Визначити амплітуду A й початкову фазу ϕ_0 коливань, якщо їх період $T = 2$ с.

178. Складаються два коливання однакового напрямку й однакового періоду: $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ та $x_2 = A_2 \sin \omega_2 (t + \tau)$, де $A_1 = A_2 = 3$ см, $\omega_1 = \omega_2 = \pi \text{ с}^{-1}$, $\tau = 0,5$ с. Визначити амплітуду A й початкову фазу ϕ_0 результуючого коливання. Написати його рівняння. Побудувати векторну діаграму для моменту часу $t = 0$.

179. На гладенькому горизонтальному столі лежить куля масою $M = 200$ г, прикріплена до горизонтально розташованої легкої пружини з жорсткістю $k = 500$ Н/м. У кулю потрапляє куля масою $m = 10$ г, що летить зі швидкістю $v = 300$ м/с, і застряє в ньому. Нехтуючи переміщенням кулі під час удару й опором повітря, визначити амплітуду A та період T коливань кулі.

180. Кулька масою $m = 60$ г коливається з періодом $T = 2$ с. У початковий момент часу зміщення кульки $x_0 = 4,0$ см і вона має енергію $E = 0,02$ Дж. Записати рівняння простого гармонійного коливання кульки й закон зміни сили, що повертає кульку до положення рівноваги, з часом.

2 МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕРМОДИНАМІКА

2.1 Основні формули

Кількість речовини (кількість речовини – число структурних елементів (молекул, атомів, іонів і т. п.), які містяться в тілі або системі. Кількість речовини виражається в молях. Моль дорівнює кількості речовини системи, що містить стільки ж структурних елементів, скільки міститься атомів у вуглецю-12 масою 0,012 кг) тіла (системи):

$$\nu = N / N_A, \quad (2.1)$$

де N – кількість структурних елементів (молекул, атомів, іонів і т.п.), що складають тіло (систему);

N_A – постійна Авогадро ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹).

Молярна маса речовини:

$$M = m / \nu, \quad (2.2)$$

де m – маса однорідного тіла (системи);

ν – кількість речовини цього тіла.

Відносна молекулярна маса речовини:

$$M_r = \sum n_i A_{r,i}, \quad (2.3)$$

де n_i – число атомів i -го хімічного елемента, що входять до складу молекули даної речовини;

$A_{r,i}$ – відносна атомна маса цього елемента.

Відносні атомні маси наведені у таблиці Д. І. Менделєєва (див. також табл. 14 додатка).

Зв'язок молярної маси M з відносною молекулярною масою речовини:

$$M = M_r k, \quad (2.4)$$

де $k = 10^{-3}$ кг/моль.

Кількість речовини суміші газів:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n = N_1 / N_A + N_2 / N_A + \dots + N_n / N_A$$

або

$$\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n}, \quad (2.5)$$

де ν_i , N_i , m_i , M_i – відповідно кількість речовини, число молекул, маса, молярна маса i -го компонента суміші.

Рівняння Менделєєва – Клапейрона (рівняння стану ідеального газу):

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT, \quad (2.6)$$

де m – маса газу;

M – молярна маса газу;

R – молярна газова постійна;

ν – кількість речовини;

T – термодинамічна температура.

Досвідчені газові закони, що є окремими випадками рівняння Менделєєва – Клапейрона для ізопроесів:

а) закон Бойля – Маріотта (ізотермічний процес: $T = const$, $m = const$):

$$pV = const \quad (2.7)$$

або для двох станів газу:

$$p_1V_1 = p_2V_2; \quad (2.8)$$

б) закон Гей-Люссака (ізобарний процес: $p = const$, $m = const$):

$$\frac{V}{T} = const \quad (2.9)$$

або для двох станів:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad (2.10)$$

в) закон Шарля (ізохорний процес: $V = const$, $m = const$):

$$\frac{p}{T} = const \quad (2.11)$$

або для двох станів:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}; \quad (2.12)$$

г) об'єднаний газовий закон ($m = const$):

$$\frac{pV}{T} = const \quad \text{або} \quad \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \quad (2.13)$$

де p_1, V_1, T_1 – тиск, об'єм і температура газу в початковому стані;
 p_2, V_2, T_2 – ті ж величини в кінцевому стані.

Закон Дальтона, що визначає тиск суміші газів:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad (2.14)$$

де p_i – парціальні тиску компонентів суміші;

n – число компонентів суміші.

Парціальним тиском називається тиск газу, який виробляв би цей газ, якщо б тільки він один знаходився в посудині, зайнятий сумішшю.

Молярна маса суміші газів:

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n}, \quad (2.15)$$

де m_i – маса і-го компонента суміші;

$\nu_i = \frac{m_i}{M_i}$ – кількість речовини і-го компонента суміші;

n – число компонентів суміші.

Масова частка і-го компонента суміші газу (в частках одиниці або відсотках):

$$\omega_i = \frac{m_i}{m}, \quad (2.16)$$

де m – маса суміші.

Концентрація молекул:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \rho}{M}, \quad (2.17)$$

де N – число молекул, що містяться в даній системі;

ρ – щільність речовини;

V – об'єм системи.

Формула справедлива не лише для газів, але й для будь-якого агре-

гатного стану речовини.

Основне рівняння кінетичної теорії газів:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_n \rangle, \quad (2.18)$$

де $\langle \varepsilon_n \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

Середня кінетична енергія поступального руху молекули:

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (2.19)$$

де k – постійна Больцмана.

Середня повна кінетична енергія молекули:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (2.20)$$

де i – число ступенів свободи молекули.

Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури:

$$p = nkT. \quad (2.21)$$

Швидкості молекул:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \text{ – середня квадратична;} \quad (2.22)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \text{ – середня арифметична;} \quad (2.23)$$

$$v_г = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \text{ – найбільш вірогідна,} \quad (2.24)$$

де m_1 – маса однієї молекули.

Відносна швидкість молекули:

$$u = v / v_г, \quad (2.25)$$

де v – швидкість даної молекули.

Середнє число $\langle z \rangle$ зіткнень за час $t = 1$ с:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}, \quad (2.26)$$

де $\langle l \rangle$ – середня довжина вільного пробігу молекули:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}, \quad (2.27)$$

де σ – ефективний діаметр молекули.

Питомі теплоємності газу при постійному об'ємі (c_v) й постійному тиску (c_p):

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}; \quad c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}. \quad (2.28)$$

Зв'язок між питомою c та молярною C теплоємностями:

$$c = C/M; \quad C = cM. \quad (2.29)$$

Рівняння Майера:

$$C_p - C_v = R. \quad (2.30)$$

Внутрішня енергія ідеального газу:

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} C_v T. \quad (2.31)$$

Перший початок термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A, \quad (2.32)$$

де Q – теплота, що повідомляється системі (газу);

ΔU – зміна внутрішньої енергії системи;

A – робота, здійснена системою проти зовнішніх сил.

Робота розширення газу:

а) в загальному випадку:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV; \quad (2.33)$$

б) при ізобаричному процесі:

$$A = p(V_2 - V_1); \quad (2.34)$$

в) при ізотермічному процесі:

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad (2.35)$$

г) при адіабатному процесі:

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_v \Delta T \quad \text{або} \quad A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right], \quad (2.36)$$

де $\gamma = c_p / c_v$ – показник адіабати.

Рівняння Пуассона, що зв'язують параметри ідеального газу при адіабатному процесі:

$$pV^\gamma = \text{const}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1}; \quad (2.37)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma}. \quad (2.38)$$

Термічний ККД циклу:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (2.39)$$

де Q_1 – теплота, отримана робочим тілом від тепловіддавача;

Q_2 – теплота, передана робочим тілом теплоприймачу.

Термічний ККД циклу Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (2.40)$$

де T_1 та T_2 – термодинамічні температури тепловіддавача й теплоприймача.

Коефіцієнт поверхневого натягу:

$$\alpha = \frac{F}{l} \quad \text{або} \quad \alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad (2.41)$$

де F – сила поверхневого натягу, яка діє на контур l , що обмежує поверхню рідини;

ΔE – зміна вільної енергії поверхневої плівки рідини, що пов'язана, зі зміною площі ΔS поверхні цієї плівки.

Формула Лапласа, яка виражає тиск p , що створюється сферичною поверхнею рідини:

$$p = \frac{2\alpha}{R}, \quad (2.42)$$

де R – радіус сферичної поверхні.

Висота підйому рідини в капілярній трубці:

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g R}, \quad (2.43)$$

де θ – крайовий кут ($\theta = 0$ при повному змочуванні стінок трубки рідиною; $\theta = \pi$ при повному незмочуванні);

R – радіус каналу трубки;

ρ – щільність рідини;

g – прискорення вільного падіння.

Висота підйому рідини між двома близькими й паралельними один одній площинами:

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g d}, \quad (2.44)$$

де d – відстань між площинами.

2.2 Методичні вказівки до розділу «Молекулярна фізика. Термодинаміка»

Під час вирішення задач на газові закони, необхідно мати на увазі, що ці закони є окремими випадками рівняння Менделєєва – Клапейрона. Розпочинаючи вирішення завдань з цієї теми, перш за все необхідно з'ясувати, які параметри газу залишаються незмінними. Потім необхідно записати рівняння Менделєєва – Клапейрона для кожного стану газу, привласнюючи індекси тільки для змінних величин.

У кінетичній теорії, яка розглядає газ як сукупність великого числа молекул, що хаотично рухаються, вживаються різні типи швидкостей молекул: середня квадратична $\langle v_{кв} \rangle$, середня арифметична $\langle v \rangle$ та найбільш імовірна v_0 . Середню квадратичну швидкість використовують в тих випадках, коли необхідно розрахувати будь-яку величину, пропорційну квадрату швидкості, наприклад кінетичну енергію поступального руху молекул газу, тиск газу.

Середня арифметична швидкість дозволяє визначити значення таких величин, які характеризують властивості газу, в формулу яких швидкість входить в першому ступені, наприклад, середнє число зіткнень молекули за одиницю часу, середній час вільного пробігу. Найбільш імовірною швидкістю v_g користуються у задачах, пов'язаних із застосуванням закону розподілу молекул за швидкостями.

Під час вирішення завдань на І початок термодинаміки необхідно мати на увазі, що зміна внутрішньої енергії ΔU однозначно визначається початковим та кінцевим станом газу, в той час як кількість теплоти Q та робота A суттєво залежать від способу, за допомогою якого газ переходить з одного стану в інший. Рішення термодинамічної задачі суттєво полегшується, якщо попередньо побудувати термодинамічну діаграму досліджуваного процесу.

Під час розрахунку сил поверхневого натягу слід враховувати, що ці сили діють вздовж будь-якого контуру, що лежить на поверхні рідини. При цьому сила поверхневого натягу, яка прикладена до кожного елемента цього контуру, перпендикулярна йому та спрямована по дотичній до поверхні.

Яким би тонким не був шар рідини (наприклад, у мильній бульбашці), він завжди має дві поверхні – зовнішню та внутрішню, вздовж кожної з яких діють сили поверхневого натягу.

2.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Визначити для сірчаної кислоти: 1) відносну молекулярну масу M_r , 2) молярну масу M .

Розв'язок. 1. Відносна молекулярна маса речовини дорівнює сумі відносних атомних мас усіх елементів, атоми яких входять до складу молекули даної речовини, і визначається за формулою:

$$M_r = \sum n_i A_{r,i}, \quad (1)$$

де n_i – число атомів i -го елемента, що входять в молекулу;

$A_{r,i}$ – відносна атомна маса i -го елемента.

Хімічна формула сірчаної кислоти має вигляд H_2SO_4 . Оскільки до складу молекули сірчаної кислоти входять атоми трьох елементів, то сума що стоїть у правій частині рівняння (1), буде складатися з трьох додатків і ця формула набуде вигляду:

$$M_r = n_1 A_{r,1} + n_2 A_{r,2} + n_3 A_{r,3}. \quad (2)$$

З формули сірчаної кислоти далі випливає, що $n_1 = 2$ (два атоми водню), $n_2 = 1$ (один атом сірки) та $n_3 = 4$ (чотири атома кисню).

Значення відносних атомних мас водню, сірки та кисню знайдемо в таблиці Д. І. Менделєєва або в табл. 14 додатка:

$$A_{r,1} = 1; \quad A_{r,2} = 32; \quad A_{r,3} = 16.$$

Підставивши значення n_i та $A_{r,i}$ у формулу (2), знайдемо відносну молекулярну масу сірчаної кислоти:

$$M_r = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 98.$$

2. Знаючи відносну молекулярну масу M_r , знайдемо молярну масу сірчаної кислоти за формулою:

$$M = M_r k, \quad (3)$$

де $k = 10^{-3}$ кг/моль.

Підставивши в (3) значення величин, отримаємо:

$$M = 98 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Приклад 2. Визначити молярну масу M суміші кисню масою $m_1 = 25$ г та азоту масою $m_2 = 75$ г.

Розв'язок. Молярна маса суміші M є відношення маси суміші m до кількості речовини суміші ν :

$$M = m / \nu. \quad (1)$$

Маса суміші дорівнює сумі мас компонентів суміші:

$$m = m_1 + m_2.$$

Кількість речовини суміші дорівнює сумі кількостей речовини компонентів:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}.$$

Підставивши у формулу (1) вирази m та ν , отримаємо:

$$M = \frac{m_1 + m_2}{m_1 / M_1 + m_2 / M_2}. \quad (2)$$

Застосувавши метод, використаний в прикладі 1, знайдемо молярні маси кисню M_1 та азоту M_2 :

$$M_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \quad M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Підставимо значення величин в (2) та зробимо обчислення:

$$M = \frac{25 \cdot 10^{-3} + 75 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3} / (32 \cdot 10^{-3}) + 75 \cdot 10^{-3} / (28 \cdot 10^{-3})} \text{ кг/моль} = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Приклад 3. У балоні об'ємом 10 л знаходиться гелій під тиском $p_1 = 1$ МПа та при температурі $T_1 = 300$ К. Після того як з балона було взято $m = 10$ г гелію, температура в балоні знизилася до $T_2 = 290$ К. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився в балоні.

Розв'язок. Для вирішення завдання скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона, застосувавши його до кінцевого стану газу:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \quad (1)$$

де m_2 – маса гелію в балоні в кінцевому стані;

M – молярна маса гелію;

R – молярна газова постійна.

З рівняння (1) виразимо тиск, який необхідно знайти:

$$p_2 = m_2 R T_2 / (M V). \quad (2)$$

Масу m_2 гелію виразимо через масу m_1 , яка відповідає початковому стану, і масу m гелію, що був узят із балона:

$$m_2 = m_1 - m. \quad (3)$$

Масу m_1 гелію знайдемо також з рівняння Менделєєва – Клапейрона, застосувавши його до початкового стану:

$$m_1 = M p_1 V / (R T_1). \quad (4)$$

Підставивши вираз маси m_1 у (3), а потім вираз m_2 в (2), знайдемо:

$$p_2 = \left(\frac{M p_1 V}{R T_1} - m \right) \frac{R T_2}{M V}$$

або

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M} \frac{RT_2}{V}. \quad (5)$$

Перевіримо, чи дає формула (5) одиницю тиску. Для цього в її праву частину замість символів величин підставимо їх одиниці. У правій частині формули два доданки. Очевидно, що перший з них дає одиницю тиску, тому що складається з двох множників, перший з яких (T_2 / T_1) – безрозмірний, а другий – тиск. Перевіримо другий доданок:

$$\begin{aligned} \frac{[m][R][T]}{[M][V]} &= \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ кг/моль}} \frac{1 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 1 \text{ К}}{1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ моль}}{1 \text{ кг}} \times \\ &\times \frac{1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ К}}{1 \text{ м}^3 \cdot 1 \text{ моль} \cdot 1 \text{ К}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}{1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2} = 1 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Паскаль є одиницею тиску. Зробимо обчислення за формулою (5), враховуючи, що $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (див. табл. 14 додатка):

$$p_2 = \left(\frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8,31}{10^{-2}} \cdot 290 \right) \text{ Па} = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,364 \text{ МПа}.$$

Приклад 4. Балон містить $m_1 = 80$ г кисню та $m_2 = 320$ г аргону. Тиск суміші $p = 1$ МПа, температура $T = 300$ К. Приймаючи дані гази за ідеальні, визначити об'єм V балона.

Розв'язок. За законом Дальтона, тиск суміші дорівнює сумі парціальних тисків газів, що входять до складу суміші. Відповідно до рівняння Менделєєва – Клапейрона парціальні тиски p_1 кисню та p_2 аргону виражаються формулами:

$$p_1 = m_1 RT / (M_1 V); \quad p_2 = m_2 RT / (M_2 V).$$

Отже, за законом Дальтона, тиск суміші газів:

$$p = p_1 + p_2 \quad \text{або} \quad p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V},$$

звідки об'єм балона:

$$V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{p}.$$

Зробимо обчислення, враховуючи, що $M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль;

$M_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг / моль (див. табл. 14 додатка):

$$V = \left(\frac{0,08}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,32}{40 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot \frac{8,31 \cdot 300}{10^6} \text{ м}^3 = 0,0262 \text{ м}^3 = 26,2 \text{ л.}$$

Приклад 5. Знайти середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_{об} \rangle$ обертального руху однієї молекули кисню при температурі $T = 350$ К, а також кінетичну енергію E_k обертального руху всіх молекул кисню масою $m = 4$ г.

Розв'язок. На кожну ступінь свободи молекули газу припадає однакова середня енергія $\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT$, де k – постійна Больцмана; T – термодинамічна температура газу. Так як обертальному руху двоатомної молекули (молекула кисню – двоатомна) відповідають два ступені свободи, то середня енергія обертального руху молекули кисню:

$$\langle \varepsilon_{об} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT. \quad (1)$$

Кінетична енергія обертального руху всіх молекул газу:

$$E_k = \langle \varepsilon_{об} \rangle N. \quad (2)$$

Число всіх молекул газу:

$$N = N_A \nu, \quad (3)$$

де N_A – постійна Авогадро;

ν – кількість речовини.

Якщо врахувати, що кількість речовини $\nu = m / M$, де m – маса газу; M – молярна маса газу, то формула (3) набуде вигляду:

$$N = N_A \frac{m}{M}.$$

Підставивши вираз N у формулу (2), отримаємо:

$$E_k = N_A m \langle \varepsilon_{об} \rangle / M. \quad (4)$$

Зробимо обчислення, враховуючи, що для кисню $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (див. табл. 14 додатка):

$$\langle \varepsilon_{об} \rangle = kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 \text{ Дж} = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж};$$

$$E_k = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 364 \text{ Дж.}$$

Приклад 6. Обчислити питомі теплоємності при постійному об'ємі й при постійному тиску неону та водню, приймаючи ці гази за ідеальні.

Розв'язок. Питомі теплоємності ідеальних газів виражаються формулами:

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}; \quad (1)$$

$$c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}, \quad (2)$$

де i – число ступенів свободи молекули газу;

M – молярна маса.

Для неону (одноатомний газ) $i = 3$ та $M = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (див. табл. 14 додатка).

Зробимо обчислення:

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 6,24 \cdot 10^2 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$c_p = \frac{3+2}{2} \frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,04 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Для водню (двоатомний газ) $i = 5$ і $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Тоді:

$$c_v = \frac{5}{2} \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$c_p = \frac{5+2}{2} \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Приклад 7. Обчислити питомі теплоємності c_v та c_p суміші неону й водню, якщо масові частки неону та водню складають $\omega_1 = 80\%$ та $\omega_2 = 20\%$. Значення питомих теплоємностей газів взяти з попереднього прикладу.

Розв'язок. Питому теплоємність c_v суміші при постійному об'ємі знайдемо наступним способом. Теплоту, необхідну для нагрівання суміші на ΔT , виразимо двома способами:

$$Q = c_v (m_1 + m_2) \Delta T; \quad (1)$$

$$Q = (c_{v,1}m_1 + c_{v,2}m_2)\Delta T, \quad (2)$$

де $c_{v,1}$ – питома теплоємність неону;

$c_{v,2}$ – питома теплоємність водню.

Прирівнявши праві частини (1) і (2) та розділивши обидві частини отриманої рівності на ΔT , отримаємо $c_v(m_1 + m_2) = c_{v,1}m_1 + c_{v,2}m_2$. Звідси:

$$c_v = c_{v,1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{v,2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

або

$$c_v = c_{v,1}\omega_1 + c_{v,2}\omega_2,$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{та} \quad \omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Міркуючи так само, отримаємо формулу для обчислення питомої теплоємності суміші при постійному тиску:

$$c_p = c_{p,1}\omega_1 + c_{p,2}\omega_2.$$

Зробимо обчислення:

$$\begin{aligned} c_v &= (6,24 \cdot 10^2 \cdot 0,8 + 1,04 \cdot 10^4 \cdot 0,2) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = \\ &= 2,58 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 2,58 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}); \\ c_p &= (1,04 \cdot 10^3 \cdot 0,8 + 1,46 \cdot 10^4 \cdot 0,2) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = \\ &= 3,75 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 3,75 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}). \end{aligned}$$

Приклад 8. Кисень масою $m = 2$ кг займає об'єм $V_1 = 1$ м³ та знаходиться під тиском $p_1 = 0,2$ МПа. Газ був нагрітий спочатку при постійному тиску до об'єму $V_2 = 3$ м³, а потім при постійному об'ємі до тиску $p_2 = 0,5$ МПа (рис. 4). Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу, роботу, яка ним виконана A та теплоту Q , передану газу. Побудувати графік процесу.

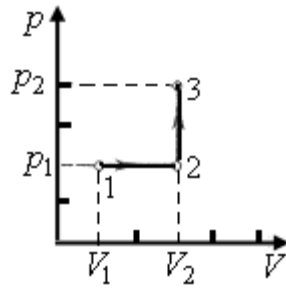


Рисунок 4 – Термодинамічна діаграма

Розв'язок. Зміна внутрішньої енергії газу:

$$\Delta U = c_v m \Delta T = \frac{i}{2} \frac{R}{M} m \Delta T \quad (1)$$

де i – число ступенів свободи молекул газу (для двохатомних молекул кисню $i = 5$);

$\Delta T = T_3 - T_1$ – різниця температур газу в кінцевому (третьому) й початковому станах.

Початкову й кінцеву температуру газу знайдемо з рівняння Менделєєва – Клапейрона $pV = \frac{m}{M} RT$, звідки:

$$T = pVM / (mR).$$

Робота розширення газу при постійному тиску виражається формулою:

$$A_1 = \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1). \quad (2)$$

Робота газу, що нагрівається при постійному об'ємі дорівнює нулю:

$$A_2 = 0.$$

Отже, повна робота, що здійснюється газом:

$$A = A_1 + A_2 = A_1.$$

Відповідно до першого початку термодинаміки, тепло Q , яке передане газу, дорівнює сумі зміни внутрішньої енергії ΔU та роботи A :

$$Q = \Delta U + A.$$

Зробимо обчислення, врахувавши, що для кисню $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (див. табл. 14 додатка):

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 2887 \text{ К};$$

$$A_1 = \frac{8,31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 0,400 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0,4 \text{ МДж};$$

$$A = A_1 = 0,4 \text{ МДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{8,31 \cdot 2 \cdot (2887 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 3,24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3,24 \text{ МДж};$$

$$Q = (3,24 + 0,4) \text{ МДж} = 3,64 \text{ МДж}.$$

Графік процесу наведено на рисунку 4.

Приклад 9. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0,02$ кг при температурі $T_1 = 300$ К. Водень спочатку розширився адіабатно, збільшивши свій об'єм у $n_1 = 5$ разів, а потім був стиснутий ізотермічно, причому об'єм газу зменшився в $n_2 = 5$ разів (рис. 5). Знайти температуру в кінці адіабатного розширення й роботу, яка виконана газом при цих процесах. Зобразити процес графічно.

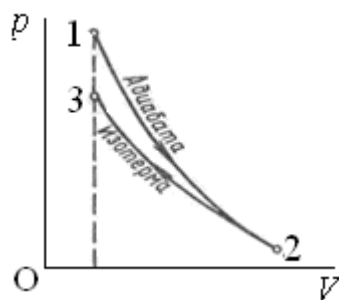


Рисунок 5 – Графік процесу щодо приклада 9

Розв'язок. Температури та об'єми газу, що здійснюють адіабатний процес, пов'язані між собою співвідношенням:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad \text{або} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}},$$

де γ – відношення теплоємності газу при постійному тиску й сталому об'ємі:

$$n_1 = V_2 / V_1.$$

Звідси отримуємо такий вираз для кінцевої температури:

$$T_2 = T_1 / n_1^{\gamma-1}.$$

Робота A_1 газу при адіабатному розширенні може бути визначена за формулою:

$$A_1 = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2),$$

де C_v – молярна теплоємність газу при постійному об'ємі. Робота газу при ізотермічному процесі може бути виражена у вигляді:

$$A_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \quad \text{або} \quad A_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{1}{n_2},$$

де $n_2 = V_2 / V_3$.

Зробимо обчислення, враховуючи, що для водню як двоатомного газу $\gamma = 1,4$, $i = 5$, $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$T_2 = \frac{300}{5^{1,4-1}} \text{ К} = \frac{300}{5^{0,4}} \text{ К}.$$

Так як $5^{0,4} = 1,91$ (знаходиться логарифмуванням), то:

$$T_2 = \frac{300}{1,91} \text{ К} = 157 \text{ К};$$

$$A_1 = \frac{0,02 \cdot 5 \cdot 8,31}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2} (300 - 157) \text{ Дж} = 29,8 \text{ кДж};$$

$$A_2 = \frac{0,02 \cdot 8,31}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 157 \cdot \ln \frac{1}{5} \text{ Дж} = -21 \text{ кДж}.$$

Знак мінус показує, що при стисненні робота газу відбувається над

газом зовнішніми силами.

Графік процесу наведено на рис. 5.

Приклад 10. Теплова машина працює за оборотним циклом Карно. Температура тепловіддавача $T_1 = 500$ К. Визначити термічний ККД η циклу й температуру T_2 теплоприймача теплової машини, якщо за рахунок кожного кілоджоуля теплоти, отриманої від тепловіддавача, машина здійснює роботу $A = 350$ Дж.

Розв'язок. Термічний ККД теплової машини показує, яка частка теплоти, отриманої від тепловіддавача, перетворюється на механічну роботу. Термічний ККД виражається формулою:

$$\eta = A / Q_1,$$

де Q_1 – теплота, отримана від тепловіддавача;

A – робота, яка виконана робочим тілом теплової машини.

Знаючи ККД циклу, можна за формулою $\eta = (T_1 - T_2) / T_1$ визначити температуру охолоджувача T_2 :

$$T_2 = T_1(1 - \eta).$$

Зробимо обчислення:

$$\eta = 350 / 1000 = 0,35; \quad T_2 = 500(1 - 0,35) \text{ К} = 325 \text{ К}.$$

Приклад 11. Знайти додатковий тиск всередині мильної бульбашки діаметром $d = 10$ см. Яку роботу треба зробити, щоб видути цю бульбашку?

Розв'язок. Плівка мильної бульбашки має дві сферичні поверхні: зовнішню й внутрішню. Обидві поверхні чинять тиск на повітря, укладений всередині бульбашки. Так як товщина плівки надзвичайно мала, то діаметри обох поверхонь практично однакові. Тому додатковий тиск:

$$p = 2 \frac{2\alpha}{r},$$

де r – радіус бульбашки. Так як $r = d / 2$, то

$$p = 8\alpha / d.$$

Робота, яку потрібно зробити, щоб, розтягуючи плівку, збільшити її поверхню на ΔS , виражається формулою:

$$A = \alpha \Delta S \quad \text{або} \quad A = \alpha(S - S_0).$$

У даному випадку S – загальна площа двох сферичних поверхонь плівки мильної бульбашки; S_0 – загальна площа двох поверхонь плоскої плівки, яка затягує отвір трубки до видування бульбашки. Нехтуючи S_0 , отримаємо:

$$A = \alpha S = 2\pi d^2 \alpha.$$

Зробимо обчислення:

$$p = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,1} \text{ Па} = 3,2 \text{ Па};$$

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \text{ мДж}.$$

2.4. Контрольна робота № 2

Таблиця варіантів

Варіант	Номери задач							
0	210	220	230	240	250	260	270	280
1	201	211	221	231	241	251	261	271
2	202	212	222	232	242	252	262	272
3	203	213	223	233	243	253	263	273
4	204	214	224	234	244	254	264	274
5	205	215	225	235	245	255	265	275
6	206	216	226	236	246	256	266	276
7	207	217	227	237	247	257	267	277
8	208	218	228	238	248	258	268	278
9	209	219	229	239	249	259	269	279

201. Визначити кількість речовини ν та число N молекул кисню масою $m = 0,5$ кг.

202. Скільки атомів міститься у ртуті: 1) кількістю речовини $\nu = 0,2$ моль; 2) масою $m = 1$ г?

203. Вода при температурі $t = 4^\circ\text{C}$ займає об'єм $V = 1 \text{ см}^3$. Визначити кількість речовини ν та число N молекул води.

204. Знайти молярну масу M і масу m_m однієї молекули кухонної солі.

205. Визначити масу m_m однієї молекули вуглекислого газу.

206. Визначити концентрацію n молекул кисню, що знаходиться в посудині місткістю $V = 2$ л. Кількість речовини ν кисню дорівнює $0,2$ моль.

207. Визначити кількість речовини ν водню, що заповнює посудину об'ємом $V = 3$ л, якщо концентрація молекул газу в посудині $n = 2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

208. У балоні місткістю $V = 3$ л міститься кисень масою $m = 10$ г. Визначити концентрацію молекул газу.

209. Визначити відносну молекулярну масу M_r : 1) води; 2) вуглекислого газу; 3) кухонної солі.

210. Визначити кількість речовини ν та число N молекул азоту масою $m = 0,2$ кг.

211. У циліндр довжиною $l = 1,6$ м, який заповнений повітрям при нормальному атмосферному тиску, почали повільно всовувати поршень площею підстави $S = 200 \text{ см}^2$. Визначити силу F , яка діє на поршень, якщо його зупинити на відстані $l_1 = 10$ см від дна циліндра.

212. У балоні знаходиться газ при температурі $T_1 = 400$ К. До якої температури T_2 треба нагріти газ, щоб його тиск збільшився в $1,5$ разів?

213. Балон місткістю $V = 20$ л заповнений азотом при температурі $T = 400$ К. Коли частину газу витратили, тиск у балоні знизився на $\Delta p = 200$ кПа. Визначити масу m витраченого газу. Процес вважати ізотермічним.

214. У балоні місткістю $V = 15$ л знаходиться аргон під тиском $p_1 = 600$ кПа та при температурі $T_1 = 300$ К. Коли з балона було взято певну кількість газу, тиск у балоні знизився до $p_2 = 400$ кПа, а температура встановилася $T_2 = 260$ К. Визначити масу m аргону, взятого з балону.

215. Дві посудини однакового об'єму містять кисень. В одній посудині тиск $p_1 = 2$ МПа та температура $T_1 = 800$ К, в іншій $p_2 = 2,5$ МПа, $T_2 = 200$ К. Посудини з'єднали трубкою та охолодили кисень, що знаходиться в них, до температури $T = 200$ К. Визначити тиск p , що встановився в посудинах.

216. Обчислити щільність ρ азоту, що знаходиться в балоні під тиском $p = 2$ МПа та має температуру $T = 400$ К.

217. Визначити відносну молекулярну масу M_r газу, якщо при температурі $T = 154$ К та тиску $P = 2,8$ МПа він має щільність $\rho = 6,1 \text{ кг/м}^3$.

218. Знайти щільність ρ азоту при температурі $T = 400$ К та тиску $p = 2$ МПа.

219. У посудині місткістю $V = 40$ л знаходиться кисень при температурі $T = 300$ К. Коли частина газу витратили, тиск у балоні знизився на $\Delta p = 100$ кПа. Визначити масу m витраченого кисню. Процес вважати ізотермічним.

220. Визначити щільність ρ водяної пари, що знаходиться під тиском $p = 2,5$ кПа та має температуру $T = 250$ К.

221. Визначити внутрішню енергію U водню, а також середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon \rangle$ молекули цього газу при температурі $T = 300$ К, якщо кількість речовини ν цього газу дорівнює $0,5$ моль.

222. Визначити сумарну кінетичну енергію E_k поступального руху всіх молекул газу, що знаходиться в посудині місткістю $V = 3$ л під тиском $p = 540$ кПа.

223. Кількість речовини гелію $\nu = 1,5$ моль, температура $T = 120$ К. Визначити сумарну кінетичну енергію E_k поступального руху всіх молекул цього газу.

224. Молярна внутрішня енергія U_m деякого двоатомного газу дорівнює $6,02$ кДж/моль. Визначити середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_{об} \rangle$ обертального руху однієї молекули цього газу. Газ вважати ідеальним.

225. Визначити середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon \rangle$ однієї молекули водяної пари при температурі $T = 500$ К.

226. Визначити середню квадратичну швидкість $\langle v_{кв} \rangle$ молекули газу, укладеного в посудину місткістю $V = 2$ л під тиском $p = 200$ кПа. Маса газу $m = 0,3$ г.

227. Водень знаходиться при температурі $T = 300$ К. Знайти середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_{об} \rangle$ обертального руху однієї молекули, а також сумарну кінетичну енергію E_k всіх молекул цього газу; кількість водню $\nu = 0,5$ моль.

228. При якій температурі середня кінетична енергія $\langle \varepsilon_n \rangle$ поступального руху молекули газу дорівнює $4,14 \cdot 10^{-21}$ Дж?

229. У азоті зважені найдрібніші пилинки, які рухаються так, якщо б вони були дуже великими молекулами. Маса кожної порошокинки дорівнює $6 \cdot 10^{-10}$ г. Газ знаходиться при температурі $T = 400$ К. Визначити середні квадратичні швидкості $\langle v_{кв} \rangle$, а також середні кінетичні енергії $\langle \varepsilon_n \rangle$ поступального руху молекули азоту й пилинки.

230. Визначити середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_n \rangle$ поступального руху й $\langle \varepsilon_{об} \rangle$ обертального руху молекули азоту при температурі $T = 1$ кВ.

Визначити також повну кінетичну енергію E_k молекули при тих же умовах.

231. Визначити молярну масу M двоатомного газу та його питомі теплоємності, якщо відомо, що різниця $c_p - c_v$ питомих теплоємностей цього газу дорівнює $260 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

232. Знайти питомі c_p і c_v а також молярні C_p та C_v теплоємності вуглекислого газу.

233. Визначити показник адиабати γ ідеального газу, який при температурі $T = 350 \text{ К}$ та тиску $p = 0,4 \text{ МПа}$ займає об'єм $V = 300 \text{ л}$ і має теплоємність $C_v = 857 \text{ Дж}/\text{К}$.

234. У посудині місткістю $V = 6 \text{ л}$ знаходиться при нормальних умовах двоатомний газ. Визначити теплоємність C_v цього газу при постійному об'ємі.

235. Визначити відносну молекулярну масу M_r та молярну масу M газу, якщо різниця його питомих теплоємностей $c_p - c_v = 2,08 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

236. Визначити молярні теплоємності газу, якщо його питомі теплоємності $c_v = 10,4 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ та $c_p = 14,6 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

237. Знайти питомі c_v і c_p та молярні C_v і C_p теплоємності азоту і гелію.

238. Обчислити питомі теплоємності газу, якщо його молярна маса $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ та відношення теплоємностей $C_p / C_v = 1,67$.

239. Трьохатомний газ під тиском $p = 240 \text{ кПа}$ та температурі $t = 20^\circ\text{C}$ займає об'єм $V = 10 \text{ л}$. Визначити теплоємність C_p цього газу при постійному тиску.

240. Одноатомний газ при нормальних умовах займає об'єм $V = 5 \text{ л}$. Обчислити теплоємність цього газу при постійному об'ємі.

241. Знайти середнє число $\langle z \rangle$ зіткнень за час $t = 1 \text{ с}$ та довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекули гелію, якщо газ знаходиться під тиском $p = 2 \text{ кПа}$ при температурі $T = 200 \text{ К}$.

242. Визначити середню довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекули азоту в посудині місткістю $V = 5 \text{ л}$. Маса газу $m = 0,5 \text{ г}$.

243. Водень знаходиться під тиском $p = 20 \text{ мкПа}$ та має температуру $T = 300 \text{ К}$. Визначити середню довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекули такого газу.

244. При нормальних умовах довжина вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекули водню дорівнює $0,160$ мкм. Визначити діаметр d молекули водню.

245. Яка середня арифметична швидкість $\langle v \rangle$ молекул кисню при нормальних умовах, якщо відомо, що середня довжина вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекули кисню при цих умовах дорівнює 100 нм?

246. Кисень знаходиться під тиском $p = 133$ нПа при температурі $T = 200$ К. Обчислити середнє число $\langle z \rangle$ зіткнень молекули кисню при цих умовах за час $\tau = 1$ с.

247. При якому тиску p середня довжина вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекул азоту дорівнює 1 м, якщо температура газу $t = 10^\circ\text{C}$?

248. У посудині місткістю $V = 5$ л знаходиться водень масою $m = 0,5$ г. Визначити середню довжину вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекули водню в цій посудині.

249. Середня довжина вільного пробігу $\langle l \rangle$ молекули водню при деяких умовах дорівнює 2 мм. Знайти щільність ρ водню при цих умовах.

250. У сферичній колбі місткістю $V = 3$ л, що містить азот, створений вакуум з тиском $p = 80$ мкПа. Температура газу $T = 250$ К. Чи можна вважати вакуум в колбі високим?

Примітка. Вакуум вважається високим, якщо довжина вільного пробігу молекул в ньому багато більше лінійних розмірів посудини.

251. Визначити кількість теплоти Q , яку треба повідомити кисню об'ємом $V = 50$ л при його ізохоричному нагріванні, щоб тиск газу підвищився на $\Delta p = 0,5$ МПа.

252. При ізотермічному розширенні азоту при температурі $T = 280$ К об'єм його зріс удвічі. Визначити: 1) роботу A , яка виконана при розширенні газу; 2) зміну ΔU внутрішньої енергії; 3) кількість теплоти Q , яка отримана газом. Маса азоту $m = 0,2$ кг.

253. При адіабатному стиску тиск повітря було збільшено від $p_1 = 50$ кПа до $p_2 = 0,5$ МПа. Потім, при незмінному об'ємі, температура повітря була знижена до початкової. Визначити тиск p_3 газу в кінці процесу.

254. Кисень масою $m = 200$ г займає об'єм $V_1 = 100$ л і знаходиться під тиском $p_1 = 200$ кПа. Під час нагрівання газ розширився при постійному тиску до об'єму $V_2 = 300$ л, а потім його тиск зріс до $p_3 = 500$ кПа при незмінному об'ємі. Знайти зміну внутрішньої енергії ΔU газу, роботу A , яка виконана газом і теплоту Q , яка передана газу. Побудувати графік процесу.

255. Об'єм водню при ізотермічному розширенні при температур $T = 300 \text{ К}$ збільшився в $n = 3$ рази. Визначити роботу A , яка виконана газом, і теплоту Q , яка отримана при цьому. Маса m водню дорівнює 200 г .

256. Азот масою $m = 0,1 \text{ кг}$ був ізобарно нагрітий від температури $T_1 = 200 \text{ К}$ до температури $T_2 = 400 \text{ К}$. Визначити роботу A , яка виконана газом, отриману їм теплоту Q і зміну ΔU внутрішньої енергії азоту.

257. У скільки разів збільшиться об'єм водню, який містить кількість речовини $\nu = 0,4$ моль при ізотермічному розширенні, якщо при цьому газ отримає кількість теплоти $Q = 800 \text{ Дж}$? Температура водню $T = 300 \text{ К}$.

258. Яка робота A відбувається при ізотермічному розширенні водню масою $m = 5 \text{ г}$, взятого при температурі $T = 290 \text{ К}$, якщо об'єм газу збільшується втричі?

259. Яка доля ω_1 кількості теплоти Q , що підводиться до ідеального двоатомного газу при ізобарному процесі, витрачається на збільшення ΔU внутрішньої енергії газу, і яка частка ω_2 – на роботу A розширення? Розглянути три випадки, якщо газ: 1) одноатомний, 2) двоатомний; 3) трьохатомний.

260. Визначити роботу A , яку здійснить азот, якщо йому при постійному тиску надати кількість теплоти $Q = 21 \text{ кДж}$. Знайти також зміну ΔU внутрішньої енергії газу.

261. Ідеальний газ робить цикл Карно при температурах теплоприймача $T_2 = 290 \text{ К}$ та тепловіддавача $T_1 = 400 \text{ К}$. У скільки разів збільшиться коефіцієнт корисної дії η циклу, якщо температура тепловіддавача зросте до $T_1' = 600 \text{ К}$?

262. Ідеальний газ робить цикл Карно. Температура T_1 тепловіддавача в чотири рази ($n = 4$) більше температури теплоприймача. Яку частку ω кількості теплоти, отриманого за один цикл від тепловіддавача газ віддасть теплоприймачу?

263. Визначити роботу A_2 ізотермічного стиснення газу, що здійснює цикл Карно, ККД якого $\eta = 0,4$, якщо робота ізотермічного розширення дорівнює $A_1 = 8 \text{ Дж}$.

264. Газ, що здійснює цикл Карно, віддав теплоприймачу теплоту $Q_2 = 14 \text{ кДж}$. Визначити температуру T_1 тепловіддавача, якщо при температурі теплоприймача $T_2 = 280 \text{ К}$ робота циклу $A = 6 \text{ кДж}$.

265. Газ, будучи робочою речовиною в циклі Карно, отримав від тепловіддавача теплоту $Q_1 = 4,38 \text{ кДж}$ та виконав роботу $A = 2,4 \text{ кДж}$. Визначити температуру тепловіддавача, якщо температура теплоприймача $T_2 = 273 \text{ К}$.

266. Газ, що здійснює цикл Карно, віддав теплоприймачу 67 % теплоти, отриманої від тепловіддавача. Визначити температуру T_2 теплоприймача, якщо температура тепловіддавача $T_1 = 430$ К.

267. У скільки разів збільшиться коефіцієнт корисної дії η циклу Карно при підвищенні температури тепловіддавача від $T_1 = 380$ К до $T_1' = 560$ К? Температура теплоприймача $T_2 = 280$ К.

268. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Температура тепловіддавача $T_1 = 500$ К, температура теплоприймача $T_2 = 250$ К. Визначити термічний ККД η циклу, а також роботу A_1 робочої речовини при ізотермічному розширенні, якщо при ізотермічному стисненні здійснена робота $A_2 = 70$ Дж.

269. Газ, що здійснює цикл Карно, отримує теплоту $Q_1 = 84$ кДж. Визначити роботу A газу, якщо температура T_1 тепловіддавача в три рази вище температури T_2 теплоприймача.

270. У циклі Карно газ отримав від тепловіддавача теплоту $Q_1 = 500$ Дж та виконав роботу $A = 100$ Дж. Температура тепловіддавача $T_1 = 400$ К. Визначити температуру T_2 теплоприймача.

271. Знайти масу m води, що увійшла в скляну трубку з діаметром каналу $d = 0,8$ мм, яка опущена у воду на малу глибину. Вважати змочування повним.

272. Яку роботу A треба виконати під час видування мильної бульбашки, щоб збільшити її об'єм від $V_1 = 8$ см³ до $V_2 = 16$ см³? Вважати процес ізотермічним.

273. Яка енергія E виділиться при злитті двох крапель ртуті діаметром $d_1 = 0,8$ мм і $d_2 = 1,2$ мм в одну краплю?

274. Визначити тиск p усередині повітряної бульбашки діаметром $d = 4$ мм, що знаходиться у воді біля самої її поверхні. Вважати атмосферний тиск нормальним.

275. Простір між двома скляними паралельними пластинками з площею поверхні $S = 100$ см² кожна, які розташовані на відстані $l = 20$ мкм один від одного, заповнено водою. Визначити силу F , яка притискає пластинки один до одної. Вважати меніск увігнутим з діаметром d , рівним відстані між пластинками.

276. Гліцерин піднявся в капілярній трубці діаметром каналу $d = 1$ мм на висоту $h = 20$ мм. Визначити поверхневий натяг α гліцерину. Вважати змочування повним.

277. У воду опущена на дуже малу глибину скляна трубка з діаметром каналу $d = 1$ мм. Визначити масу m води, що увійшла в трубку.

278. На скільки тиск p повітря всередині мильної бульбашки більше нормального атмосферного тиску p_0 якщо діаметр бульбашки $d = 5$ мм?

279. Повітряна бульбашка діаметром $d = 2,2$ мкм знаходиться у воді біля самої її поверхні. Визначити щільність ρ повітря в бульбашці, якщо повітря над поверхнею води знаходиться при нормальних умовах.

280. Дві краплі ртуті радіусом $r = 1,2$ мм кожна злилися в одну велику краплю. Визначити енергію E , яка виділиться при цьому злитті. Вважати процес ізотермічним.

3 ЕЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

3.1 Основні формули

Закон Кулона:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (3.1)$$

де F – сила взаємодії точкових зарядів Q_1 та Q_2 ;

r – відстань між зарядами;

ϵ – діелектрична проникність;

ϵ_0 – електрична постійна.

Напруженість електричного поля й потенціал:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}; \quad \varphi = \frac{P}{Q}, \quad (3.2)$$

де P – потенційна енергія точкового позитивного заряду Q , що знаходиться в даній точці поля (за умови, що потенційна енергія заряду, віддаленого у нескінченність, дорівнює нулю).

Сила, яка діє на точковий заряд, що знаходиться в електричному полі, і потенційна енергія цього заряду:

$$\vec{F} = Q\vec{E}; \quad P = Q\varphi. \quad (3.3)$$

Напруженість і потенціал поля, які створені системою точкових зарядів (принцип суперпозиції електричних полів):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i; \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i, \quad (3.4)$$

де \vec{E}_i , φ_i – напруженість і потенціал у цій точці поля, які створені i -м зарядом.

Напруженість і потенціал поля, що створені точковим зарядом:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad (3.5)$$

де r – відстань від заряду Q до точки, в якій визначаються напруженість і потенціал.

Напруженість і потенціал поля, що створює провідна заряджена сфера радіуса R на відстані r від центра сфери:

а) при $r < R$:

$$E = 0; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}; \quad (3.6)$$

б) при $r = R$:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}; \quad (3.7)$$

в) при $r > R$:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad (3.8)$$

де Q – заряд сфери.

Лінійна густина заряду:

$$\tau = Q/l, \quad (3.9)$$

де l – довжина лінії, на якій розподілений заряд Q .

Поверхнева щільність заряду:

$$\sigma = Q/S, \quad (3.10)$$

де S – площа поверхні, на якій розподілений заряд Q .

Якщо заряд рівномірно розподілений вздовж лінії з лінійною щільністю τ , то на лінії виділяється мала ділянка довжиною dl із зарядом $dQ = \tau dl$. Такий заряд можна розглядати як точковий і застосовувати формули:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad (3.11)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, спрямований від виділеного елемента dl до точки, в якій обчислюється напруженість.

Використовуючи принцип суперпозиції електричних полів, знаходимо інтегруванням напруженість \vec{E} і потенціал φ поля, які створені розподіленими зарядами:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_l \frac{dl \vec{r}}{r^2}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_l \frac{dl}{r}. \quad (3.12)$$

Інтегрування ведеться вздовж всієї довжини l зарядженої лінії (див. приклади 5 і 8).

Напруженість поля, яке створене нескінченною прямою рівномірно зарядженою лінією або нескінченно довгим циліндром:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad (3.13)$$

де r – відстань від нитки або осі циліндра до точки, напруженість поля в якій визначається.

Напруженість поля, яке створене нескінченною рівномірною зарядженою площиною:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}. \quad (3.14)$$

Зв'язок потенціалу з напруженістю:

а) в загальному випадку:

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad \text{або} \quad \vec{E} = -\left(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right); \quad (3.15)$$

б) у випадку однорідного поля:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}; \quad (3.16)$$

в) у разі поля, що володіє центральною або осьовою симетрією:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (3.17)$$

Електричний момент диполя:

$$\vec{p} = |Q|\vec{l}, \quad (3.18)$$

де Q – заряд;

\vec{l} – плече диполя (векторна величина, спрямована від негативного заряду до позитивного й чисельно дорівнює відстані між зарядами).

Робота сил поля з переміщення заряду Q з точки поля з потенціалом φ_1 в точку з потенціалом φ_2 :

$$A_{12} = Q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.19)$$

Електроємність:

$$C = \frac{Q}{\varphi} \quad \text{або} \quad C = \frac{Q}{U}, \quad (3.20)$$

де φ – потенціал провідника (за умови, що в нескінченності потенціал провідника приймається рівним нулю);

U – різниця потенціалів пластин конденсатора.

Електроємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \quad (3.21)$$

де S – площа пластини (однієї) конденсатора;

d – відстань між пластинами.

Електроємність батареї конденсаторів:

а) при послідовному з'єднанні:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}; \quad (3.22)$$

б) при паралельному з'єднанні:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad (3.23)$$

де N – число конденсаторів в батареї.

Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{QU}{2}; \quad W = \frac{CU^2}{2}; \quad W = \frac{Q^2}{2C}. \quad (3.24)$$

Сила постійного струму:

$$I = \frac{Q}{t}, \quad (3.25)$$

де Q – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час t .

Щільність струму:

$$j = \frac{I}{S}, \quad (3.26)$$

де S – площа поперечного перерізу провідника.

Зв'язок щільності струму з середньою швидкістю $\langle v \rangle$ направленою руху заряджених частинок:

$$j = Qn\langle v \rangle, \quad (3.27)$$

де Q – заряд частинки;

n – концентрація заряджених частинок.

Закон Ома:

а) для ділянки кола, що не містить ЕРС:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}, \quad (3.28)$$

де $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – різниця потенціалів (напруга) на кінцях ділянки кола;

R – опір ділянки;

б) для ділянки кола, яке містить ЕРС:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R}, \quad (3.29)$$

де ε – ЕРС джерела струму;

R – повний опір ділянки (сума зовнішніх і внутрішніх опорів);

в) для замкнутого (повного) ланцюга:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_i}, \quad (3.30)$$

де R – зовнішній опір кола;

R_i – внутрішній опір ланцюга.

Закони Кірхгофа:

а) перший закон:

$$\sum I_i = 0, \quad (3.31)$$

де $\sum I_i$ – алгебраїчна сума сил струмів, що сходяться у вузлі;

б) другий закон:

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i, \quad (3.32)$$

де $\sum I_i R_i$ – алгебраїчна сума добутків сил струмів на опору ділянок;

$\sum \varepsilon_i$ – алгебраїчна сума ЕРС.

Опір R і провідність G провідника:

$$R = \frac{\rho l}{S}; \quad G = \frac{\gamma S}{l}, \quad (3.33)$$

де ρ – питомий опір;

γ – питома провідність;

l – довжина провідника;

S – площа поперечного перерізу провідника.

Опір системи провідників:

а) при послідовному з'єднанні:

$$R = \sum R_i; \quad (3.34)$$

б) при паралельному з'єднанні:

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}, \quad (3.35)$$

де R_i – опір i -го провідника.

Робота струму:

$$A = IUt; \quad A = I^2 Rt; \quad A = \frac{U^2 t}{R}. \quad (3.36)$$

Перша формула справедлива для будь-якої ділянки ланцюга, на кінцях якого підтримується напруга U , останні дві – для ділянки, що не містить ЕРС.

Потужність струму:

$$P = IU; \quad P = I^2 R; \quad P = \frac{U^2}{R}. \quad (3.37)$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$Q = I^2 Rt. \quad (3.38)$$

Закон Ома в диференційній формі:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (3.39)$$

де γ – питома провідність;

\vec{E} – напруженість електричного поля;

\vec{j} – щільність струму.

Зв'язок питомої провідності γ з рухливістю b заряджених частинок (іонів):

$$\gamma = Qn(b_+ + b_-), \quad (3.40)$$

де Q – заряд іона;

n – концентрація іонів;

b_+ і b_- – рухливості позитивних і негативних іонів.

3.2 Методичні вказівки до розділу «Електростатика. Постійний електричний струм»

У задачах на знаходження напруженості E електричного поля:

а) поле утворене одним або кількома точковими зарядами. В цьому випадку використовують формули (3.1), (3.2) та принципи суперпозиції електричних полів (формули (3.4));

б) поле утворене зарядами, які рівномірно розподілені по сферичним, циліндричним або плоским поверхням. Тоді застосовують формули (3.6) – (3.8), (3.13), (3.14), відповідно, які виведені за допомогою теореми Остроградського – Гауса. Нескінченно довгим циліндром (або ниткою) можна вважати будь-який реальний циліндр (або нитку) для таких точок, відстань від яких до осі циліндра (нитки) значно менша, ніж до його кінців. Теж саме справедливо для визначення нескінченної площини;

в) якщо заряджене тіло не є ні сферою, ні нескінченно довгим циліндром, ні нескінченною площиною, то для визначення напруженості поля необхідно розбити тіло на нескінченно малі елементи, знайти за формулою (3.5) напруженість $d\vec{E}$ поля, що створена в цій точці кожним елементом, а потім підсумувати всі елементарні напруженості.

Для обчислення потенціалу поля, яке створене одним або кількома точковими зарядами, застосовують формулу (3.5), а також принцип суперпозиції полів (формула (3.4)).

Під час розрахунку з'єднань конденсаторів слід мати на увазі, що паралельним називається таке з'єднання конденсаторів, при якому на обкладинках конденсаторів встановлюється однакова різниця потенціалів, а заряд системи дорівнює сумі зарядів кожного конденсатора окремо.

Послідовне з'єднання таке, при якому заряди конденсаторів рівні між собою, а різниці потенціалів сумуються.

Для обчислення сили струму та щільності струму, а також розрахунку опорів при наявності однорідних провідників застосовують закон Ома в інтегральній (3.28) або диференціальній (3.39) формі.

Застосовуючи закон Ома (3.29) для ділянки ланцюга, що містить ЕРС, необхідно дотримуватися наступних правил:

а) накреслити схему та позначити на ній полюси всіх джерел, а також напрямок струму в ланцюзі (якщо він невідомий, то треба вказати напрямок);

б) ЕРС вважати позитивною на ділянці 1 – 2, якщо вона підвищує потенціал у напрямку від точки 1 до точки 2, тобто при уявному русі вздовж шляху 1 – 2 спочатку зустрічається від'ємний полюс джерела, а потім позитивний.

Під час розв'язку задачі на роботу та потужність електричного струму, слід мати на увазі, що формули (3.36) та (3.38) залишаються виправданими в будь-якому випадку, незалежно від наявності або відсутності ЕРС на даній ділянці.

Закон Джоуля – Ленца у вигляді (3.38) справедливий для постійного струму. Якщо сила струму, в провіднику змінюється, необхідно користуватися диференціальною формою цього закону:

$$dQ = I^2 R dt .$$

3.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Два точкових заряди $9Q$ і $-Q$ закріплені на відстані $l = 50$ см один від одного. Третій заряд Q_1 може переміщатися тільки уздовж прямої, що проходить через заряди. Визначити положення заряду Q_1 , при якому він буде знаходитися в рівновазі. При якому знаку заряду Q_1 рівновага буде стійкою?

Розв'язок. Заряд Q_1 знаходиться в рівновазі в тому випадку, якщо геометрична сума сил, що діють на нього, дорівнює нулю. Це означає, що на заряд Q_1 повинні діяти дві сили, рівні по модулю й протилежні за напрямком. Розглянемо, на якому з трьох ділянок I, II, III (рис. 6) може бути виконана ця умова. Для визначеності будемо вважати, що заряд Q_1 – позитивний.

На ділянці I (рис. 6, а) на заряд Q_1 будуть діяти дві протилежно спрямовані сили: \vec{F}_1 і \vec{F}_2 . Сила \vec{F}_1 , яка діє з боку заряду $9Q$, в будь-якій точці цієї ділянки більше сили \vec{F}_2 , яка діє з боку заряду $-Q$, тому що

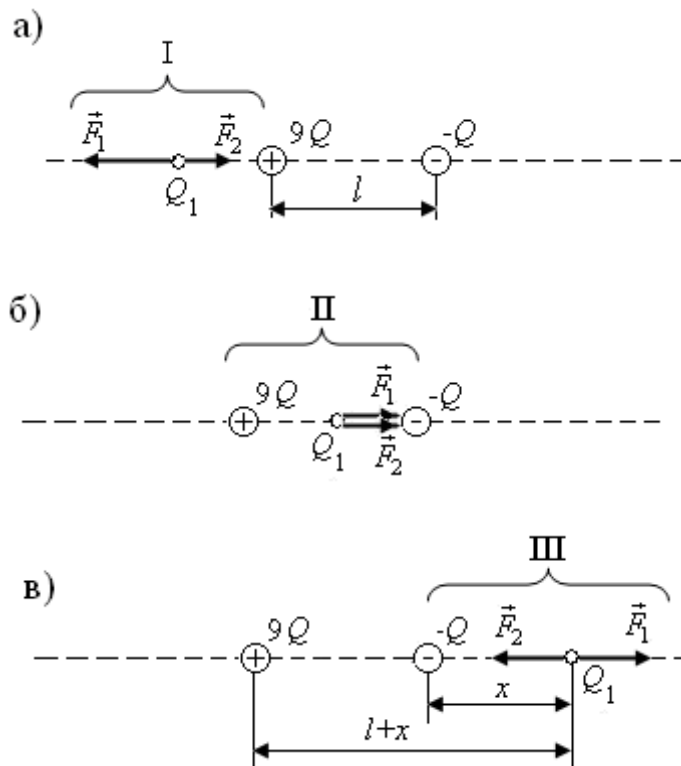


Рисунок 6 – Взаємодія трьох зарядів

більший заряд $9Q$ знаходиться завжди ближче до заряду Q_1 , чим менший (по модулю) заряд $-Q$. Тому рівновага на цій ділянці неможлива.

На ділянці II (рис. 6, б) обидві сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 спрямовані в один бік до заряду $-Q$. Отже, і на другій ділянці рівновага неможлива.

На ділянці III (рис. 6, в) сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 спрямовані у протилежні сторони, так само як і на ділянці I, але на відміну від неї менший заряд $-Q$ завжди знаходиться ближче до заряду Q_1 , чим більший заряд $9Q$. Це означає, що можна знайти таку точку на прямій, де сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 будуть однакові за модулем, тобто:

$$F_1 = F_2. \quad (1)$$

Нехай x та $l+x$ – відстань від меншого й більшого зарядів до заряду Q_1 . Виразивши в рівності (1) F_1 та F_2 відповідно до закону Кулона, отримаємо:

$$9Q \cdot Q_1 / 4\pi\epsilon_0 (l+x)^2 = Q \cdot Q_1 / 4\pi\epsilon_0 x^2$$

або

$$l+x = \pm 3x,$$

$$x_1 = +\frac{l}{2}; \quad x_2 = -\frac{l}{4}.$$

Корінь x_2 не задовольняє фізичній умові завдання (у цій точці сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 хоча й рівні за модулем, але співнапрямлені).

Визначимо знак заряду Q_1 , при якому рівновага буде стійкою. Рівновага називається стійкою, якщо при зміщенні заряду від положення рівноваги виникають сили, що повертають його в положення рівноваги. Розглянемо зсув заряду Q_1 у двох випадках: коли заряд позитивний і негативний.

Якщо заряд Q_1 позитивний, то при зміщенні його вліво обидві сили F_1 та F_2 зростають. Тому що сила F_1 зростає повільніше, то результуюча сила, що діє на заряд Q_1 , буде направлена до тієї ж сторони, до якої зміщений цей заряд, тобто вліво. Під дією цієї сили заряд Q_1 буде віддалятися від положення рівноваги. Те ж відбувається й при зміщенні заряду вправо. Сила F_2 спадає швидше, ніж F_1 . Геометрична сума сил у цьому випадку спрямована вправо. Заряд під дією цієї сили також буде переміщатися вправо, тобто віддалятися від положення рівноваги. Таким чином, у разі позитивного заряду рівновага є нестійкою.

Якщо заряд Q_1 негативний, то його зміщення вліво викличе збільшення сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , але сила \vec{F}_1 зростає повільніше, ніж \vec{F}_2 , тобто $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$. Результуюча сила буде спрямована вправо. Під її дією заряд Q_1 повертається до положення рівноваги. При зсуві Q_1 праворуч сила \vec{F}_2 спадає швидше, ніж \vec{F}_1 , тобто $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$, результуюча сила спрямована вліво й заряд Q_1 знову буде повертатися до стану рівноваги. При негативному заряді рівновага є стійкою. Величина самого заряду Q_1 несуттєва.

Приклад 2. Три точкових заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1\text{нКл}$ розташовані у вершинах рівностороннього трикутника. Який заряд Q_4 потрібно помістити в центрі трикутника, щоб зазначена система зарядів перебувала в рівновазі?

Розв'язок. Всі три заряди, які розташовані на вершинах трикутника, перебувають в однакових умовах. Тому досить з'ясувати, який заряд слід помістити в центрі трикутника, щоб який-небудь один з трьох зарядів, наприклад Q_1 , знаходився в рівновазі. Заряд Q_1 буде знаходитися в рівновазі, якщо векторна сума діючих на нього сил дорівнює нулю (рис. 7):

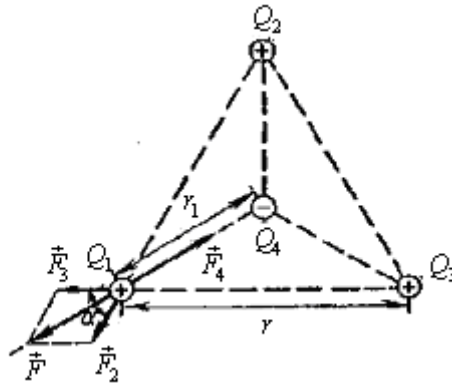


Рисунок 7 – Рівновага системи чотирьох зарядів

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \quad (1)$$

де \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 – сили, з якими відповідно діють на заряд Q_1 заряди Q_2 , Q_3 , Q_4 ;

\vec{F} – рівнодіюча сил \vec{F}_2 та \vec{F}_3 .

Оскільки сили \vec{F} і \vec{F}_4 направлені по одній прямій в протилежні сторони, то векторну рівність (1) можна замінити скалярною: $F - F_4 = 0$, звідки $F_4 = F$. Визначив в останньої рівності F через F_2 і F_3 та враховуючи, що $F_3 = F_2$, отримаємо:

$$F_4 = F_2 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Застосувавши закон Кулона й маючи на увазі, що $Q_2 = Q_3 = Q_1$, знайдемо:

$$\frac{Q_1 Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)},$$

звідки

$$Q_4 = \frac{Q_1^2 r_1^2}{r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}. \quad (2)$$

З геометричних побудов у рівносторонньому трикутнику випливає, що:

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos(\alpha/2)} = \frac{r}{2 \cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}; \quad \cos \alpha = \cos 60^\circ = 1/2.$$

З урахуванням цього формула (2) набуде вигляду:

$$Q_4 = Q_1 / \sqrt{3}.$$

Зробимо обчислення:

$$Q_4 = 10^{-9} / \sqrt{3} \text{ Кл} = 5,77 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} = 577 \text{ пКл}.$$

Слід зазначити, що рівновага системи зарядів буде нестійкою.

Приклад 3. Два точкових електричних заряди $Q_1 = 1 \text{ нКл}$ і $Q_2 = -2 \text{ нКл}$ знаходяться в повітрі на відстані $d = 10 \text{ см}$ один від одного. Визначити напруженість \vec{E} та потенціал ϕ поля, яке створене цими зарядами в точці А, віддаленої від заряду Q_1 на відстань $r_1 = 9 \text{ см}$ та від заряду Q_2 на $r_2 = 7 \text{ см}$.

Розв'язок. Згідно з принципом суперпозиції електричних полів, кожен заряд створює поле незалежно від присутності у просторі інших зарядів. Тому напруженість \vec{E} електричного поля в точці, яку шукаємо може бути знайдена як геометрична сума напруженостей \vec{E}_1 та \vec{E}_2 полів, які створені кожним зарядом окремо: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Напруженості електричного поля, яке створюється в повітрі ($\epsilon = 1$) зарядами Q_1 та Q_2 :

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}; \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (2)$$

Вектор \vec{E}_1 (рис. 8) спрямований по силовій лінії від заряду Q_1 , тому що цей заряд позитивний; вектор \vec{E}_2 направлено також по силовій лінії, але до заряду Q_2 , тому що цей заряд негативний.

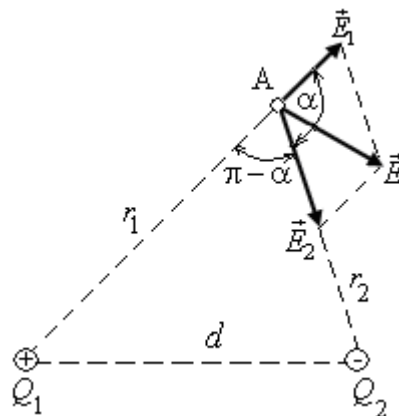


Рисунок 8 – Визначення вектора \vec{E} у точці А

Модуль вектора \vec{E} знайдемо за теоремою косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha}, \quad (3)$$

де α – кут між векторами \vec{E}_1 і \vec{E}_2 , який може бути знайдений з трикутника зі сторонами r_1 , r_2 та d :

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

У даному випадку, щоб уникнути громіздких записів зручно значення $\cos \alpha$ обчислити окремо:

$$\cos \alpha = \frac{(0,1)^2 - (0,09)^2 - (0,07)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = -0,238.$$

Підставляючи вираз E_1 з (1) і E_2 з (2) в (3) та виносячи загальний множник $1/(4\pi\epsilon_0)$ за знак кореня, отримаємо:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{|Q_1||Q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}. \quad (4)$$

Відповідно до принципу суперпозиції електричних полів потенціал φ результуючого поля, яке створене двома зарядами Q_1 та Q_2 , дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (5)$$

Потенціал електричного поля, яке створене у вакуумі точковим зарядом Q на відстані r від нього, виражається формулою:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

У нашому випадку відповідно до формул (5) і (6) отримаємо:

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

або

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right).$$

Зробимо обчислення:

$$E = \frac{1}{4\pi / (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0,09)^4} + \frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0,07)^4} + 2 \frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(0,09)^2 \cdot (0,07)^2}} (-0,238) \text{ В/м} =$$

$$= 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 3,58 \text{ кВ/м};$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi / (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)} \left(\frac{10^{-9}}{0,09} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) \text{ В} = -157 \text{ В}.$$

Приклад 4. По тонкому кільцю рівномірно розподілений заряд $Q = 40$ нКл з лінійною щільністю $\tau = 50$ нКл/м. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене цим зарядом у точці А, що лежить на осі кільця й віддалена від його центру на відстань, рівну половині радіуса.

Розв'язок. Поєднаємо координатну площину xOy з площиною кільця, а вісь Oz – з віссю кільця (рис. 9).

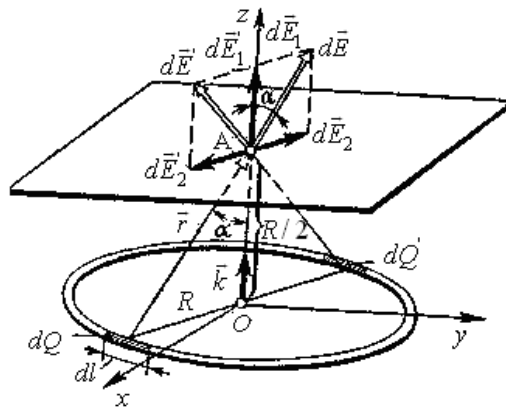


Рисунок 9 – Визначення вектора \vec{E} в точці А

На кільці виділимо малу ділянку довжиною dl . Так як заряд $dQ = \tau dl$, що знаходиться на цій ділянці можна вважати точковим, то напруженість $d\vec{E}$ електричного поля, яке створене цим зарядом, може бути записана у вигляді:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

де \vec{r} – радіус-вектор, спрямований від елемента dl до точки А.

Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові: $d\vec{E}_1$, перпендикулярно площині кільця (співнаправлену з віссю Oz), і $d\vec{E}_2$, паралельну площині кільця (площині xOy), тобто:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2.$$

Напруженість \vec{E} електричного поля в точці А знайдемо інтегруванням:

$$\vec{E} = \int_L \vec{E}_1 + \int_L \vec{E}_2,$$

де інтегрування ведеться по всіх елементах зарядженого кільця. Зауважимо, що для кожної пари зарядів dQ , та dQ' ($dQ = dQ'$), розташованих симетрично щодо центру кільця, вектори $d\vec{E}_2$ та $d\vec{E}_2'$ в точці А рівні по модулю й протилежні за напрямком: $d\vec{E}_2 = -d\vec{E}_2'$. Тому векторна сума (інтеграл) $\int_L d\vec{E}_2 = 0$. Оскільки складові $d\vec{E}_1$ для всіх елементів кільця співна-

правлені з віссю Oz (одичним вектором \vec{k}), тобто $d\vec{E}_1 = \vec{k}dE_1$,

тоді

$$\vec{E} = \vec{k} \int_L dE_1.$$

Так як

$$dE_1 = dE \cos \alpha; \quad dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2};$$

$$r = \sqrt{R^2 + (R/2)^2} = \sqrt{5}R/2; \quad \cos \alpha = (R/2)r = 1/\sqrt{5},$$

то

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\tau}{5R^2\sqrt{5}} dl = \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Таким чином:

$$\vec{E} = \vec{k} \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2} = \vec{k} \frac{2\tau}{5\sqrt{5}\epsilon_0 R}.$$

Зі співвідношення $Q = 2\pi R\tau$ визначимо радіус кільця:

$$R = Q / (2\pi\tau),$$

тоді:

$$\vec{E} = \vec{k} \frac{2\tau 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q} = \vec{k} \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q}.$$

Модуль напруженості:

$$|\vec{E}| = \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q}. \quad (1)$$

Перевіримо, чи дає права частина отриманої рівності одиницю напруженості (В/м):

$$\frac{[\tau^2]}{[\epsilon_0][Q]} = \frac{(1 \text{ Кл/м})^2}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ Кл}} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ В/м}.$$

Виразимо фізичні величини, що входять до формули (1), в одиницях СІ ($\tau = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м, $Q = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м) і зробимо обчислення:

$$E = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2}{5\sqrt{5} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}} \text{ В/м} = 7,92 \text{ кВ/м}.$$

Приклад 5. Дві концентричні провідні сфери радіусами $R_1 = 6$ см і $R_2 = 10$ см несуть відповідно заряди $Q_1 = 1$ нКл і $Q_2 = -0,5$ нКл. Знайти напруженість E поля в точках, віддалених від центру сфер на відстанях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см. Побудувати графік $E(r)$.

Розв'язок. Зауважимо, що точки, в яких потрібно знайти напруженості електричного поля, лежать у трьох областях (рис. 10): області I ($r_1 < R_1$), області II ($R_1 < r_2 < R_2$), області III ($r_3 > R_2$).

1. Для визначення напруженості E_1 в області I проведемо гауссову поверхню S_1 радіусом r_1 і скористаємося теоремою Остроградського – Гауса:

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n dS = 0,$$

(оскільки сумарний заряд, що знаходиться всередині гауссової поверхні, дорівнює нулю). З міркувань симетрії $E_n = E_1 = const$.

Відтак, $\Phi_E = 0$ та E_1 (напруженість поля в області I) в усіх точках, які відповідають умові $r_1 < R_1$, буде дорівнювати нулю.

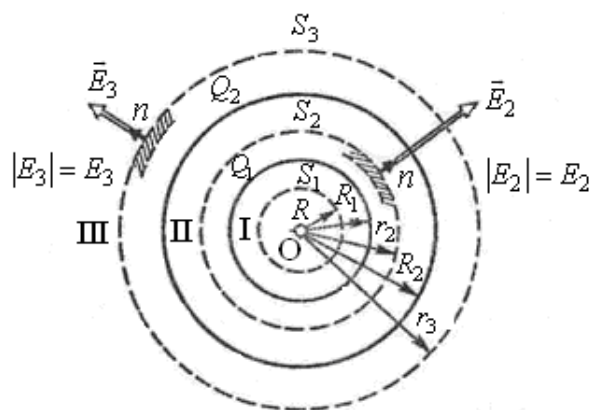


Рисунок10 – Гауссові поверхні для двох концентричних сфер

2. В області II гауссову поверхню проведемо радіусом r_2 . В цьому випадку (діелектричну проникність ϵ середовища будемо вважати рівною одиниці (вакуум)):

$$\Phi_E = Q_1 / \epsilon_0,$$

(оскільки всередині гауссової поверхні знаходиться тільки заряд Q_1).

Так як $E_n = E = const$, то E можна винести за знак інтеграла:

$$\Phi_E = Q_1 / \epsilon_0 \quad \text{або} \quad ES_2 = Q_1 / \epsilon_0.$$

Позначивши напруженість E для області II через E_2 , отримаємо:

$$E_2 = Q_1 / (\epsilon_0 S_2),$$

де $S_2 = 4\pi r_2^2$ – площа гауссової поверхні, тоді:

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (1)$$

3. В області III гауссова поверхня проводиться радіусом r_3 . Позначимо напруженість E області III через E_3 та врахуємо, що в цьому випадку гауссову поверхню охоплює обидві сфери і, отже, сумарний заряд буде дорівнювати $Q_1 + Q_2$, тоді:

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}.$$

Помітивши, що $Q_2 < 0$, цей вираз можна переписати у вигляді:

$$E_3 = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}. \quad (2)$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності (1) і (2) дає одиницю напруженості:

$$\frac{|Q|}{|\epsilon_0| r^2} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ В/м}.$$

Виразимо всі величини в одиницях СІ ($Q_1 = 10^{-9}$ Кл; $Q_2 = -0,5 \cdot 10^{-9}$ Кл; $r_1 = 0,09$ м; $r_2 = 0,15$ м; $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) та зробимо обчислення:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^9}{(0,09)^2} \text{ В/м} = 1,11 \text{ кВ/м};$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5)10^9}{(0,15)^2} \text{ В/м} = 200 \text{ В/м}.$$

Побудуємо графік $E(r)$. В області I ($r_1 > R_1$) $E = 0$. В області II ($R_1 \leq r < R_2$) $E_2(r)$ змінюється за законом $1/r^2$. У точці $r = R_1$ напруженість $E_2(R_1) = Q_1 / (4\pi\epsilon_0 R_1^2) = 2,5$ кВ/м. У точці $r = R_2$ (r прагне до R_2 зліва) $E_2(R_2) = Q_1 / (4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 0,9$ кВ/м. В області III ($r > R_2$) $E_3(r)$ змінюється за законом $1/r^2$, причому в точці $r = R_2$ (r прагне до R_2 праворуч) $E_3(R_2) = (Q_1 - |Q_2|) / (4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 0,45$ кВ/м. Таким чином, функція $E(r)$ у точках $r = R_1$ та $r = R_2$ зазнає розрив.

Графік залежності E_r , представлений на рис. 11.

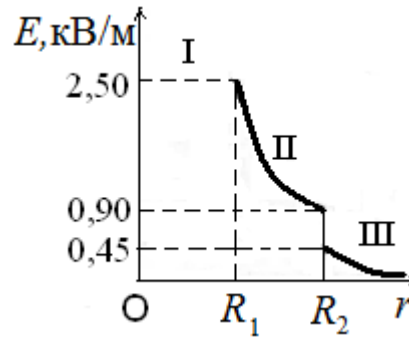


Рисунок 11 – Графік залежності $E(r)$

Приклад 6. Точковий заряд $Q = 25$ нКл перебуває в полі, яке створене прямим нескінченним циліндром радіусом $R = 1$ см, рівномірно зарядженим з поверхневою щільністю $\sigma = 0,2$ нКл/см². Визначити силу \vec{F} , яка діє на заряд, якщо його відстань від осі циліндра $r = 10$ см.

Розв'язок. Значення сили \vec{F} , яка діє на точковий заряд Q , що знаходиться в полі, визначається за формулою:

$$F = QE, \quad (1)$$

де E – напруженість поля.

Як відомо, напруженість поля нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (2)$$

де τ – лінійна щільність заряду.

Виразимо лінійну щільність τ через поверхневу щільність σ . Для цього виділимо елемент циліндра довжиною l і виразимо заряд, що знаходиться на ньому Q , двома способами: $Q = \sigma S = \sigma 2\pi R l$; $Q = \tau l$. Прирівнявши праві частини цих формул і скоротивши отриману рівність на l , знайдемо $\tau = 2\pi R \sigma$. З урахуванням цього формула (2) набуде вигляду: $E = R\sigma / (\epsilon_0 r)$. Підставивши вираз E в (1), отримаємо:

$$F = \frac{Q\sigma R}{\epsilon_0 r}.$$

Зробимо обчислення:

$$F = \frac{2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10} \text{ Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН.}$$

Сила \vec{F} співнапрямлена з напруженістю \vec{E} , яка в силу симетрії (циліндр нескінченно довгий) перпендикулярна поверхні циліндра.

Приклад 7. По тонкій нитці, яка зігнута по дузі кола, рівномірно розподілений заряд з лінійною щільністю $\tau = 10 \text{ нКл/м}$. Визначити напруженість \vec{E} та потенціал φ електричного поля, яке створене таким розподіленим зарядом у точці, яка співпадає з центром кривизни дуги. Довжина l нитки становить $1/3$ довжини кола й дорівнює 15 см .

Розв'язок. Виберемо осі координат так, щоб початок координат співпадав з центром кривизни дуги, а вісь Oy була б симетрично розташована щодо кінців дуги (рис. 12). На нитці виділимо елемент довжини dl . Заряд $dQ = \tau dl$, що знаходиться на виділеній ділянці, можна вважати точковим.

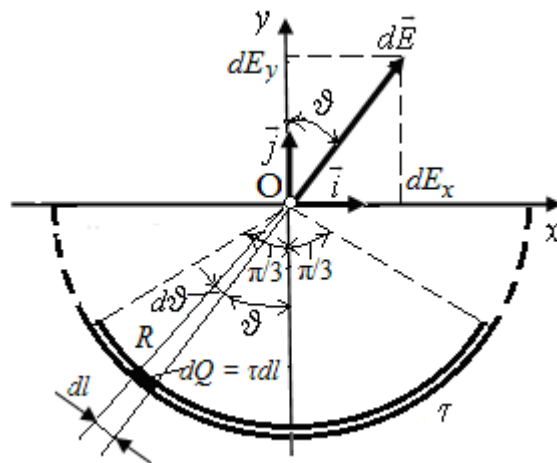


Рисунок 12 – Напруженість $d\vec{E}$ поля, яке створене зарядом dQ

Визначимо напруженість електричного поля в точці O . Для цього знайдемо спочатку напруженість $d\vec{E}$ поля, створюваного зарядом dQ :

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

де \vec{r} – радіус-вектор, спрямований від елемента dl до точки, в якій обчислюється напруженість.

Виразимо вектор $d\vec{E}$ через проєкції dE_x і dE_y на осі координат:

$$d\vec{E} = \vec{i}dE_x + \vec{j}dE_y,$$

де \vec{i} і \vec{j} – одиничні вектори напрямків (орти).

Напруженість \vec{E} знайдемо інтегруванням:

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i} \int_l dE_x + \vec{j} \int_l dE_y.$$

Інтегрування ведеться вздовж дуги довжиною l . У силу симетрії $\int_l dE_x = 0$, тоді:

$$\vec{E} = \vec{j} \int_l dE_y, \quad (1)$$

де $dE_y = dE \cos J = \tau dl \cos J / (4\pi\epsilon_0 r^2)$. Так як $r = R = const$; $dl = R d\vartheta$, то:

$$dE_y = \frac{\tau R d\vartheta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \vartheta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \vartheta d\vartheta.$$

Підставимо вираз dE_y в (1) і, прийнявши до уваги симетричне розташування дуги щодо осі Oy , межі інтегрування візьмемо від 0 до $\pi/3$, а результат подвоїмо:

$$\vec{E} = \vec{j} \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/3} \cos \vartheta d\vartheta = \vec{j} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R} \sqrt{3} / 2. \quad (2)$$

Виразимо радіус R через довжину l нитки ($3l = 2\pi R$), отримаємо:

$$\vec{E} = \vec{j} \frac{\tau}{6\epsilon_0 l} \sqrt{3}.$$

З цієї формули видно, що напруженість поля у напрямку збігається з віссю Oy .

Знайдемо потенціал електричного поля в точці O . Спочатку знайдемо потенціал $d\phi$, який створений точковим зарядом dQ у точці O :

$$d\phi = \tau dl / (4\pi\epsilon_0 r).$$

Замінімо r на R і проведемо інтегрування:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^l dl = \frac{\tau l}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Так як $l = 2\pi R / 3$, то:

$$\varphi = \tau / (6\epsilon_0). \quad (3)$$

Зробимо обчислення за формулами (2) та (3):

$$E = \frac{10^{-8} \cdot 1,73}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,15} \text{ В/м} = 2,18 \text{ кВ/м};$$

$$\varphi = \frac{10^{-8}}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В} = 188 \text{ В}.$$

Приклад 8. На тонкому стрижні довжиною l рівномірно розподілений заряд з лінійною щільністю $\tau = 10$ нКл/м. Знайти потенціал φ , створений розподіленим зарядом у точці А, яка розташована на осі стрижня та віддаленої від його найближчого кінця на відстань l .

Розв'язок. У задачі розглядається поле, яке створене розподіленим зарядом. У цьому випадку діють наступним чином. На стрижні виділяють малу ділянку довжиною dx . Тоді на цій ділянці буде зосереджений заряд $dQ = \tau dx$, який можна вважати точковим. Потенціал $d\varphi$, який створений цим точковим зарядом у точці А (рис. 13), можна визначити за формулою:

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x}.$$



Рисунок 13 – Визначення потенціалу $d\varphi$ в точці А

Згідно з принципом суперпозиції електричних полів, потенціал електричного поля, яке створене зарядженим стрижнем у точці А, знайдемо інтегрування цього виразу:

$$\varphi = \int_l^{2l} \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_l^{2l} \frac{dx}{x}.$$

Зробимо інтегрування:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln x \Big|_l^{2l} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 2.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в СІ ($\tau = 10 \cdot 10^{-9}$ Кл/м; $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) і зробимо обчислення:

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,693 \text{ В} = 62,4 \text{ В}.$$

Приклад 9. На пластинах плоского конденсатора знаходиться заряд $Q = 10$ нКл. Площина S кожної пластини конденсатора дорівнює 100 см^2 , діелектрик – повітря. Визначити силу F , з якою притягуються пластини. Поле між пластинами вважати однорідним.

Розв'язок. Заряд Q однієї пластини перебуває в полі напруженості E , яке створене зарядом іншої пластини конденсатора. Відтак, на перший заряд діє сила (рис. 14):

$$F = QE. \quad (1)$$

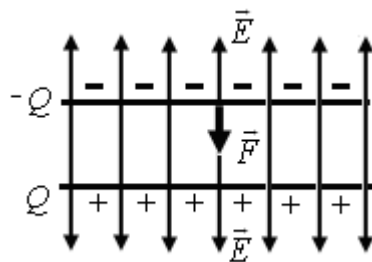


Рисунок 14 – Визначення сили F , з якою притягуються пластинки

Оскільки:

$$E = \sigma / (2\epsilon_0) = Q / (2\epsilon_0 S),$$

де σ – поверхнева щільність заряду пластини, то формула (1) набуде вигляду:

$$F = Q^2 / (2\epsilon_0 S).$$

Зробимо обчислення:

$$F = \frac{10^{-16}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} \text{ Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН}.$$

Приклад 10. Електричне поле створене довгим циліндром радіусом $R = 1 \text{ см}$, рівномірно зарядженим з лінійною щільністю $\tau = 20 \text{ нКл/м}$. Визначити різницю потенціалів двох точок цього поля, що знаходяться на відстані $a_1 = 0,5 \text{ см}$ та $a_2 = 2 \text{ см}$ від поверхні циліндра, в середній його частині.

Розв'язок. Для визначення різниці потенціалів скористаємося співвідношенням між напруженістю поля й зміною потенціалу: $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$. Для поля з осью симетрії, яким є поле циліндра, це співвідношення можна записати у вигляді:

$$E = -d\varphi / dr; \quad \text{або} \quad d\varphi = -E dr.$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо різницю потенціалів двох точок, віддалених на відстанях r_1 та r_2 від осі циліндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} E dr. \quad (1)$$

Оскільки циліндр довгий і точки взяті поблизу його середньої частини, то для вираження напруженості поля можна скористатися формулою напруженості поля, яке створене нескінченно довгим циліндром:

$$E = \tau / (2\pi\epsilon_0 r).$$

Підставивши вираз E в (1), отримаємо:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

або

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\tau / 2\pi\epsilon_0) \ln (r_2 / r_1). \quad (2)$$

Зробимо обчислення, враховуючи, що величини r_1 та r_2 , які входять до формули (2) у вигляді відношення, можна виразити у сантиметрах ($r_1 = R + a_1 = 1,5 \text{ см}$; $r_2 = R + a_2 = 3 \text{ см}$):

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \ln (3/1,5) = \\ &= 3,6 \cdot 10^2 \cdot 2,3 \ln 2 \text{ В} = 250 \text{ В}. \end{aligned}$$

Приклад 11. Електричне поле створюється двома зарядами $Q_1 = 4$ мкКл і $Q_2 = -2$ мкКл, що знаходяться на відстані $a = 0,1$ м один від одного. Визначити роботу $A_{1,2}$ сил поля з переміщення заряду $Q = 50$ нКл з точки 1 в точку 2 (рис. 15).

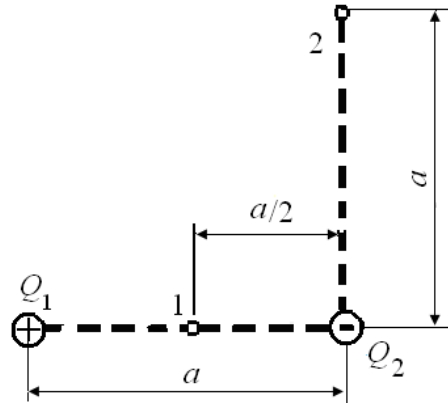


Рисунок 15 – Розташування точок 1 та 2 для прикладу 10

Розв'язок. Для визначення роботи $A_{1,2}$ сил поля скористаємося співвідношенням:

$$A_{1,2} = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Застосовуючи принцип суперпозиції електричних полів, визначимо потенціали φ_1 та φ_2 точок 1 і 2 поля:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} = \frac{2(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 a};$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_1/\sqrt{2} + Q_2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

тоді:

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[2(Q_1 + Q_2) - (Q_1/\sqrt{2} + Q_2) \right]$$

або

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[Q_1 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + Q_2 \right].$$

Перевіримо, чи дає права частина рівності одиницю роботи (Дж):

$$\frac{[Q][Q_1]}{[\varepsilon_0][a]} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}.$$

Підставимо числові значення фізичних величій в СІ ($Q = 50 \cdot 10^{-9}$ Кл; $Q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл; $Q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл; $a = 0,1$ м; $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) і зробимо обчислення:

$$A_{1,2} = \frac{50 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{0,1} \left[4(2 - 1/\sqrt{2}) - 2 \right] \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 14,3 \text{ мДж}.$$

Приклад 12. Визначити прискорюючу різницю потенціалів U , яку повинен пройти в електричному полі електрон, що має швидкість $v_1 = 10^6$ м/с, щоб швидкість його зросла у $n = 2$ рази.

Розв'язок. Прискорюючу різницю потенціалів можна знайти, обчисливши роботу A сил електростатичного поля. Ця робота визначається добутком елементарного заряду e на різницю потенціалів U :

$$A = eU. \quad (1)$$

Робота сил електростатичного поля в даному випадку дорівнює зміні кінетичної енергії електрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (2)$$

де T_1 та T_2 – кінетична енергія електрона до й після проходження прискорюючого поля;

m – маса електрона;

v_1 і v_2 – його початкова та кінцева швидкості.

Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), отримаємо:

$$eU = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mn^2v_1^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

де $n = v_2 / v_1$.

Звідси така різниця потенціалів:

$$U = \frac{mv_1^2(n^2 - 1)}{2e}.$$

Зробимо обчислення:

$$U = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) \text{ В} = 8,53 \text{ В.}$$

Приклад 13. Конденсатор ємністю $C_1 = 3$ мкФ був заряджений до різниці потенціалів $U_1 = 40$ В. Після відключення від джерела струму конденсатор з'єднали паралельно з іншим незарядженим конденсатором ємністю $C_2 = 5$ мкФ. Яка енергія W' витратиться на утворення іскри в момент приєднання другого конденсатора?

Розв'язок. Енергія, яка витрачена на утворення іскри:

$$W' = W_1 - W_2, \quad (1)$$

де W_1 – енергія, яку мав перший конденсатор до приєднання до нього другого конденсатора;

W_2 – енергія, яку має батарея, складена з двох конденсаторів.

Енергія зарядженого конденсатора визначається за формулою:

$$W = 1/2 CU^2, \quad (2)$$

де C – ємність конденсатора або батареї конденсаторів.

Виразимо у формулі (1) енергії W_1 та W_2 за формулою (2) і, взявши до уваги, що загальна ємність паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів, отримаємо:

$$W' = 1/2 C_1 U_1^2 - 1/2 (C_1 + C_2) U_2^2 \quad (3)$$

де U_2 – різниця потенціалів на затискачах батареї конденсаторів.

Враховуючи, що заряд після приєднання другого конденсатора залишається тим самим, виразимо різницю потенціалів U_2 наступним чином:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}. \quad (4)$$

Підставивши вираз U_2 в (3), знайдемо:

$$W' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

або

$$W' = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

Зробимо обчислення:

$$W' = \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж}.$$

Приклад 14. Потенціометр опором $R = 100$ Ом підключений до батареї з ЕРС $\varepsilon = 150$ В і внутрішнім опором $R_i = 50$ Ом. Визначити: 1) показання вольтметра опором $R_v = 500$ Ом, сполученого з однією з клем потенціометра й рухомих контактом, встановленим посередині потенціометра; 2) різницю потенціалів між тими ж точками потенціометра при відключенні вольтметра.

Розв'язок. 1. Показання вольтметра, підключеного до точок А і В (рис. 16), визначимо за формулою:

$$U_1 = I_1 R_1,$$

де R_1 – опір паралельно з'єднаних вольтметра й половини потенціометра;

I_1 – сумарна сила струму в гілках цього з'єднання (вона дорівнює силі струму в нерозгалуженій частині ланцюга).

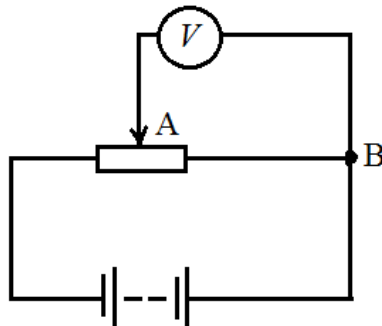


Рисунок 16 – Електрична схема для прикладу 13

Силу струму I_1 знайдемо за законом Ома для повного кола:

$$I_1 = \varepsilon / (R_e + R_i), \quad (1)$$

де R_e – опір зовнішнього ланцюга. Це опір є сумою двох опорів:

$$R_e = R / 2 + R_1. \quad (2)$$

Опір R_1 знайдемо за формулою паралельного з'єднання провідників
 $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R/2}$, звідки:

$$R_1 = \frac{RR_v}{R + 2R_v}.$$

Підставивши в (1) вираз R_e по (2), знайдемо:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R/2 + R_1 + R_i}.$$

У даному випадку рішення задачі в загальному вигляді було б громіздким. Тому зручно обчислення величин провести окремо:

$$R_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 + 2 \cdot 500} \text{ Ом} = 45,5 \text{ Ом};$$

$$I_1 = \frac{150}{50 + 45,5 + 50} \text{ А} = 1,03 \text{ А};$$

$$U_1 = 1,03 \cdot 45 \cdot 5 \text{ В} = 46,9 \text{ В}.$$

1. Різниця потенціалів між точками А і В при відключеному вольтметрі дорівнює добутку струму I_2 на половину опору потенціометра:

$$U_2 = I_2 \cdot R/2, \quad (3)$$

де I_2 – сила струму в ланцюзі при відключеному вольтметрі. Її визначимо за формулою:

$$I_2 = \varepsilon / (R + R_i).$$

Підставивши вираз I_2 в (3), знайдемо:

$$U_2 = \varepsilon R / 2(R + R_i).$$

Зробимо обчислення:

$$U_2 = \frac{150}{100 + 50} \frac{100}{2} \text{ В} = 50 \text{ В}.$$

Приклад 15. Сила струму в провіднику опором $R = 20$ Ом наростає протягом часу $\Delta t = 2$ с за лінійним законом від $I_0 = 0$ до $I = 6$ А

(рис.17). Визначити теплоту Q_1 , яка виділилася в цьому провіднику за першу секунду, і Q_2 – за другу, а також знайти відношення Q_2 / Q_1 .

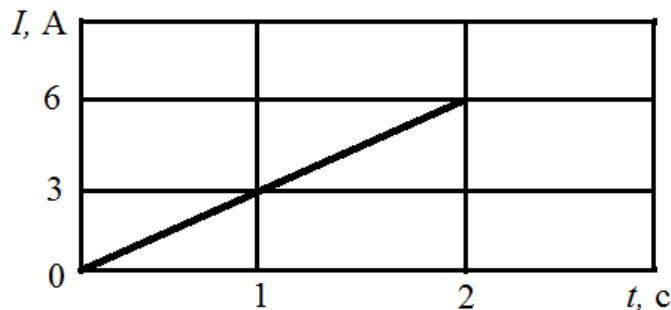


Рисунок 17 – Графік $I(t)$

Розв'язок. Закон Джоуля – Ленца у вигляді $Q = I^2 R t$ справедливий для постійного струму ($I = const$). Якщо сила струму в провіднику змінюється, то зазначений закон справедливий для нескінченно малого інтервалу часу й записується у вигляді:

$$dQ = I^2 R dt. \quad (1)$$

Тут сила струму I є деякою функцією часу. У даному випадку:

$$I = kt, \quad (2)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що характеризує швидкість зміни сили струму:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{6}{2} \text{ А/с} = 3 \text{ А/с}.$$

З урахуванням (2) формула (1) набуде вигляду:

$$dQ = k^2 R t^2 dt. \quad (3)$$

Для визначення теплоти, що виділилася за кінцевий інтервал часу Δt , вираз (3) треба проінтегрувати в межах від t_1 до t_2 :

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3).$$

Зробимо обчислення:

$$Q_1 = (1/3) \cdot 3^2 \cdot 20(1-0) \text{ Дж} = 60 \text{ Дж};$$

$$Q_2 = (1/3) \cdot 3^2 \cdot 20(8-1) \text{ Дж} = 420 \text{ Дж}.$$

Відтак:

$$Q_2 / Q_1 = 420 / 60 = 7,$$

тобто за другу секунду виділиться теплоти в сім разів більше, ніж за першу.

3.4 Контрольна робота № 3

Таблиця варіантів

Варіант	Номери задач							
0	310	320	330	340	350	360	370	380
1	301	311	321	331	341	351	361	371
2	302	312	322	332	342	352	362	372
3	303	313	323	333	343	353	363	373
4	304	314	324	334	344	354	364	374
5	305	315	325	335	345	355	365	375
6	306	316	326	336	346	356	366	376
7	307	317	327	337	347	357	367	377
8	308	318	328	338	348	358	368	378
9	309	319	329	339	349	359	369	379

301. Точкові заряди $Q_1 = 20$ мкКл, $Q_2 = -10$ мкКл знаходяться на відстані $d = 5$ см один від одного. Визначити напруженість поля в точці, яка віддалена на $r_1 = 3$ см від першого й на $r_2 = 4$ см від другого заряду, визначте також силу \vec{F} , діючу в цій точці на точковий заряд $Q = 1$ мкКл.

302. Три однакових точкових заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2$ нКл знаходяться у вершинах рівностороннього трикутника зі сторонами $a = 10$ см. Визначити модуль і напрямок сили \vec{F} , яка діє на один із зарядів з боку двох інших.

303. Два позитивних точкових заряди Q і $9Q$ закріплені на відстані $d = 100$ см один від одного. Визначити, в якій точці на прямій, що проходить через заряди, слід помістити третій заряд так, щоб він знаходився в рівновазі. Вказати, який знак повинен мати цей заряд для того, щоб рівновага була стійкою, якщо переміщення зарядів можливі тільки вздовж прямої, що проходить через закріплені заряди.

304. Дві однаково заряджені кульки підвішені в одній точці на нитках однакової довжини. При цьому нитки розійшлися на кут α . Кульки занурюють в олію. Яка щільність ρ олії, якщо кут розбіжності ниток при зануренні у масло залишається незмінним? Щільність матеріалу кульок $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, діелектрична проникність олії $\varepsilon = 2,2$.

305. Чотири однакових зарядів $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40 \text{ нКл}$ закріплені у верхівках квадрата зі стороною $a = 10 \text{ см}$. Знайти силу \vec{F} , яка діє на один з цих зарядів з боку решти трьох.

306. Точкові заряди $Q_1 = 30 \text{ мкКл}$ і $Q_2 = -20 \text{ мкКл}$ знаходяться на відстані $d = 20 \text{ см}$ один від одного. Визначити напруженість електричного поля \vec{E} в точці, яка віддалена від першого заряду на відстань $r_1 = 30 \text{ см}$, а від другого – на $r_2 = 15 \text{ см}$.

307. У верхівках правильного трикутника зі стороною $a = 10 \text{ см}$ знаходяться заряди $Q_1 = 10 \text{ мкКл}$, $Q_2 = 20 \text{ мкКл}$ і $Q_3 = 30 \text{ мкКл}$. Визначити силу \vec{F} , яка діє на заряд Q_1 з боку двох інших зарядів.

308. У верхівках квадрата знаходяться однакові заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 8 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}$. Який негативний заряд Q потрібно помістити в центрі квадрата, щоб сила взаємного відштовхування позитивних зарядів була урівноважена силою тяжіння від'ємного заряду?

309. На відстані $d = 20 \text{ см}$ знаходяться два точкових заряди: $Q_1 = -50 \text{ нКл}$ та $Q_2 = 100 \text{ нКл}$. Визначити силу \vec{F} , яка діє на заряд $Q_3 = -10 \text{ нКл}$, віддалений від обох зарядів на однакову відстань, яка дорівнює d .

310. Відстань d між двома точковими зарядами $Q_1 = 2 \text{ нКл}$ та $Q_2 = 4 \text{ нКл}$ дорівнює 60 см . Визначити точку, в яку потрібно помістити третій заряд Q_3 так, щоб система зарядів перебувала в рівновазі. Визначити заряд Q_3 та його знак. Стійкою або нестійкою буде рівновага?

311. Тонкий стрижень довжиною $l = 20 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений заряд $\tau = 0,1 \text{ мкКл}$. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці А, що лежить на осі стрижня на відстані $a = 20 \text{ см}$ від його кінця.

312. По тонкому півкільцю радіуса $R = 10 \text{ см}$ рівномірно розподілений заряд з лінійною щільністю $\tau = 1 \text{ мкКл/м}$. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці О, що збігається з центром кільця.

313. Тонке кільце несе розподілений заряд $Q = 0,2 \text{ мкКл}$. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у

точці А, рівновіддаленою від усіх точок кільця на відстань $r = 20$ см. Радіус кільця $R = 10$ см.

314. Третина тонкого кільця радіуса $R = 10$ см несе розподілений заряд $Q = 50$ нКл. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці О, що збігається з центром кільця.

315. Нескінченний тонкий стрижень, обмежений з одного боку, несе рівномірно розподілений заряд з лінійною щільністю $\tau = 0,5$ мкКл/м. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці А, що лежить на осі стрижня на відстані $a = 20$ см від його початку.

316. По тонкому кільцю радіусом $R = 20$ см рівномірно розподілений з лінійною щільністю $\tau = 0,2$ мкКл/м заряд. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці, що знаходиться на осі кільця на відстані $h = 2R$ від центру.

317. По тонкому півкільцю рівномірно розподілений заряд $Q = 20$ мкКл з лінійною щільністю $\tau = 0,1$ мкКл/м. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці О, що збігається з центром кільця.

318. Чверть тонкого кільця радіусом $R = 10$ см несе рівномірно розподілений заряд $Q = 0,05$ мкКл. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці О, що збігається з центром кільця.

319. По тонкому кільцю рівномірно розподілений заряд $Q = 10$ нКл з лінійною щільністю $\tau = 0,01$ мкКл/м. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці А, що лежить на осі кільця й віддаленої від його центру на відстань, рівну радіусу кільця.

320. Дві третини тонкого кільця радіусом $R = 10$ см несуть рівномірно розподілений з лінійною щільністю $\tau = 0,2$ мкКл/м заряд. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, яке створене розподіленим зарядом у точці О, що збігається з центром кільця.

321. На двох концентричних сферах радіусом R та $2R$ рівномірно розподілені заряди з поверхневими щільностями σ_1 і σ_2 (рис. 18). Потрібно: 1) використовуючи теорему Остроградського – Гауса, знайти залежність $E(r)$ напруженості електричного поля від відстані для трьох областей: I, II і III. Прийняти $\sigma_1 = 4\sigma$; $\sigma_2 = \sigma$; 2) обчислити напруженість в точці, яка віддалена від центру на відстань r , і вказати напрям вектора \vec{E} . Прийняти $\sigma = 0,1$ мкКл/м²; $r = 1,5R$; 3) побудувати графік $E(r)$.

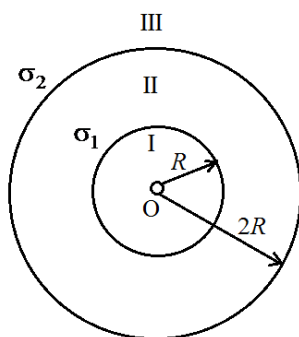


Рисунок 18 – Области I, II і III у задачі 321

322. Див. умову задачі **321**. У п. 1 прийняти $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = -\sigma$. У п. 2

прийняти $\sigma = 0,1 \text{ мкКл/м}^2$; $r = 3$.

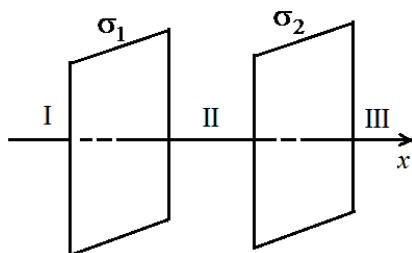
323. Див. умову задачі **321**. У п. 1 прийняти $\sigma_1 = -4\sigma$; $\sigma_2 = \sigma$. У п. 2

прийняти $\sigma = 50 \text{ нКл/м}^2$; $r = 1,5R$.

324. Див. умову задачі **321**. У п. 1 прийняти $\sigma_1 = -2\sigma$; $\sigma_2 = \sigma$. У п. 2

прийняти $\sigma = 0,1 \text{ мкКл/м}^2$; $r = 3R$.

325. На двох нескінченних паралельних площинах рівномірно розподілені заряди з поверхневими щільностями σ_1 та σ_2 (рис. 19). Потрібно: 1) використовуючи теорему Остроградського – Гауса й принцип суперпозиції електричних полів, знайти вираз $E(x)$ напруженості електричного поля в трьох областях: I, II і III. Прийняти $\sigma_1 = 2\sigma$; $\sigma_2 = \sigma$; 2) обчислити напруженість E поля в точці, яка розташована ліворуч від площин, і вказати напрямок вектора \vec{E} ; 3) побудувати графік $E(x)$.

Рисунок 19 – Система двох паралельних пластин з поверхневими щільностями σ_1 та σ_2

326. Див. умову задачі **325**. У п. 1 прийняти $\sigma_1 = -4\sigma$; $\sigma_2 = 2\sigma$. У п.

2 прийняти $\sigma = 40 \text{ нКл/м}^2$ і точку розташувати між площинами.

327. Див. умову задачі **325**. У п. 1 прийняти $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = -2\sigma$. У п. 2

прийняти $\sigma = 20 \text{ нКл/м}^2$ і точку розташувати праворуч від площин.

328. На двох коаксіальних нескінченних циліндрах радіусами R і $2R$ рівномірно розподілені заряди з поверхневими щільностями σ_1 і σ_2 (рис. 20).

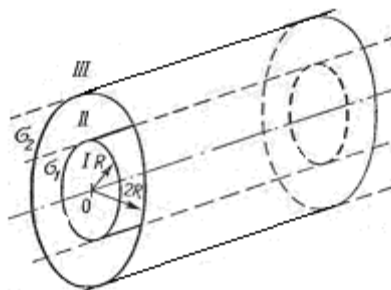


Рисунок 20 – Система двох коаксіальних циліндрів з поверхневими щільностями σ_1 та σ_2

Потрібно: 1) використовуючи теорему Остроградського – Гауса: знайти залежність $E(r)$ напруженості електричного поля від відстані для трьох областей: I, II і III. Прийняти $\sigma_1 = -2\sigma$; $\sigma_2 = \sigma$; 2) обчислити напруженість E в точці, віддаленій від осі циліндрів на відстань r , і вказати напрямок вектора \vec{E} . Прийняти $\sigma = 50$ нКл/м²; $r = 1,5 R$; 3) побудувати графік $E(r)$.

329. Див. умову задачі **328**. У п. 1 прийняти $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = -\sigma$. У п. 2 прийняти $\sigma = 60$ нКл/м²; $r = 3R$.

330. Див. умову задачі **328**. У п. 1 прийняти $\sigma_1 = -\sigma$. У п. 2 прийняти $\sigma = 30$ нКл/м²; $r = 4R$.

331. Два точкових заряди $Q_1 = 6$ нКл і $Q_2 = 3$ нКл знаходяться на відстані $d = 60$ см один від одного. Яку роботу необхідно зробити зовнішнім силам, щоб зменшити відстань між зарядами вдвічі?

332. Електричне поле створене зарядженою провідною кулею, потенціал ϕ якої 300 В. Визначити роботу сил поля з переміщення заряду $Q = 0,2$ мкКл, з точки 1 в точку 2 (рис. 21).

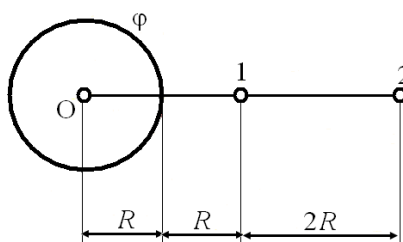


Рисунок 21 – Визначення точок 1 і 2 в електричному полі кулі

333. Електричне поле створене зарядами $Q_1 = 2$ мкКл та $Q_2 = -2$ мкКл, що знаходяться на відстані $a = 10$ см один від одного. Визначити роботу сил поля здійснену при переміщенні заряду $Q = 0,5$ мкКл з точки 1 в точку 2 (рис. 22).

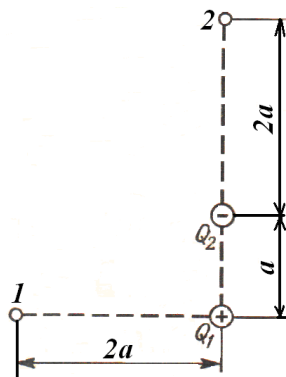


Рисунок 22 – Розташування точок 1 і 2 в електричному полі зарядів Q_1 та Q_2

334. Дві паралельні заряджені площини, поверхневі щільності заряду яких $\sigma_1 = 2 \text{ мкКл/м}^2$ і $\sigma_2 = -0,8 \text{ мкКл/м}^2$, знаходяться на відстані $d = 0,6 \text{ см}$ один від одного. Визначити різницю потенціалів U між площинами.

335. Диполь з електричним моментом $p = 100 \text{ пКл} \cdot \text{м}$ вільно встановився в однорідному електричному полі напруженістю $E = 200 \text{ кВ/м}$. Визначити роботу зовнішніх сил, яку необхідно здійснити для повороту диполя на кут $\alpha = 180^\circ$.

336. Чотири однакових краплі ртуті, заряджених до потенціалу $\phi = 10 \text{ В}$, зливаються в одну. Який потенціал ϕ_1 краплі, що утворилася?

337. Тонкий стрижень зігнутий в кільце радіусом $R = 10 \text{ см}$. Він рівномірно заряджений з лінійною щільністю заряду $\tau = 800 \text{ нКл/м}$. Визначити потенціал ϕ в точці, розташованій на осі кільця на відстані $h = 10 \text{ см}$ від його центру.

338. Поле утворено точковим диполем з електричним моментом $p = 200 \text{ пКл} \cdot \text{м}$. Визначити різницю потенціалів U двох точок поля, розташованих симетрично щодо диполя на його осі на відстані $r = 40 \text{ см}$ від центру диполя.

339. Електричне поле утворено нескінченно довгою зарядженою ниткою, лінійна щільність заряду якої $\tau = 20 \text{ пКл/м}$. Визначити різницю потенціалів U двох точок поля, віддалених від нитки на відстані $r_1 = 8 \text{ см}$ та $r_2 = 12 \text{ см}$.

340. Тонка квадратна рамка рівномірно заряджена з лінійною щільністю заряду $\tau = 200 \text{ пКл/м}$. Визначити потенціал ϕ поля в точці перетину діагоналей.

341. Порошинка масою $m = 200 \text{ мкг}$, яка несе на собі заряд $Q = 40 \text{ нКл}$, влетіла в електричне поле в напрямку силових ліній. Після проходження різниці потенціалів $U = 200 \text{ В}$ порошинка мала швидкість

$v = 10$ м/с. Визначити швидкість v_0 порошинки до того, як вона влетіла в поле.

342. Електрон, що володів кінетичною енергією $T = 10$ еВ, влетів в однорідне електричне поле в напрямку силових ліній поля. Яку швидкість буде мати електрон, пройшовши в цьому полі різницю потенціалів $U = 8$ В?

343. Знайти відношення швидкостей іонів Cu^{++} і K^{++} , які пройшли однакову різницю потенціалів.

344. Електрон з енергією $T = 400$ еВ (у нескінченності) рухається вздовж силової лінії за напрямком до поверхні металевої зарядженої сфери радіусом $R = 10$ см. Визначити мінімальну відстань a , на яку наблизиться електрон до поверхні сфери, якщо заряд її $Q = -10$ нКл.

345. Електрон, пройшовши в плоскому конденсаторі шлях від однієї пластини до іншої, придбав швидкість $v = 10^5$ м/с. Відстань між пластинами $d = 8$ мм. Знайти: 1) різницю потенціалів U між пластинами; 2) поверхневу щільність заряду σ на пластинах.

346. Порошинка масою $m = 5$ нг, яка несе на собі $N = 10$ електронів, пройшла у вакуумі прискорюючи різницю потенціалів $U = 1$ МВ. Яка кінетична енергія T порошинки? Яку швидкість v придбала порошинка?

347. Якою мінімальною швидкістю v_{min} повинен володіти протон, щоб він міг досягти поверхні зарядженої до потенціалу $\varphi = 400$ В металевої кулі (рис. 23)?

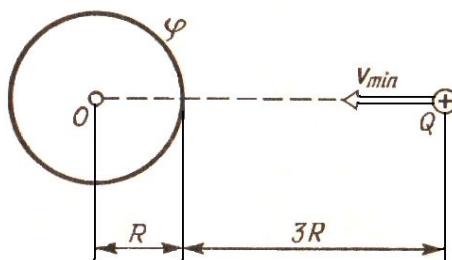


Рисунок 23 – Рух частинки з зарядом Q в електричному полі кулі

348. В однорідне електричне поле напруженістю $E = 200$ В/м влітає (вздовж силової лінії) електрон зі швидкістю $v_0 = 2$ Мм/с. Визначити відстань l , яку пройде електрон до точки, в якій його швидкість буде дорівнювати половині початкової.

349. Електричне поле створене нескінченною зарядженою прямою лінією з рівномірно розподіленим зарядом ($\tau = 10$ нКл/м). Визначити кінетичну енергію T_2 електрона в точці 2, якщо в точці 1 його кінетична енергія $T_1 = 200$ еВ (рис. 24).

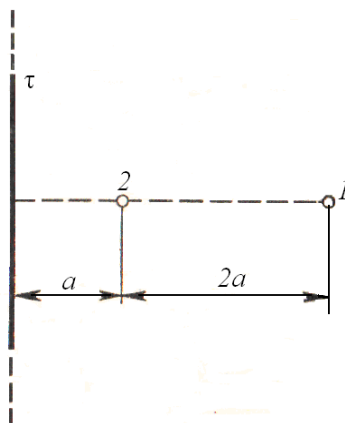


Рисунок 24 – Розташування точок 1 і 2 в електронному полі зарядженої лінії

350. Електрон рухається вздовж силової лінії однорідного електричного поля. В деякій точці поля з потенціалом $\varphi_1 = 100$ В електрон мав швидкість $V_1 = 6$ Мм/с. Визначити потенціал φ_2 точки поля, дійшовши до якої електрон втратить половину своєї швидкості.

351. Конденсатори ємністю $C_1 = 5$ мкФ і $C_2 = 10$ мкФ заряджені до напруг $U_1 = 60$ В та $U_2 = 100$ В відповідно. Визначити напругу на обкладинках конденсаторів після їх з'єднання обкладинками, що мають однойменні заряди.

352. Конденсатор ємністю $C_1 = 10$ мкФ заряджений до напруги $U = 10$ В. Визначити заряд на обкладинках цього конденсатора після того, як паралельно йому був підключений інший, незаряджений, конденсатор ємністю $C_2 = 20$ мкФ.

353. Конденсатори ємностями $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ та $C_3 = 10$ мкФ з'єднані послідовно й знаходяться під напругою $U = 850$ В. Визначити напругу й заряд на кожному з конденсаторів.

354. Два конденсатори ємностями $C_1 = 2$ мкФ і $C_2 = 5$ мкФ заряджені до напруг $U_1 = 100$ В та $U_2 = 150$ В відповідно. Визначити напругу на обкладинках конденсаторів після їх з'єднання обкладинками, що мають різнойменні заряди.

355. Два однакових плоских повітряних конденсатора ємністю $C = 100$ пФ кожен з'єднані в батарею послідовно. Визначити, на скільки зміниться ємність C батареї, якщо простір між пластинами одного з конденсаторів заповнити парафіном.

356. Два конденсатори ємностями $C_1 = 5$ мкФ і $C_2 = 8$ мкФ з'єднані послідовно й приєднані до батареї з ЕРС $\varepsilon = 80$ В. Визначити заряди Q_1 і Q_2 конденсаторів і різниці потенціалів U_1 і U_2 між їх обкладинками.

357. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіусом $R = 10$ см кожна. Відстань між пластинами $d = 2$ мм. Конденсатор приєднаний до джерела напруги $U = 80$ В. Визначити заряд Q і напруженість E поля конденсатора в двох випадках: а) діелектрик – повітря; б) діелектрик – скло.

358. Дві металеві кульки радіусами $R_1 = 5$ см і $R_2 = 10$ см мають заряди $Q_1 = 40$ нКл і $Q_2 = -20$ нКл відповідно. Знайти енергію W , що виділиться при розряді, якщо кулі з'єднати провідником.

359. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнено двома шарами діелектрика: скла товщиною $d_1 = 0,2$ см і шаром парафіну товщиною $d_2 = 0,3$ см. Різниця потенціалів між обкладинками $U = 300$ В. Визначити напруженість E поля й падіння потенціалу в кожному з шарів.

360. Плоский конденсатор з площею пластин $S = 200$ см² кожен заряджений до різниці потенціалів $U = 2$ кВ. Відстань між пластинами $d = 2$ см. Діелектрик – скло. Визначити енергію W поля конденсатора й щільність енергії ω поля.

361. Катушка й амперметр з'єднані послідовно й під'єднані до джерела струму. До клем катушки приєднаний вольтметр з опором $r = 4$ кОм. Амперметр показує силу струму $I = 0,3$ А, вольтметр – напругу $U = 120$ В. Визначити опір R катушки. Визначити відносну похибку ε , яка допущена при вимірі опору, якщо знехтувати силою струму, поточного через вольтметр.

362. ЕРС батареї $\varepsilon = 80$ В, внутрішній опір $R_i = 5$ Ом. Зовнішній ланцюг споживає потужність $P = 100$ Вт. Визначити силу струму I в ланцюзі, напруг U , під якою знаходиться зовнішня ланцюг, і її опір R .

363. Від батареї, ЕРС якої $\varepsilon = 600$ В, потрібно передати енергію на відстань $l = 1$ км. Споживана потужність $P = 5$ кВт. Знайти мінімальні втрати потужності в мережі, якщо діаметр мідних проводів, що підводять $d = 0,5$ см.

364. При зовнішньому опорі $R_1 = 8$ Ом сила струму в ланцюзі $I_1 = 0,8$ А, при опорі $R_2 = 15$ Ом сила струму $I_2 = 0,5$ А. Визначити силу струму $I_{к.з.}$ короткого замикання джерела ЕРС.

365. ЕРС батареї $\varepsilon = 24$ В. Найбільша сила струму, яку може дати батарея, $I_{max} = 10$ А. Визначити максимальну потужність P_{max} , яка може виділятися в зовнішньому ланцюзі.

366. Акумулятор з ЕРС $\varepsilon = 12$ В заряджається від мережі постійного струму з напругою $U = 15$ В. Який додатковий опір повинен бути включений в коло, для того, щоб сила зарядного струму не перевищувала 1 А? Внутрішній опір акумулятора $R_i = 2$ Ом.

367. Від джерела з напругою $U = 800$ В необхідно передати споживачеві потужність $P = 10$ кВт на деяку відстань. Який найбільший опір може мати лінія передачі, щоб втрати енергії на ній не перевищували 10 % від переданої потужності?

368. При включенні електромотора в мережу з напругою $U = 220$ В він споживає струм $I = 5$ А. Визначити потужність, яку споживає мотор, і його ККД, якщо опір R обмотки мотора дорівнює 6 Ом.

369. У мережу з напругою $U = 100$ В підключили катушку з опором $R_1 = 2$ кОм і вольтметр, які з'єднані послідовно. Показник вольтметра $U_1 = 80$ В. Коли катушку замінили на іншу, вольтметр показав $U_2 = 60$ В. Визначити опір R_2 іншої катушки.

370. ЕРС батареї $\varepsilon = 12$ В. При силі струму $I = 4$ А ККД батареї $\eta = 0,6$. Визначити внутрішній опір R_i батареї.

371. За час $t = 20$ с при рівномірно зростаючій силі струму від нуля до деякого максимуму в провіднику опором $R = 5$ Ом виділилася кількість теплоти $Q = 4$ кДж. Визначити швидкість наростання сили струму, якщо опір провідника $R = 5$ Ом.

372. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I = I_0 e^{-\alpha t}$, де $I_0 = 20$ А; $\alpha = 10^2$ с⁻¹. Визначити кількість теплоти, що виділилася в провіднику за час $t = 10^{-2}$ с.

373. Сила струму в провіднику опором $R = 10$ Ом за час $t = 50$ с рівномірно наростає від $I_1 = 5$ А до $I_2 = 10$ А. Визначити кількість теплоти Q , що виділилася за цей час в провіднику.

374. У провіднику за час $t = 10$ с при рівномірному зростанні сили струму від $I_1 = 1$ А до $I_2 = 2$ А виділилася кількість теплоти $Q = 5$ кДж. Знайти опір R провідника.

375. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I = I_0 \sin \omega t$. Знайти заряд Q , що проходить через поперечний переріз провідника за час t , яка дорівнює половині періоду T , якщо початкова сила струму $I_0 = 10$ А, циклічна частота $\omega = 50\pi$ с⁻¹.

376. За час $t = 10$ с при рівномірно зростаючій силі струму від нуля до деякого максимуму в провіднику виділилася кількість теплоти $Q = 40$ кДж. Визначити середню силу струму $\langle I \rangle$ в провіднику, якщо його опір $R = 25$ Ом.

377. За час $t = 8$ с при рівномірно зростаючій силі струму в провіднику опором $R = 8$ Ом виділилася кількість теплоти $Q = 500$ Дж. Визначити заряд q , який проходить у провіднику, якщо сила струму в початковий момент часу дорівнює нулю.

378. Визначити кількість теплоти Q , що виділилася за час $t = 10$ с в провіднику опором $R = 10$ Ом, якщо сила струму в ньому, рівномірно зменшуючись, змінилася від $I_1 = 10$ А до $I_2 = 0$.

379. Сила струму в ланцюзі змінюється за законом $I = I_0 \sin \omega t$. Визначити кількість теплоти, що виділиться в провіднику опором $R = 10$ Ом за час, що дорівнює чверті періоду (від $t_1 = 0$ до $t_2 = T/4$, де $T = 10$ с).

380. Сила струму в ланцюзі змінюється з часом за законом $I = I_0 e^{-\alpha t}$. Визначити кількість теплоти, що виділиться в провіднику опором $R = 20$ Ом за час, протягом якого струм зменшиться в e разів. Коефіцієнт α прийняти рівним $2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$.

4 ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

4.1 Основні формули

Зв'язок магнітної індукції \vec{B} з напруженістю \vec{H} магнітного поля:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (4.1)$$

де μ – магнітна проникність ізотропного середовища;

μ_0 – магнітна постійна. У вакуумі $\mu = 1$, і тоді магнітна індукція у вакуумі:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}. \quad (4.2)$$

Закон Біо – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left[\frac{d\vec{l}\vec{r}}{r^3} \right] I \quad \text{або} \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl, \quad (4.3)$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція поля, яке створене елементом проводу довжиною dl з струмом I ;

\vec{r} – радіус-вектор, спрямований від елемента провідника до точки, в якій визначається магнітна індукція;

α – кут між радіус-вектором і напрямком струму в елементі проводу.

Магнітна індукція в центрі кругового струму:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}, \quad (4.4)$$

де R – радіус кругового витка.

Магнітна індукція на осі кругового струму:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{\pi R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}}, \quad (4.5)$$

де h – відстань від центру витка до точки, в якій визначається магнітна індукція.

Магнітна індукція поля прямого струму:

$$B = \mu\mu_0 I / (2\pi r_0),$$

де r_0 – відстань від осі проводу до точки, в якій визначається магнітна індукція.

Магнітна індукція поля, яке створене відрізком проводу зі струмом (див. рис. 25, а та приклад 1):

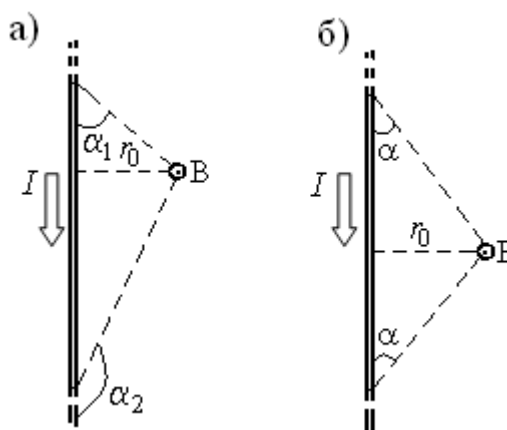


Рисунок 25 – Визначення вектора \vec{B} для а) несиметричного та б) симетричного випадків

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (4.7)$$

Позначення ясні з рисунка. Напрямок вектора магнітної індукції \vec{B} позначено крапкою – це означає, що \vec{B} направлений перпендикулярно до площини креслення до нас.

При симетричному розташуванні рещт проводу відносно точки, в якій визначається магнітна індукція (рис. 25, б), $-\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 = \cos \alpha$, тоді:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos \alpha. \quad (4.8)$$

Магнітна індукція поля довгого соленоїда:

$$B = \mu\mu_0 n I, \quad (4.9)$$

де n – відношення числа витків соленоїда до його довжини.

Сила, що діє на дріт зі струмом у магнітному полі (закон Ампера):

$$\vec{F} = I [\vec{l} \vec{B}] \quad \text{або} \quad F = I B l \sin \alpha, \quad (4.10)$$

де l – довжина дроту;

α – кут між напрямком струму у дроті й вектором магнітної індукції \vec{B} .

Цей вираз справедливий для однорідного магнітного поля й прямого відрізка дроту. Якщо поле неоднорідне й дрот не є прямим, то закон Ампера можна застосовувати до кожного елемента дроту окремо:

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}\vec{B}]. \quad (4.11)$$

Магнітний момент плоского контуру зі струмом:

$$\vec{p}_m = \vec{n}IS, \quad (4.12)$$

де \vec{n} – одиничний вектор нормалі (позитивної) до площини контуру;
 I – сила струму, що протікає по контуру;
 S – площа контуру.

Механічний (обертальний) момент, який діє на контур зі струмом, що вміщений в однорідне магнітне поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m\vec{B}] \quad \text{або} \quad M = p_m B \sin \alpha, \quad (4.13)$$

де α – кут між векторами \vec{p}_m і \vec{B} .

Потенційна енергія (механічна) контуру зі струмом у магнітному полі:

$$\Pi_{\text{мех}} = -\vec{p}_m\vec{B} \quad \text{або} \quad \Pi_{\text{мех}} = -p_m B \cos \alpha. \quad (4.14)$$

Відношення магнітного моменту p_m до механічного L (моменту імпульсу) зарядженої частинки, що рухається по колу:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{1}{2} \frac{Q}{m}, \quad (4.15)$$

де Q – заряд частинки;

m – маса частинки.

Сила Лоренца:

$$\vec{F} = Q[\vec{v}\vec{B}] \quad \text{або} \quad F = QvB \sin \alpha, \quad (4.16)$$

де \vec{v} – швидкість зарядженої частинки;

α – кут між векторами \vec{v} і \vec{B} .

Магнітний потік:

а) у разі однорідного магнітного поля й плоскої поверхні:

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad \text{або} \quad \Phi = B_n S, \quad (4.17)$$

де S – площа контуру;

α – кут між нормаллю до площини контуру й вектором магнітної індукції:

б) у випадку неоднорідного поля й довільної поверхні:

$$\Phi = \int_S B_n dS \quad (4.18)$$

(інтегрування ведеться по всій поверхні).

Потокозчеплення (повний потік):

$$\psi = N\Phi. \quad (4.19)$$

Ця формула вірна для соленоїда й тороїда з рівномірним намотуванням щільно прилеглих один до одного N витків.

Робота по переміщенню замкнутого контуру в магнітному полі:

$$A = I\Delta\Phi. \quad (4.20)$$

ЕРС індукції:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (4.21)$$

Різниця потенціалів на кінцях дроту, що рухається зі швидкістю \vec{v} у магнітному полі:

$$U = Blv \sin \alpha, \quad (4.22)$$

де l – довжина дроту;

α – кут між векторами \vec{v} і \vec{B} .

Заряд, що протікає по замкнутому контуру при зміні магнітного потоку, який пронизує цей контур:

$$Q = \Delta\Phi / R \quad \text{або} \quad Q = N\Delta\Phi / R = \Delta\psi / R, \quad (4.23)$$

де R – опір контуру.

Індуктивність контуру:

$$L = \Phi / I. \quad (4.24)$$

ЕРС самоіндукції:

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.25)$$

Індуктивність соленоїда:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (4.26)$$

де n – відношення числа витків соленоїда до його довжини;
 V – об'єм соленоїда.

Миттєве значення сили струму в ланцюзі, що має опір R та індуктивність L :

а) при замиканні ланцюга:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-Rt/L}), \quad (4.27)$$

де ε – ЕРС джерела струму;
 t – час, що минув після замикання ланцюга;

б) при розмиканні ланцюга:

$$I = I_0 e^{-Rt/L}, \quad (4.28)$$

де I_0 – сила струму в колі при $t = 0$;
 t – час, що минув з моменту розмикання ланцюга.
 Енергія магнітного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (4.29)$$

Об'ємна щільність енергії магнітного поля (відношення енергії магнітного поля соленоїда до його об'єму):

$$\omega = BH / 2 \quad \text{або} \quad \omega = B^2 / (2\mu\mu_0) \quad \text{або} \quad \omega = \mu\mu_0 H^2 / 2, \quad (4.30)$$

де B – магнітна індукція;
 H – напруженість магнітного поля.

4.2 Методичні вказівки до розділу «Електромагнетизм»

При знаходженні індукції магнітного поля методом суперпозиції з використанням або безпосередньо закону Біо – Савара – Лапласа, або

формул, виведених раніше з цього закону, слід мати на увазі, що цей закон справедливий тільки для лінійних струмів, тобто для провідників, поперечні розміри яких пренебрежимо малі в порівнянні з відстанню від провідника до заданої точки поля. Відсутність будь-яких даних про поперечні перерізи провідників в умові задачі є неявною вказівкою на лінійність струму.

Напрямок сили Ампера можна визначити або за правилом лівої руки, або безпосередньо у напрямку векторного добутка. Рух заряджених частинок в електричному й магнітному полях відбуваються під дією електричної сили $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ і магнітної (лоренцева) сили $F_l = q[\vec{v}\vec{B}]$. На частинки діє також сила тяжіння $F_m = mG$, де G – напруженість гравітаційного поля, але, як показують розрахунки, для заряджених мікрочастинок, що рухаються навіть у слабких електричних і магнітних полях, величиною F_m можна знехтувати. Так як сила Лоренца F_l нормальна до вектора \vec{v} , вона змінює лише напрям швидкості, але не його модуль, тобто вона обумовлює нормальне прискорення зарядженої частинці. Це означає, що заряджена частинка рухається в магнітному полі по дузі кола.

Розрахунок роботи сил поля слід проводити за формулою $A = I\Delta\Phi$, де $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – кінцеве прирощення магнітного потоку, що пронизує контур. При русі прямого провідника в полі під величиною $\Delta\Phi$ слід розуміти абсолютне значення магнітного потоку, яке пересічене провідником при його русі. У цьому випадку знак роботи слід визначати за напрямком руху провідника. Якщо напрямок його руху збігається з напрямком сили Ампера, то $A = I\Delta\Phi$, в іншому випадку $A = -I\Delta\Phi$.

У явищах електромагнітної індукції магнітний потік крізь контур змінюється як при русі контуру або окремих його ділянок, так і при зміні в часі магнітного потоку. В обох випадках для визначення ЕРС індукції користуються законом Фарадея (4.21).

Знак ЕРС індукції так само, як і напрямок індукційованого струму, може бути визначений безпосередньо з наведеної формули або за допомогою правила Ленца. У першому випадку слід вибрати який-небудь напрямок нормалі. Це визначить знак магнітного потоку й знак його похідної. Якщо в результаті застосування формули (4.21) індукований струм у контурі (або ЕРС індукції) виявиться величиною позитивною, то це означає, що напрямок нормалі вибрано правильно, тобто якщо дивитися з кінця вектора нормалі на контур, струм буде йти проти годинникової стрілки.

Якщо прямолінійний провідник рухається в однорідному полі, причому провідник, швидкість його руху й вектор індукції поля взаємно перпендикулярні, то можна скористатися виразом $\varepsilon_i = Bvl$. У загальному випадку:

$$\varepsilon_i = \int_l [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l}.$$

4.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. По відрітку прямого дроту довжиною $l = 80$ см тече струм $I = 50$ А. Визначити магнітну індукцію \vec{B} поля, що створене цим струмом, в точці А, яка рівновіддалена від кінців відрізка дроту й яка знаходиться на відстані $r_0 = 30$ см від його середини (рис. 26).

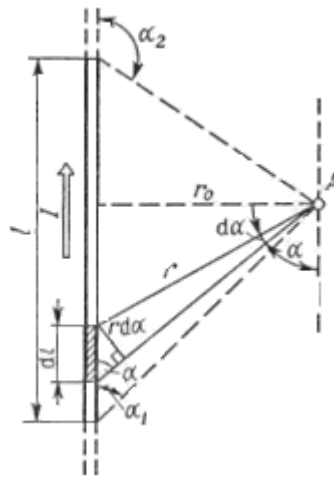


Рисунок 26 – Розташування точки А відносно відрізка прямого дроту з постійним струмом

Розв'язок. Для вирішення завдань скористаємося законом Біо – Савара – Лапласа й принципом суперпозиції магнітних полів. Закон Біо – Савара – Лапласа дозволяє визначити магнітну індукцію $d\vec{B}$, що створюється елементом струму $I d\vec{l}$. Зауважимо, що вектор $d\vec{B}$ у точці А спрямований за площину креслення. Принцип суперпозиції дозволяє для визначення \vec{B} скористатися геометричним підсумовуванням (інтегруванням):

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}, \quad (1)$$

де символ l означає, що інтегрування поширюється на всю довжину дроту.

Запишемо закон Біо – Савара – Лапласа у векторній формі:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^3} [d\vec{l}\vec{r}],$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція, що створюється елементом дроту довжиною dl з струмом I в точці, яка визначається радіусом-вектором \vec{r} ;

μ_0 – магнітна постійна;

μ – магнітна проникність середовища, в якій знаходиться дріт (у нашому випадку $\mu = 1$). Зауважимо, що вектори $d\vec{B}$ від різних елементів струму співнапрямлені (рис. 26), тому вираз (1) можна переписати у скалярній формі:

$$B = \int_l dB,$$

де

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl.$$

У скалярному виразі закону Біо – Савара – Лапласа кут α є кут між елементом струму $Id\vec{l}$ і радіусом-вектором \vec{r} . Таким чином:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\sin \alpha}{r^2} dl. \quad (2)$$

Перетворимо фундаментальний вираз так, щоб була одна змінна – кут α . Для цього виразимо довжину елемента дроту dl через кут $d\alpha$: $dl = r d\alpha / \sin \alpha$ (рис. 26).

Тоді підінтегральний вираз $\frac{\sin \alpha}{r^2} dl$ запишемо у вигляді $\frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{d\alpha}{r}$. Зауважимо, що змінна r також залежить від α , ($r = r_0 / \sin \alpha$), отже:

$$\frac{d\alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{r_0} d\alpha.$$

Таким чином, вираз (2) можна переписати у вигляді:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha,$$

де α_1 і α_2 – межі інтегрування.

Зробимо інтегрування:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (3)$$

Зауважимо, що при симетричному розташуванні точки А щодо відрізка дроту $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$. З урахуванням цього формула (3) набуде вигляду:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos \alpha_1. \quad (4)$$

З рис. 26 маємо:

$$\cos \alpha_1 = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r_0^2}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Підставивши вираз $\cos \alpha_1$ у формулу (4), отримаємо:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}. \quad (5)$$

Провівши обчислення за формулою (5), знайдемо:

$$B = 26,7 \text{ мкТл.}$$

Напрямок вектора магнітної індукції \vec{B} поля, що створене прямим струмом, можна визначити за правилом свердлика (правило правого гвинта). Для цього проводимо магнітну силову лінію (штрихова лінія на рис. 27) та по дотичній до неї в точці, що нас цікавить, проводимо вектор \vec{B} . Вектор магнітної індукції \vec{B} в точці А (рис. 26) направлений перпендикулярно до площини креслення від нас.

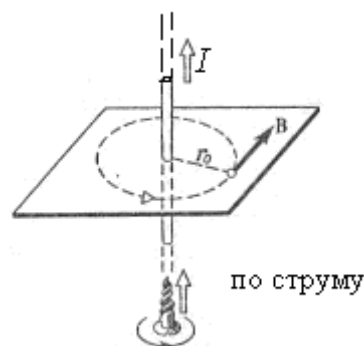


Рисунок 27 – Дія правила правого гвинта

Приклад 2. Два паралельних нескінченно довгих дроти D та C, по яких течуть в одному напрямку електричні струми силою $I = 60$ А, розташовані на відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити магнітну індукцію \vec{B} поля, що створене провідниками зі струмом в точці А (рис. 28), віддаленої від осі одного провідника на відстані $r_1 = 5$ см, від іншого – $r_2 = 12$ см.

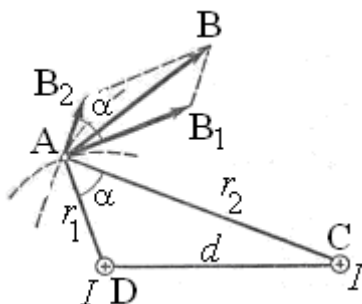


Рисунок 28 – Визначення вектора індукції \vec{B} , який створюється двома паралельними нескінченно довгими дротами D та C

Розв'язок. Для знаходження магнітної індукції \vec{B} в точці А скористаємося принципом суперпозиції магнітних полів. Для цього визначимо напрямки магнітних індукцій \vec{B}_1 і \vec{B}_2 полів, що створені кожним провідником зі струмом окремо, і складемо їх геометрично:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Модуль вектора \vec{B} може бути знайдений за теоремою косинусів:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

де α – кут між векторами \vec{B}_1 та \vec{B}_2 .

Магнітні індукції \vec{B}_1 і \vec{B}_2 виражаються відповідно через силу струму I і відстані r_1 і r_2 від проводів до точки А:

$$B_1 = \mu_0 I / (2\pi r_1); \quad B_2 = \mu_0 I / (2\pi r_2).$$

Підставляючи вирази B_1 та B_2 у формулу (1) і виносячи $\mu_0 I / (2\pi)$ за знак кореня, отримаємо:

$$B = (\mu_0 I / 2\pi) \sqrt{r_1^{-2} + r_2^{-2} + 2(r_1 r_2)^{-1} \cos \alpha}. \quad (2)$$

Обчислимо $\cos \alpha$. Помітивши, що $\alpha = \angle DAC$ (як кути з відповідно перпендикулярними сторонами), по теоремі косинусів запишемо:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha,$$

де d – відстань між дротами. Звідси:

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}; \quad \cos \alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40}.$$

Підставимо у формулу (2) числові значення фізичних величин і зробимо обчислення:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{1}{(0,05)^2} + \frac{1}{(0,12)^2}} \cdot \frac{2}{0,05 \cdot 0,12} \cdot \frac{23}{40} \text{ Тл} = 308 \text{ мкТл}.$$

Приклад 3. По тонкому провідному кільцю радіусом $R = 10$ см тече струм $I = 80$ А. Знайти магнітну індукцію \vec{B} в точці А, яка рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань $r = 20$ см.

Розв'язок. Для вирішення завдання скористаємося законом Біо – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \mu_0 I \left[d\vec{l} \vec{r} \right] / 4\pi r^2,$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція поля, що створене елементом струму $I d\vec{l}$ в точці, яка визначається радіусом-вектором \vec{r} .

Виділимо на кільці елемент $d\vec{l}$ і від нього в точку А проведемо радіус-вектор \vec{r} (рис. 29). Вектор $d\vec{B}$ направимо відповідно до правила свердлика.

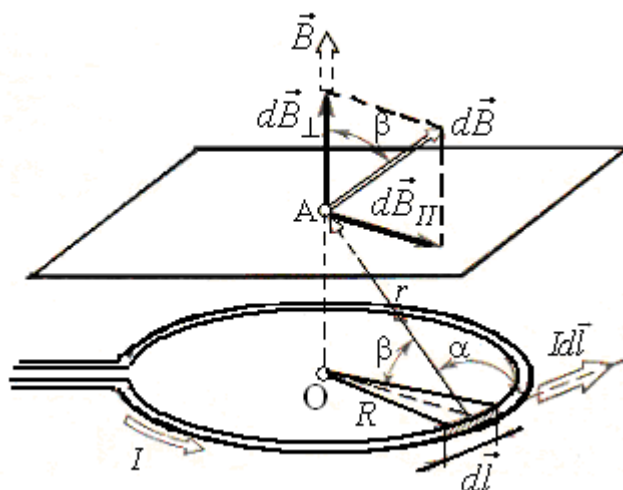


Рисунок 29 – Розташування точки А відносно кільця

Згідно з принципом суперпозиції магнітних полів, магнітна індукція

\vec{B} в точці А визначається інтегруванням:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B},$$

де інтегрування ведеться по всіх елементах dl кільця.

Розкладемо вектор $d\vec{B}$ на дві складові: $d\vec{B}_\perp$, перпендикулярну площині кільця, і $d\vec{B}_\parallel$, паралельну площині кільця, тобто:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_\perp + d\vec{B}_\parallel,$$

тоді

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}_\perp + \int_l d\vec{B}_\parallel.$$

Помітивши, що $\int_l d\vec{B}_\parallel = 0$ з міркувань симетрії та що вектори $d\vec{B}_\perp$ від різних елементів dl співнапрямлені, замінимо векторне підсумовування (інтегрування) скалярним:

$$B = \int_l dB_\perp,$$

де $dB_\perp = dB \cos \beta$ та $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$ (оскільки $d\vec{l}$ перпендикулярний \vec{r} і, отже, $\sin \alpha = 1$). Таким чином:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \cos \beta \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \cos \beta \cdot 2\pi R}{4\pi r^2}.$$

Після скорочення на 2π і заміни $\cos \beta$ на R/r (рис. 29) отримаємо:

$$B = \mu_0 IR^2 / 2r^3.$$

Перевіримо, чи дає права частина рівності одиницю магнітної індукції (Тл):

$$\frac{[\mu_0][I][R^2]}{[r^3]} = \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2}{\text{м} \cdot 1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А}^2}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = 1 \text{ Тл}.$$

Тут ми скористалися визначальною формулою для магнітної індук-

ції:

$$B = M_{max} / p.$$

Тоді:

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2}.$$

Виразимо всі величини в одиницях СІ і зробимо обчислення:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot (0,1)^2}{2 \cdot (0,2)^3} \text{ Тл} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$$

або $B = 62,8 \text{ мкТл}$.

Вектор \vec{B} спрямований по осі кільця (пунктирна стрілка на рис. 29) у відповідність з правилом свердлика.

Приклад 4. Довгий дріт зі струмом $I = 50 \text{ А}$ зігнутий під кутом $\alpha = 2\pi/3$. Визначити магнітну індукцію \vec{B} в точці А (рис. 30). Відстань $d = 5 \text{ см}$.

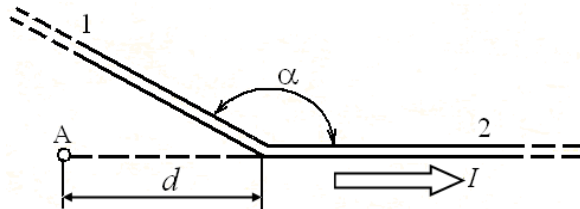


Рисунок 30 – Розташування точки А відносно зігнутого дроту

Розв'язок. Вигнутий дріт можна розглядати як два довгих дроти, кінці яких з'єднані у точці О (рис. 31). Відповідно до принципу суперпозиції магнітних полів магнітна індукція \vec{B} в точці А буде дорівнює геометричній сумі магнітних індукцій \vec{B}_1 і \vec{B}_2 полів, які створені відрізками довгих дротів 1 і 2, тобто $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Магнітна індукція \vec{B}_2 дорівнює нулю. Це впливає із закону Біо – Савара – Лапласа, згідно з яким у точках, що лежать на осі дроту, $d\vec{B} = 0$ ($[d\vec{l}\vec{r}] = 0$).

Магнітну індукцію B_1 знайдемо, скориставшись співвідношенням (3), яке знайдено у прикладі 1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

де r_0 – найкоротша відстань від дроту l до точки А (рис. 31)

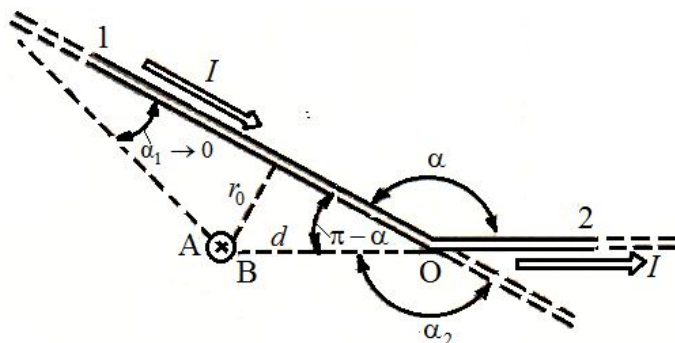


Рисунок 31 – Допоміжні побудування щодо прикладу 4

У нашому випадку $\alpha_1 \rightarrow 0$ (дріт довгий), $\alpha_2 = \alpha = 2\pi/3$ ($\cos \alpha_2 = \cos(2\pi/3) = -1/2$). Відстань $r_0 = d \sin(\pi - \alpha) = d \sin(\pi/3) = d\sqrt{3}/2$. Тоді магнітна індукція:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d \sqrt{3}/2} (1 + 1/2).$$

Так як $B = B_1$ ($B_2 = 0$), то:

$$B = \sqrt{3}\mu_0 I / 4\pi d.$$

Вектор \vec{B} співнапрямлений з вектором \vec{B}_1 і визначається правилом правого гвинта. На рис. 31 цей напрямок зазначено хрестиком в кружечку (перпендикулярно площині креслення, від нас).

Перевірка одиниць аналогічна виконаній в прикладі 3. Зробимо обчислення:

$$B = \frac{\sqrt{3} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ Тл} = 3,46 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 34,6 \text{ мкТл}.$$

Приклад 5. Два нескінченно довгих дроти схрещені під прямим кутом (рис. 32). По проводам течуть струми $I_1 = 80 \text{ А}$ та $I_2 = 60 \text{ А}$. Відстань d між дротами дорівнює 10 см. Визначити магнітну індукцію \vec{B} в точці А, однаково віддаленій від обох дротів.

Розв'язок. Відповідно до принципу суперпозиції магнітних полів магнітна індукція \vec{B} поля, що створене струмами I_1 та I_2 , визначається виразом $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, де \vec{B}_1 – магнітна індукція поля, яке створене в точці А струмом I_1 ; \vec{B}_2 – магнітна індукція поля, яке створене в точці А струмом I_2 .

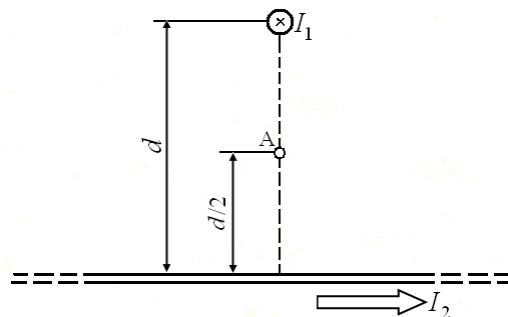


Рисунок 32 – Розташування точки А відносно проводів зі струмами I_1 та I_2

Зауважимо, що вектори \vec{B}_1 і \vec{B}_2 взаємно перпендикулярні (їх напрямки знаходяться за правилом свердлика й зображені у двох проекціях на рис. 33). Тоді модуль вектора \vec{B} можна визначити за теоремою Піфагора:

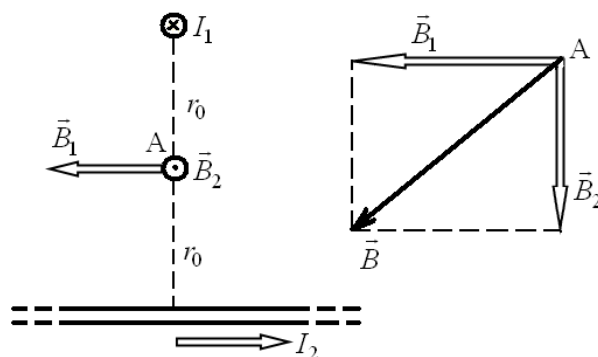


Рисунок 33 – Визначення напрямку вектора магнітної індукції \vec{B} в точці А

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2},$$

де B_1 та B_2 – визначаються за формулами розрахунку магнітної індукції для нескінченно довгого прямолінійного дроту зі струмом:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0} \quad \text{і} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_0}.$$

В нашому випадку $r_0 = d/2$, тоді:

$$B = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2}.$$

Перевірка одиниць величин аналогічна виконаній в прикладі 3.

Зробимо обчислення:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 10^{-1}} \sqrt{80^2 + 60^2} \text{ Тл} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 400 \text{ мкТл.}$$

Приклад 6. По двох паралельних прямих дротах довжиною $l = 2,5$ м кожен, що знаходяться на відстані $d = 20$ см один від одного, течуть однакові струми $I = 1$ кА. Обчислити силу взаємодії струмів.

Розв'язок. Взаємодія двох дротів, по яких течуть струми, здійснюється через магнітне поле. Кожен струм створює магнітне поле, яке діє на інший дріт.

Припустимо, що обидва струми (позначимо їх для зручності I_1 та I_2) течуть в одному напрямку. Струм I_1 створює в місці розташування другого дроту (з струмом I_2) магнітне поле.

Проведемо лінію магнітної індукції (пунктир на рис. 36) через другий дріт і по дотичній до неї – вектор магнітної індукції \vec{B}_1 . Модуль магнітної індукції \vec{B}_1 визначається співвідношенням:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}. \quad (1)$$

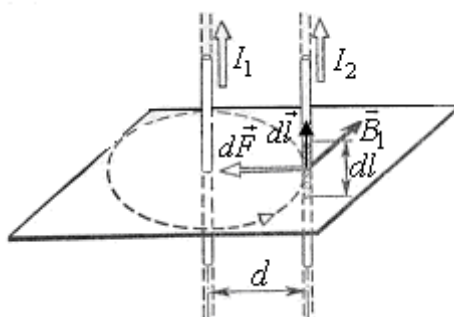


Рисунок 34 – Визначення напрямку дії сили Ампера $d\vec{F}$, яка діє на елемент $d\vec{l}$ дроту

Відповідно до закону Ампера, на кожен елемент другого дроту зі струмом I_2 довжиною dl діє в магнітному полі сила:

$$dF = I_2 B_1 dl \sin(\widehat{d\vec{l} \vec{B}_1}).$$

Оскільки вектор $d\vec{l}$ перпендикулярний вектору \vec{B}_1 то $\sin(\widehat{d\vec{l} \vec{B}_1}) = 1$ і тоді:

$$dF = I_2 B_1 dl.$$

Підставивши в цей вираз B_1 згідно з (1), отримаємо:

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl.$$

Силу F взаємодії дротів із струмом знайдемо інтегруванням:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}.$$

Помітивши, що $I_1 = I_2 = I$, отримаємо:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}.$$

Переконаємося в тому, що права частина цієї рівності дає одиницю сили (Н):

$$\frac{[\mu_0][I^2][l]}{[d]} = \frac{1 \text{ Гн/м} \cdot (1 \text{ А})^2 \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ Н}.$$

Зробимо обчислення:

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10^3)^2 \cdot 2,5}{2\pi \cdot 0,2} \text{ Н} = 2,5 \text{ Н}.$$

Сила \vec{F} співнаправлена з силою $d\vec{F}$ (рис. 36) і визначається (в даному випадку простіше) правилом лівої руки.

Приклад 7. Нескінченно довгий дріт зігнутий так, як це зображено на рис. 34. Радіус R дуги кола дорівнює 10 см. Визначити магнітну індукцію \vec{B} поля, що створюється в точці O струмом $I = 80 \text{ А}$, який тече по цьому дроту.

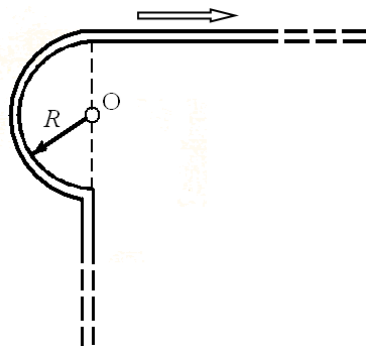


Рисунок 35— Розташування точки O відносно дрота зі струмом

Розв'язок. Магнітну індукцію \vec{B} в точці О знайдемо, використовуючи принцип суперпозиції магнітних полів: $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$. У нашому випадку дріт можна розбити на три частини (рис. 35): два прямолінійних дроти (1 і 3), одним кінцем що йдуть у нескінченність, і дугу півкола (2) радіуса R , тоді:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

де \vec{B}_1 , \vec{B}_2 і \vec{B}_3 – магнітні індукції в точці О, які створені струмом, що тече відповідно на першій, другій і третій ділянках дроту.

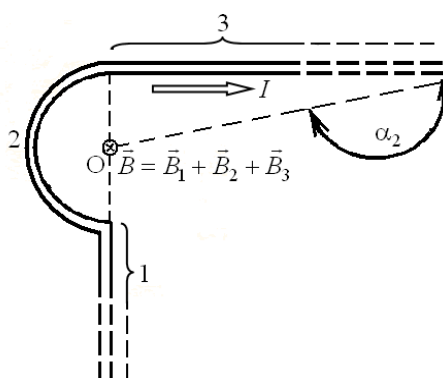


Рисунок 36 – Визначення напрямку вектора магнітної індукції \vec{B} в точці О

Оскільки точка О лежить на осі дроту 1, то $\vec{B}_1 = 0$ і тоді:

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Враховуючи, що вектори \vec{B}_2 і \vec{B}_3 направлені відповідно до правила свердлика перпендикулярно площині креслення від нас, то геометричне підсумовування можна замінити алгебраїчним:

$$B = B_2 + B_3.$$

Магнітну індукцію B_2 знайдемо, скориставшись виразом для магнітної індукції в центрі кругового струму:

$$B = \mu_0 I / 2R.$$

У нашому випадку магнітне поле в точці О створюється лише половиною такого кругового струму, тому:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Магнітну індукцію B_3 знайдемо, скориставшись співвідношенням (3), виведеним у прикладі 1:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

У нашому випадку $r_0 = R$, $\alpha_1 = \pi/2$ ($\cos \alpha_1 = 0$), $\alpha_2 \rightarrow \pi$ ($\cos \alpha_2 = -1$), тоді:

$$B_3 = \mu_0 I / 4\pi R.$$

Використовуючи знайдені вирази для B_2 і B_3 , отримаємо:

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

або

$$B = \mu_0 I (\pi + 1) / 4\pi R.$$

Перевірка одиниць величин аналогічна виконаній в прикладі 3.

Зробимо обчислення:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80}{4\pi \cdot 0,1} (\pi + 1) \text{ Тл} = 3,31 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$$

або

$$B = 331 \text{ мкТл.}$$

Приклад 8. Протон, що пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 600 \text{ В}$, влетів в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,3 \text{ Тл}$ і почав рухатися по колу (рис. 37). Обчислити радіус R кола.

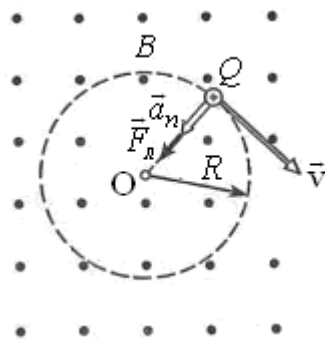


Рисунок 37 – Рух протона у магнітному полі з індукцією B

Розв'язок. Рух зарядженої частинки в однорідному магнітному полі буде відбуватися по колу тільки в тому випадку, коли частка влетить в магнітне поле перпендикулярно лініям магнітної індукції $\vec{v} \perp \vec{B}$. Оскільки сила Лоренца перпендикулярна вектору \vec{v} , то вона надає частці (протону) нормальне прискорення \vec{a}_n .

Згідно з другим законом Ньютона:

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n, \quad (1)$$

де m – маса протона.

На рис. 37 суміщена траєкторія протона з площиною креслення й наданий (довільно) напрям вектора \vec{v} . Силу Лоренца направимо перпендикулярно вектору \vec{v} до центра кола (вектори \vec{a}_n та \vec{F}_n співнаправлені). Використовуючи правило лівої руки, визначимо напрямок магнітних силових ліній (напрямок вектора \vec{B}).

Перепишемо вираз (1) в скалярній формі (у проекції на радіус):

$$F_n = ma_n. \quad (2)$$

У скалярній формі $F_n = QvB \sin \alpha$. В нашому випадку $\vec{v} \perp \vec{B}$ та $\sin \alpha = 1$, тоді $F_n = QvB$. Так як нормальне прискорення $a_n = v^2 / R$, то вираз (2) перепишемо так:

$$QvB = mv^2 / R.$$

Звідси знаходимо радіус кола:

$$R = mv / (QB).$$

Помітивши, що mv є імпульс протона (p), цей вираз можна записати у вигляді:

$$R = p / (QB). \quad (3)$$

Імпульс протона знайдемо, скориставшись зв'язком між роботою сил електричного поля й зміною кінетичної енергії протона, тобто:

$$A = \Delta T$$

або

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = T_2 - T_1,$$

де $\phi_1 - \phi_2$ – прискорююча різниця потенціалів (або прискорююча напруга U);

T_1 і T_2 – початкова та кінцева кінетичні енергії протона.

Нехтуючи початковою кінетичною енергією протона ($T_1 \approx 0$) і виразивши кінетичну енергію T_2 через імпульс p , отримуємо:

$$QU = p^2 / (2m).$$

Знайдемо з цього виразу імпульс $p = \sqrt{2mQU}$ і підставимо його у формулу (3):

$$R = \frac{\sqrt{2mQU}}{QB}$$

або

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{2mU / Q}. \quad (4)$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності дає одиницю довжини (м):

$$\begin{aligned} \frac{[m^{1/2}][U^{1/2}]}{[B][Q^{1/2}]} &= \frac{1}{1\text{Тл}} \left(\frac{1\text{кг} \cdot 1\text{В}}{1\text{Кл}} \right)^{1/2} = \frac{(1\text{кг})^{1/2} 1\text{А} \cdot \text{м}^2 (1\text{Дж})^{1/2}}{1\text{Дж} \cdot 1\text{Кл}} = \\ &= \frac{(1\text{кг})^{1/2} \cdot \text{м}^2}{(1\text{Дж})^{1/2} \cdot 1\text{с}} = \frac{(1\text{кг})^{1/2} \cdot \text{м}^2}{(1\text{кг})^{1/2} \cdot \text{м}/\text{с} \cdot \text{с}} = 1\text{ м}. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу (4) числові значення фізичних величин і зробимо обчислення:

$$R = \frac{1}{0,3} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 600}{1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} = 0,0118 \text{ м} = 11,8 \text{ мм}.$$

Приклад 9. Електрон, який влетів в однорідне магнітне поле ($B = 0,2$ Тл), став рухатися по колу радіуса $R = 5$ см. Визначити магнітний момент p_m еквівалентного кругового струму.

Розв'язок. Електрон починає рухатися по колу, якщо він влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно лініям магнітної індукції. На рис. 38 лінії магнітної індукції перпендикулярні площини креслення й спрямовані «від нас» (позначені хрестиками).

Рух електрона по колу еквівалентно круговому току, який в даному випадку визначається виразом:

$$I_{екв} = \frac{|e|}{T},$$

де e – заряд електрона;
 T – період його звернення.

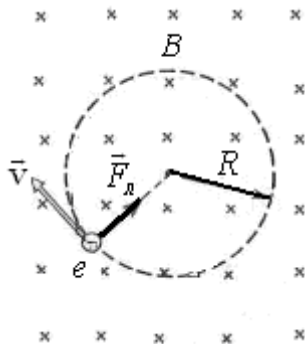


Рисунок 38 – Рух електрона у магнітному полі з індукцією B

Період обертання можна виразити через швидкість електрона v і шлях, який проходить електрон за період $T = v / (2\pi R)$. Тоді:

$$I_{екв} = |e|v / (2\pi R). \quad (1)$$

Знаючи $I_{екв}$, знайдемо магнітний момент еквівалентного кругового струму. За визначенням, магнітний момент контуру зі струмом виражається співвідношенням:

$$p_m = I_{екв} S, \quad (2)$$

де S – площа, обмежена колом, описуваного електронем ($S = \pi R^2$). Підставивши $I_{екв}$ з (1) у вираз (2), отримаємо:

$$p_m = \frac{|e|v}{2\pi R} \pi R^2.$$

Скоротимо на πR і перепишемо цей вираз у вигляді:

$$p_m = \frac{1}{2} |e| v R. \quad (3)$$

В отриманому виразі відомою є швидкість електрона, яка пов'язана з радіусом R кола, по якій він рухається, співвідношенням $R = m v / (Q B)$ (див. приклад 8). Змінивши Q на $|e|$, знайдемо цікаву для нас швидкість $v = |e| B R / m$ і підставимо її у формулу (3):

$$p_m = \frac{|e^2|BR^2}{2m}.$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності дає одиницю магнітного моменту ($\text{А} \cdot \text{м}^2$):

$$\begin{aligned} \frac{[e^2][B][R^2]}{[m]} &= \frac{(1 \text{ Кл})^2 \cdot 1 \text{ Тл} \cdot (1\text{м})^2}{1 \text{ кг}} = \frac{(1 \text{ Кл})^2 \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ А} \cdot \text{м}} = \\ &= \frac{(1 \text{ А})^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Зробимо обчислення:

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0,2 \cdot (0,05)^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 7,03 \cdot 10^{-12} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = \\ &= 7,03 \text{ пА} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Приклад 10. Електрон рухається в однорідному магнітному полі ($B = 10 \text{ мТл}$) по гвинтовій лінії, радіус R котрої дорівнює 1 см та крок $h = 6 \text{ см}$. Визначити період T обертання електрона та його швидкість v .

Розв'язок. Електрон буде рухатися по гвинтовій лінії, якщо він влітає в однорідне магнітне поле під деяким кутом ($\alpha \neq \pi/2$) до ліній магнітної індукції. Розкладемо, як це показано на рис. 39, швидкість \vec{v} електрона на дві складові: паралельну вектору \vec{B} (\vec{v}_{\parallel}) й перпендикулярну йому (\vec{v}_{\perp}).

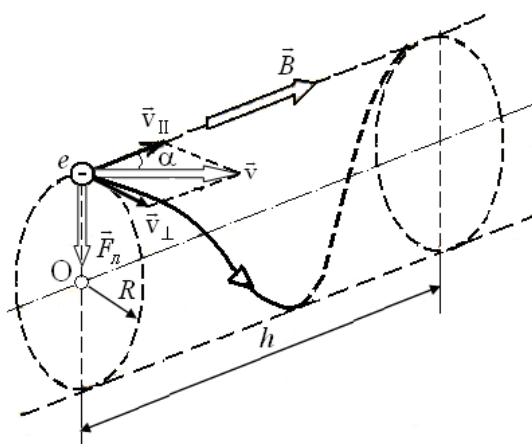


Рисунок 39 – Рух електрона по гвинтовій лінії у однорідному магнітному полі

Швидкість \vec{v}_{\parallel} в магнітному полі не змінюється й забезпечує переміщення електрона вздовж силової лінії. Швидкість \vec{v}_{\perp} в результаті дії

сили Лоренца буде змінюватися лише за напрямком ($\vec{F}_L \perp \vec{v}_\perp$) (за відсутності паралельної складової ($\vec{v}_\parallel = 0$)) рух електрона відбувався б по колу в площині, яка перпендикулярна магнітним силовим лініям). Таким чином, електрон буде брати участь одночасно у двох рухах: рівномірному переміщенні зі швидкістю v_\parallel й рівномірному русі по колу зі швидкістю v_\perp .

Період обертання електрона пов'язаний з перпендикулярною складовою швидкості співвідношенням:

$$T = 2\pi R / v_\perp. \quad (1)$$

Знайдемо відношення R / v_\perp . Для цього скористаємося тим, що сила Лоренца повідомляє електрону нормальне прискорення $a_n = v_\perp^2 / R$. Згідно з другим законом Ньютона можна написати:

$$F_L = ma_n$$

або

$$|e|v_\perp B = mv_\perp^2 / R, \quad (2)$$

де $v_\perp = v \sin \alpha$.

Скоротивши (2) на v_\perp , виразимо співвідношення R / v_\perp ($R / v_\perp = m / |e|B$) і підставимо його у формулу (1):

$$T = 2\pi m / |e|B.$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності дає одиницю часу (с):

$$\frac{[m]}{[e][B]} = \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2}{1 \text{ с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = 1 \text{ с}.$$

Зробимо обчислення:

$$T = \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \text{ с} = 3,57 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 3,57 \text{ нс}.$$

Модуль швидкості v , як це видно з рис. 45, можна виразити через v_\perp та v_\parallel :

$$v = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2}.$$

З формули (2) виразимо перпендикулярну складову швидкості:

$$v_{\perp} = \frac{|e|BR}{m}.$$

Паралельну складову швидкості v_{\parallel} знайдемо з наступних міркувань. За час, що дорівнює періоду обертання T , електрон пройде вздовж силової лінії відстань, яка дорівнює кроку гвинтової лінії, тобто $h = Tv_{\parallel}$, звідки:

$$v_{\parallel} = h/T.$$

Підставивши замість T праву частину виразу (2), отримаємо:

$$v_{\parallel} = \frac{|e|Bh}{2\pi m}.$$

Таким чином, модуль швидкості електрона:

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{|e|B}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}.$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності дає одиницю швидкості (м/с). Для цього зауважимо, що R та h мають однакову одиницю метр (м). Тому в квадратних дужках поставимо тільки одну з величин (наприклад, R):

$$\begin{aligned} \frac{[e][B]}{[m]} [R^2]^{1/2} &= \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}}{1 \text{ кг}} (\text{м}^2)^{1/2} = \frac{1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг}} = \\ &= \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Зробимо обчислення:

$$v = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left[(0,01)^2 + \left(\frac{0,06}{2\pi}\right)^2 \right]^{1/2} \text{ м/с} = 2,46 \cdot 10^7 \text{ м/с}$$

або $24,6 \cdot 10^7$ Мм/с.

Приклад 11. Альфа-частинка пройшла прискорючу різницю потенціалів $U = 104$ В і влетіла в схрещені під прямим кутом електричне ($E = 10$ кВ/м) і магнітне ($B = 0,1$ Тл) поля. Знайти відношення заряду

альфа-частинки до її маси, якщо, рухаючись перпендикулярно до обох полів, частка не відчуває відхилень від прямолінійної траєкторії.

Розв'язок. Для того, щоб знайти відношення заряду Q альфа-частинки до її маси m , скористаємося зв'язком між роботою сил електричного поля й зміною кінетичної енергії частинки:

$$QU = mv^2 / 2,$$

звідки

$$Q / m = v^2 / (2U). \quad (1)$$

Швидкість v альфа-частинки знайдемо з наступних міркувань. У схрещених електричному й магнітному полях на рухому заряджену частинку діють дві сили:

а) сила Лоренца $\vec{F}_l = Q[\vec{v}\vec{B}]$, спрямована перпендикулярно швидкості \vec{v} й вектору магнітної індукції \vec{B} ;

б) кулонівська сила $\vec{F}_k = Q\vec{E}$, співнапрявлена з вектором напруженості \vec{E} електростатичного поля ($Q > 0$). На рис. 40 направимо вектор магнітної індукції \vec{B} уздовж осі Oz , швидкість \vec{v} – в позитивному напрямку осі Ox , тоді \vec{F}_l і \vec{F}_k будуть спрямовані так, як показано на рисунку.

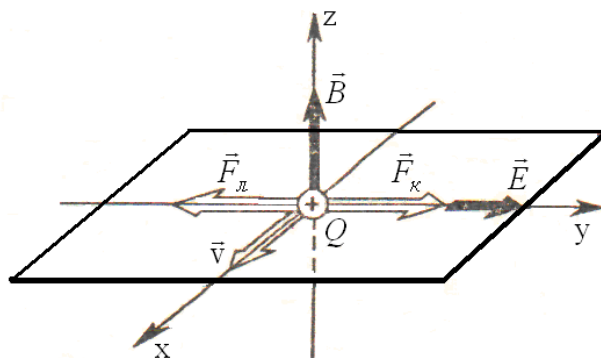


Рисунок 40 – Рух альфа-частинки в схрещених полях

Альфа-частинка не буде відчувати відхилення, якщо геометрична сума сил $\vec{F}_l = \vec{F}_k$ буде дорівнюватиме нулю. У проекції на вісь Oy отримаємо наступну рівність (при цьому враховано, що $\vec{v} \perp \vec{B}$ і $\sin \alpha = 1$):

$$QE - QvB = 0,$$

звідки

$$v = E / B.$$

Підставивши цей вираз швидкості у формулу (1), отримаємо:

$$Q / m = E^2 / (2UB^2).$$

Переконаємося в тому, що права частина рівності дає одиницю питомого заряду (Кл/кг):

$$\frac{[E^2]}{[U][B^2]} = \frac{(1 \text{ В/м})^2}{1 \text{ В} \cdot (1 \text{ Тл})^2} = \frac{(1 \text{ В} \cdot \text{А})^2}{1 \text{ В} \cdot (1 \text{ Н})^2} = \frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{Кл}}{(1 \text{ Н} \cdot \text{с})^2} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot \text{м}}{1 \text{ Н} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ Кл/кг}.$$

Зробимо обчислення:

$$\frac{Q}{m} = \frac{(10^4)^2}{2 \cdot 104(0,1)^2} \text{ Кл/кг} = 4,81 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг} = 48,1 \text{ МКл/кг}.$$

Приклад 12. Коротка катушка, яка містить $N = 10^3$ витків, рівномірно обертається з частотою $n = 10 \text{ с}^{-1}$ щодо осі АВ, що лежить в площині катушки й перпендикулярних лініях однорідного магнітного поля ($B = 0,04 \text{ Тл}$) (рис. 41). Визначити миттєве значення ЕРС індукції для тих моментів часу, коли площина катушки складає кут $\alpha = 60^\circ$ з лініями поля. Площа S катушки дорівнює 100 см^2 .

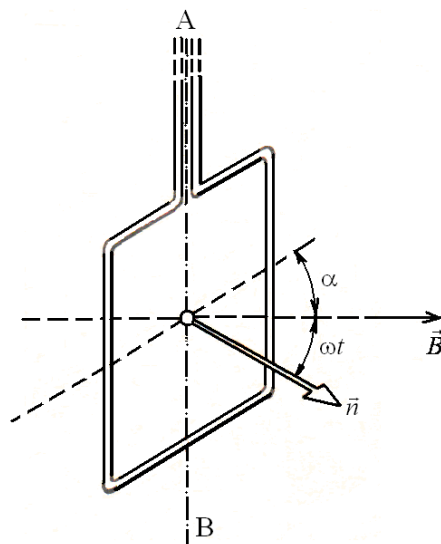


Рисунок 41– Катушка у магнітному полі

Розв'язок. Миттєве значення ЕРС індукції ε_1 визначається основним рівнянням електромагнітної індукції Фарадея – Максвелла:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (1)$$

Потокозчеплення $\psi = N\Phi$, де N – число витків катушки, які пронизані магнітним потоком Φ . Підставивши вираз ψ у формулу (1), отримаємо:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

При обертанні катушки магнітний потік Φ , що пронизує катушку в момент часу t , змінюється за законом:

$$\Phi = BS \cos \omega t,$$

де B – магнітна індукція;

S – площа катушки;

ω – кутова швидкість катушки.

Підставивши у формулу (2) вираз магнітного потоку Φ і продиференціювавши за часом, знайдемо миттєве значення ЕРС індукції:

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t.$$

Помітивши, що кутова швидкість ω пов'язана з частотою обертання n катушки співвідношенням $\omega = 2\pi n$ і що кут $\omega t = \pi/2 - \alpha$ (рис. 41), отримаємо (враховано, що $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$):

$$\varepsilon_i = 2\pi n NBS \cos \alpha.$$

Переконаємося в тому, що права частина цієї рівності дає одиницю ЕРС (В):

$$[n][B][S] = \frac{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В}.$$

Зробимо обчислення:

$$\varepsilon_i = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,04 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \text{ В} = 25,1 \text{ В}.$$

Приклад 13. Квадратна дротяна рамка зі стороною $a = 5$ см та опором $R = 10$ мОм знаходиться в однорідному магнітному полі ($B = 40$ мТл). Нормаль до площини рамки складає кут $\alpha = 30^\circ$ з лініями магнітної індукції. Визначити заряд Q , який пройде по рамці, якщо магнітне поле вимкнати.

Розв'язок. При виключенні магнітного поля відбудеться зміна магнітного потоку. Внаслідок цього в рамці виникне ЕРС індукції, яка визначається основним законом електромагнітної індукції:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Виникла ЕРС індукції викличе в рамці індукційний струм, миттєве значення якого можна визначити, скориставшись законом Ома для повного кола $I_i = \varepsilon_i / R$, де R – опір рамки, тоді:

$$I_i R = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Оскільки миттєве значення сили індукційного струму $I_i = \frac{dQ}{dt}$, то цей вираз можна переписати у вигляді:

$$\frac{dQ}{dt} R = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{звідки} \quad dQ = -\frac{d\Phi}{R}. \quad (1)$$

Проінтегрувавши вираз (1), знайдемо:

$$\int_0^Q dQ = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi \quad \text{або} \quad Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Помітивши, що при вимкненому полі (кінцевий стан) $\Phi_2 = 0$, остання рівність переписеться у вигляді:

$$Q = \Phi_1 / R. \quad (2)$$

Знайдемо магнітний потік Φ_1 . За визначенням магнітного потоку маємо:

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha,$$

де S – площа рамки.

У нашому випадку (рамка квадратна) $S = a^2$, тоді:

$$\Phi_1 = Ba^2 \cos \alpha. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (2), отримаємо:

$$Q = \frac{Ba^2}{R} \cos \alpha .$$

Переконаємося в тому, що права частина цієї рівності дає одиницю заряду (Кл):

$$\frac{[B][a^2]}{[R]} = \frac{1 \text{ Тл} \cdot (1\text{м})^2}{1 \text{ Ом}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{Ом}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ В}} = 1 \text{ Кл}.$$

Зробимо обчислення:

$$Q = \frac{0,04 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \sqrt{3/2}}{0,01} \text{ Кл} = 8,67 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 8,67 \text{ мКл}.$$

Приклад 14. Плоский квадратний контур зі стороною $a = 10$ см, по якому тече струм $I = 100$ А, вільно встановився в однорідному магнітному полі ($B = 1$ Тл). Визначити роботу A , яка здійснюється зовнішніми силами при повороті контуру відносно осі, що проходить через середину його протилежних сторін, на кут: 1) $\varphi_1 = 90^\circ$; 2) $\varphi_2 = 3^\circ$. При повороті контуру сила струму в ньому підтримується незмінною.

Розв'язок. Як відомо, на контур зі струмом у магнітному полі діє момент сили (рис. 42):

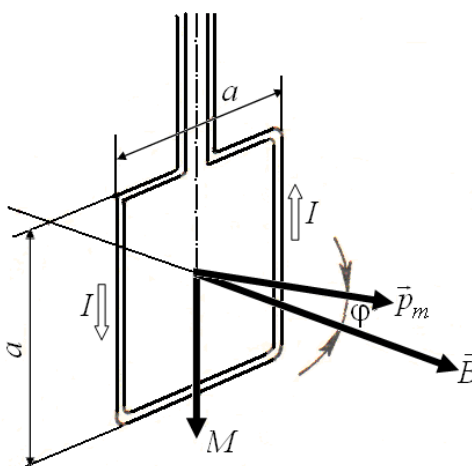


Рисунок 42 – Дія момента сили M на контур зі струмом у магнітному полі

$$M = p_m B \sin \varphi, \quad (1)$$

де $p_m = IS = Ia^2$ – магнітний момент контуру;

B – магнітна індукція;

φ – кут між векторами \vec{p}_m (спрямований по нормалі до контуру) і \vec{B} .

За умовою завдання у початковому положенні контур вільно встановився в магнітне поле. При цьому момент сили дорівнює нулю ($M = 0$), а значить, $\varphi = 0$, тобто вектори \vec{p}_m і \vec{B} співнапрямлені. Якщо зовнішні сили виведуть контур з положення рівноваги, то момент сил, що виник [див. (1)] буде прагнути повернути контур у вихідне положення. Проти цього моменту й буде відбуватися робота зовнішніми силами. Оскільки момент сил змінний (залежить від кута повороту φ), то для підрахунку роботи застосуємо формулу роботи в диференціальній формі $dA = Md\varphi$. Враховуючи формулу (1), отримуємо:

$$dA = IBa^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Взявши інтеграл від цього виразу, знайдемо роботу при повороті на кінцевий кут:

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi. \quad (2)$$

Робота при повороті на кут $\varphi_1 = 90^\circ$:

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = IBa^2 |(-\cos \varphi)|_0^{\pi/2} = IBa^2. \quad (3)$$

Виразимо числові значення величин в одиницях СІ ($I = 100 \text{ А}$; $B = 1 \text{ Тл}$; $a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$) та підставимо в (3):

$$A_1 = 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}.$$

Робота при повороті на кут $\varphi_2 = 3^\circ$. У цьому випадку, враховуючи, що кут φ_2 малий, замінімо у виразі (2) $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$A_2 = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2. \quad (4)$$

Виразимо кут φ_2 в радіанах. Після підстановки числових значень величин в (4) знайдемо:

$$A_2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,0523)^2 \text{ Дж} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,37 \text{ мДж}.$$

Завдання можна вирішити й іншими способами:

1. Робота зовнішніх сил по переміщенню контуру зі струмом у магнітному полі дорівнює добутку сили струму в контурі на зміну магнітного потоку, що пронизує контур:

$$A = -I\Delta\Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

де Φ_1 – магнітний потік, який пронизує контур до переміщення;

Φ_2 – те ж, після переміщення.

Якщо $\varphi_1 = 90^\circ$, то $\Phi_1 = BS$; $\Phi_2 = 0$. Отже:

$$A = IBS = Iba^2,$$

що збігається з (3).

2. Скористаємося виразом для механічної потенційної енергії контуру зі струмом у магнітному полі:

$$П(\varphi) = -p_m B \cos \varphi.$$

Тоді робота зовнішніх сил:

$$A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1$$

або

$$A = p_m B (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Так як $p_m = Ia^2$; $\cos \varphi_1 = 1$ і $\cos \varphi_2 = 0$, то:

$$A = Iba^2,$$

що також збігається з (3).

Приклад 15. Соленоїд з сердечником з немагнітного матеріалу містить $N = 1200$ витків проводу, щільно прилеглих один до одного. При силі струму $I = 4$ А магнітний потік $\Phi = 6$ мкВб. Визначити індуктивність L соленоїда й енергію W магнітного поля соленоїда.

Розв'язок. Індуктивність L пов'язана з потокозчепленням ψ і силою струму I співвідношенням:

$$\psi = LI. \tag{1}$$

Потокозчеплення, у свою чергу, може бути визначено через потік Φ і число витків N (за умови, що витки щільно прилягають один до одного):

$$\psi = N\Phi. \quad (2)$$

З формул (1) і (2) знаходимо індуктивність соленоїда:

$$L = N\Phi / I. \quad (3)$$

Енергія магнітного поля соленоїда:

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Виразивши згідно з (3), отримаємо:

$$W = \frac{1}{2}N\Phi I. \quad (4)$$

Підставимо у формули (3) і (4) значення фізичних величин та зробимо обчислення:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} \text{ Гн} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \text{ Дж} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 14,4 \text{ мДж}.$$

4.4 Контрольна робота № 4

Таблиця варіантів

Варіант	Номери задач							
0	410	420	430	440	450	460	470	480
1	401	411	421	431	441	451	461	471
2	402	412	422	432	442	452	462	472
3	403	413	423	433	443	453	463	473
4	404	414	424	434	444	454	464	474
5	405	415	425	435	445	455	465	475
6	406	416	426	436	446	456	466	476
7	407	417	427	437	447	457	467	477
8	408	418	428	438	448	458	468	478
9	409	419	429	439	449	459	469	479

401. Нескінченно довгий дрiт зi струмом $I = 100$ А зiгнутий так, як це показано на рис. 43. Визначити магнiтну iндукцiю \vec{B} в точцi О. Радiус дуги $R = 10$ см.

402. Магнiтний момент p_m тонкого провiдного кiльця $p_m = 5$ А · м².

Визначити магнiтну iндукцiю \vec{B} в точцi А, що знаходиться на осi кiльця й вiддаленої вiд точок кiльця на вiдстань $r = 20$ см (рис. 44).

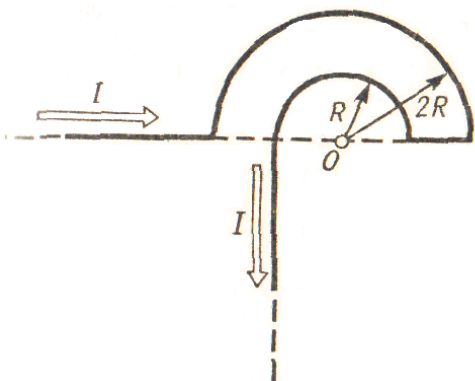


Рисунок 43 – Рисунок до задачi № 401

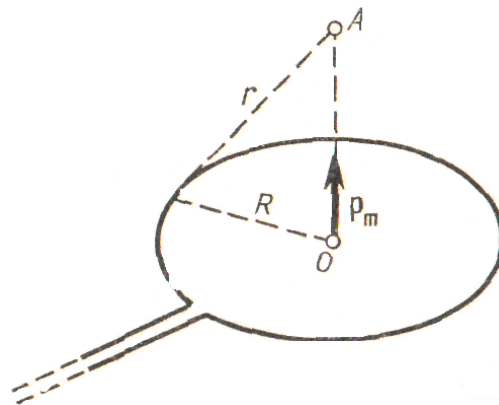


Рисунок 44 – Рисунок до задачi № 402

403. По двох схрещених пiд прямим кутом нескiнченно довгих дротах течуть струми I та $2I$ ($I = 100$ А). Визначити магнiтну iндукцiю \vec{B} в точцi А (рис. 45). Вiдстань $d = 10$ см.

404. По нескiнченно довгому дроту, що зiгнувся так, як це показано на рис. 46, тече струм $I = 200$ А. Визначити магнiтну iндукцiю \vec{B} в точцi О. Радiус дуги $R = 10$ см.

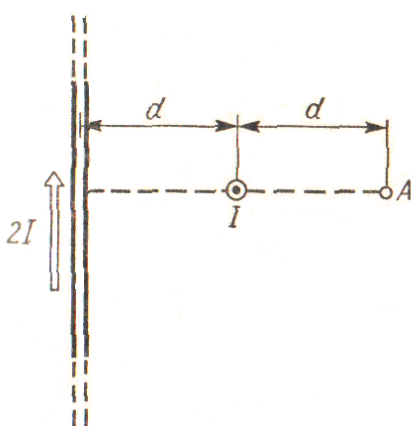


Рисунок 45 – Рисунок до задачi № 403

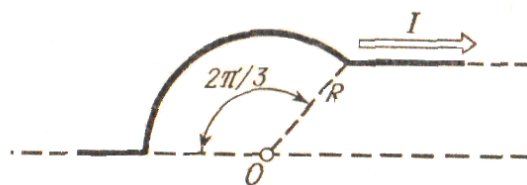


Рисунок 46 – Рисунок до задачi № 404

405. По тонкому кiльцю радiусом $R = 20$ см тече струм $I = 100$ А. Визначити магнiтну iндукцiю \vec{B} на осi кiльця в точцi (рис. 47). Кут $\beta = \pi/3$.

406. По двох нескінченно довгих дротах, які схрещені під прямим кутом, течуть струми I_1 і $I_2 = 2I_1$ ($I_1 = 100$ А). Визначити магнітну індукцію \vec{B} в точці А, яка рівновіддалена від проводів на відстань $d = 10$ см (рис. 48).

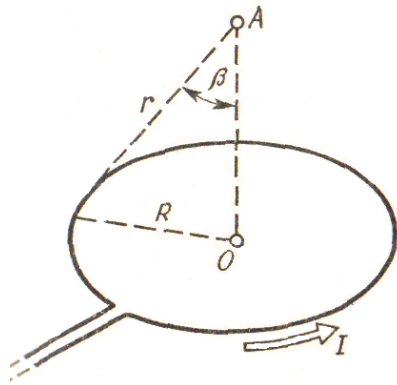


Рисунок 47 – Рисунок до задачі № 405

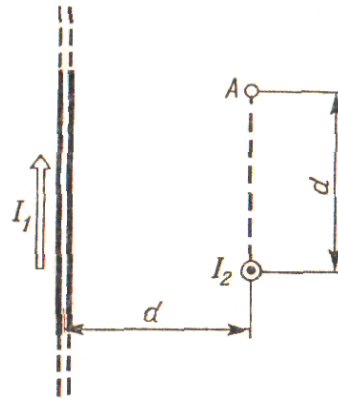


Рисунок 48 – Рисунок до задачі № 406

407. По нескінченно довгому дроту, який зігнувся так, як це показано на рис. 49, тече струм $I = 200$ А. Визначити магнітну індукцію \vec{B} в точці О. Радіус дуги $R = 10$ см.

408. По тонкому кільцю тече струм $I = 80$ А. Визначити магнітну індукцію \vec{B} в точці А, яка рівновіддалена від точок кільця на відстань $r = 10$ см (рис. 50). Кут $\alpha = \pi / 6$.

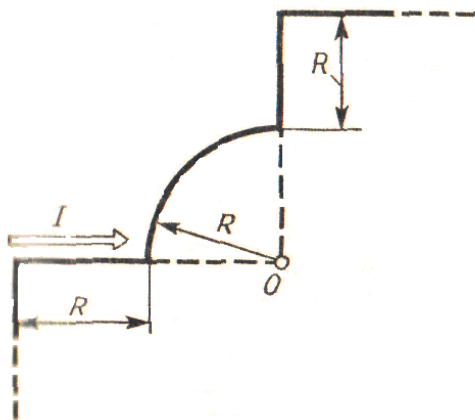


Рисунок 49 – Рисунок до задачі № 407

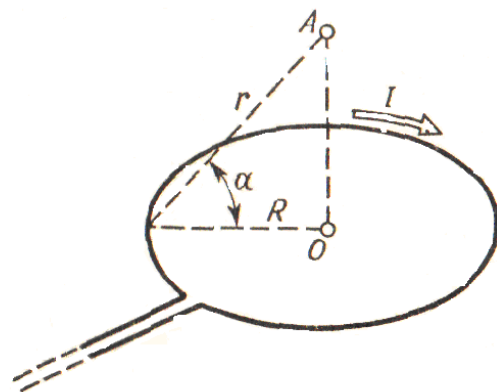


Рисунок 50 – Рисунок до задачі № 408

409. По двох нескінченно довгих, прямих паралельних дротах течуть однакові струми $I = 60$ А. Визначити магнітну індукцію \vec{B} в точці А (рис. 51), яка рівновіддалена від дротів на відстань $d = 10$ см. Кут $\beta = \pi / 3$.

410. Нескінченно довгий дрiт зi струмом $I = 50$ А зiгнутий так, як це показано на рис. 52. Визначити магнiтну iндукцiю \vec{B} в точцi А, яка лежить на бiсектрисi прямого кута на вiдстанi $d = 10$ см вiд його вершини.

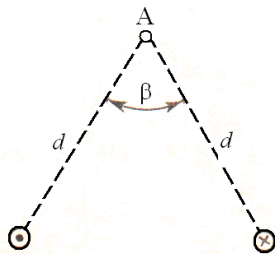


Рисунок 51 – Рисунок до задачi № 409

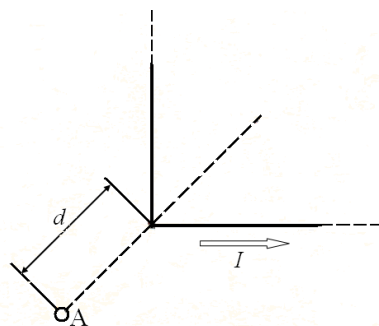


Рисунок 52 – Рисунок до задачi № 410

411. По двох паралельних дротах довжиною $l = 3$ м кожен течуть однаковi струми $I = 500$ А. Вiдстань d мiж проводами дорiвнює 10 см. Визначити силу \vec{F} взаємодiї проводiв.

412. По трьох паралельних прямих дротах, що знаходяться на однаковiй вiдстанi $d = 20$ см один вiд одного, течуть однаковi струми $I = 400$ А. У двох проводах напрямки струмiв збiгаються. Обчислити для кожного з дротiв вiдношення сили, що дiє на нього, до його довжини.

413. Квадратна дротяна рамка розташована в однiй площинi з довгим прямим дротом так, що двi її сторони паралельнi дроту. По рамцi й проводу течуть однаковi струми $I = 200$ А. Визначити силу F , що дiє на рамку, якщо найближча до дроту сторона рамки знаходиться вiд нього на вiдстанi, яка дорiвнює її довжинi.

414. Коротка катушка площею поперечного перерiзу $S = 250$ см², що мiстить $N = 500$ виткiв дроту, по якому тече струм $I = 5$ А, помещена в однорiдне магнiтне поле напруженiстю $H = 1000$ А/м. Знайти: 1) магнiтний момент p_m катушки; 2) обертаючий момент M , що дiє на катушку, якщо вiсь катушки складає кут $\varphi = 30^\circ$ з лiнiями поля.

415. Тонкий дрiт довжиною $l = 20$ см зiгнутий у виглядi пiвкiльця й помещений в магнiтне поле ($B = 10$ мТл) так, що площа пiвкiльця перпендикулярна лiнiям магнiтної iндукцiї. По дроту пропустили струм $I = 50$ А. Визначити силу \vec{F} , яка дiє на дрiт. Пiдвiднi дроту спрямованi вздовж лiнiї магнiтної iндукцiї.

416. Шини генератора довжиною $l = 4$ м знаходяться на вiдстанi $d = 10$ см один вiд одного. Знайти силу взаємного вiдштовхування шин при короткому замиканнi, якщо струм $I_{к.з}$ короткого замикання дорiвнює 5 кА.

417. Квадратний контур зі стороною $a = 10$ см, по якому тече струм $I = 50$ А, вільно встановився в однорідному магнітному полі ($B = 10$ мТл). Визначити зміну $\Delta\Pi$ потенційної енергії контуру при повороті навколо осі, що лежить в площині контуру, на кут $\vartheta = 180^\circ$.

418. Тонке провідне кільце зі струмом $I = 40$ А поміщено в однорідне магнітне поле ($B = 80$ мТл). Площина кільця перпендикулярна лініям магнітної індукції. Радіус R кільця дорівнює 20 см. Знайти силу F , яка розтягує кільце.

419. Квадратна рамка з тонкого дроту зі стороною $a = 10$ см може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що збігається з однією зі сторін. Маса m рамки дорівнює 20 г. Рамку помістили в однорідне магнітне поле ($B = 0,1$ Тл), спрямоване вертикально вгору. Визначити кут α , на який відхилилася рамка від вертикалі, коли по ній пропустили струм $I = 10$ А.

420. По витку, який має форму кола радіусом $R = 5$ см, тече струм $I = 20$ А. Виток розташований в однорідному магнітному полі ($B = 40$ мТл) так, що нормаль до площини контуру складає кут $\vartheta = \pi/6$ з вектором \vec{B} . Визначити зміну $\Delta\Pi$ потенційної енергії контуру при його повороті на кут $\varphi = \pi/2$ в напрямку збільшення кута ϑ .

421. По тонкому кільцю радіусом $R = 10$ см рівномірно розподілений заряд з лінійною щільністю $\tau = 50$ нКл/м. Кільце обертається щодо осі, перпендикулярної площини кільця й проходить через його центр, з частотою $n = 10$ с⁻¹. Визначити магнітний момент p_m , обумовлений обертанням кільця.

422. Диск радіусом $R = 8$ см несе рівномірно розподілений по поверхні заряд ($\sigma = 100$ нКл/м²). Визначити магнітний момент p_m , обумовлений обертанням диска, щодо осі, що проходить через його центр і перпендикулярну площину диска. Кутова швидкість обертання диска $\omega = 60$ рад/с.

423. Стрижень довжиною $l = 20$ см заряджений рівномірно розподіленим зарядом з лінійною щільністю $\tau = 0,2$ мкКл/м. Стрижень обертається з частотою $n = 10$ с⁻¹ відносно осі, перпендикулярної стрижню й проходить через його кінець. Визначити магнітний момент p_m , обумовлений обертанням стрижня.

424. Протон рухається по колу радіусом $R = 0,5$ см з лінійною швидкістю $v = 10^6$ м/с. Визначити магнітний момент p_m , створюваний еквівалентним круговим струмом.

425. Тонке кільце радіусом $R = 10$ см несе рівномірно розподілений заряд $Q = 80$ нКл. Кільце обертається з кутовою швидкістю $\omega = 50$ рад/с

відносно осі, що збігається з одним із діаметрів кільця. Знайти магнітний момент p_m , обумовлений обертанням кільця.

426. Заряд $Q = 0,1$ мкКл рівномірно розподілений по стрижню довжиною $l = 50$ см. Стрижень обертається з кутовою швидкістю $\omega = 20$ рад/с відносно осі, яка перпендикулярна стрижню й проходить через його середину. Знайти магнітний момент p_m , обумовлений обертанням стрижня.

427. Електрон в атомі водню рухається навколо ядра (протона) по колу радіусом $R = 53$ пм. Визначити магнітний момент p_m еквівалентного кругового струму.

428. Суцільний циліндр радіусом $R = 4$ см і висотою $h = 15$ см несе рівномірно розподілений за обсягом заряд ($\rho = 0,1$ мкКл/м³). Циліндр обертається з частотою $n = 10$ с⁻¹ відносно осі, що збігається з його геометричною віссю. Знайти магнітний момент p_m циліндра, обумовлений його обертанням.

429. По поверхні диска радіусом $R = 15$ см рівномірно розподілений заряд $Q = 0,2$ мкКл. Диск обертається з кутовою швидкістю $\omega = 30$ рад/с відносно осі, яка перпендикулярна площині диска й проходить через його центр. Визначити магнітний момент p_m , обумовлений обертанням диска.

430. По тонкому стрижню довжиною $l = 40$ см рівномірно розподілений заряд $Q = 60$ нКл. Стрижень обертається з частотою $n = 12$ с⁻¹ відносно осі, яка перпендикулярна стрижню й проходить через стрижень на відстані $a = l/3$ від одного з його кінців. Визначити магнітний момент p_m , обумовлений обертанням стрижня.

431. Два іона різних мас з однаковими зарядами влетіли в однорідне магнітне поле, стали рухатися по колу радіусами $R_1 = 3$ см та $R_2 = 1,73$ см. Визначити відношення мас іонів, якщо вони пройшли однакову прискорюючу різницю потенціалів.

432. Однозарядний іон натрію пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 1$ кВ і влетів перпендикулярно лініям магнітної індукції в однорідне поле ($B = 0,5$ Тл). Визначити відносну атомну масу A іона, якщо він описав коло радіусом $R = 4,37$ см.

433. Електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 800$ В і, влетівши в однорідне магнітне поле $B = 4,7$ мТл, став рухатися по гвинтовій лінії з кроком $h = 6$ см. Визначити радіус R гвинтової лінії.

434. Альфа-частинка пройшла прискорюючу різницю потенціалів $U = 300$ В і, потрапивши в однорідне магнітне поле, почала рухатися по

гвинтовій лінії радіусом $R = 1$ см та кроком $h = 4$ см. Визначити магнітну індукцію B поля.

435. Заряджена частинка пройшла прискорюючу різницю потенціалів $U = 100$ В і, влетівши в однорідне магнітне поле ($B = 0,1$ Тл), почала рухатися по гвинтовій лінії з кроком $h = 6,5$ см і радіусом $R = 1$ см. Визначити відношення заряду частинки до її маси.

436. Електрон влетів в однорідне магнітне поле ($B = 200$ мТл) перпендикулярно лініям магнітної індукції. Визначити силу еквівалентного кругового струму $I_{екв.}$, який створений рухом електрона в магнітному полі.

437. Протон пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 300$ В і влетів в однорідне магнітне поле ($B = 20$ мТл) під кутом $\alpha = 30^\circ$ до ліній магнітної індукції. Визначити крок h та радіус R гвинтової лінії, по якій буде рухатися протон в магнітному полі.

438. Альфа-частинка, пройшовши прискорюючу різницю потенціалів U почала рухатися в однорідному магнітному полі ($B = 50$ мТл) по гвинтовій лінії з кроком $h = 5$ см та радіусом $R = 1$ см. Визначити прискорюючу різницю потенціалів, яку пройшла альфа-частинки.

439. Іон з кінетичною енергією $T = 1$ кеВ потрапив в однорідне магнітне поле ($B = 21$ мТл) й став рухатися по колу. Визначити магнітний момент p_m еквівалентного кругового струму.

440. Іон, потрапивши в магнітне поле ($B = 0,01$ Тл), став рухатися по колу. Визначити кінетичну енергію T (в еВ) іона, якщо магнітний момент p_m еквівалентного кругового струму дорівнює $1,6 \cdot 10^{-14}$ А \cdot м².

441. Протон влетів у схрещені під кутом $\alpha = 120^\circ$ магнітне ($B = 50$ мТл) та електричне ($E = 20$ кВ/м) поля. Визначити прискорення \vec{a} протона, якщо його швидкість \vec{v} ($|\vec{v}| = 4 \cdot 10^5$ м/с) перпендикулярна векторам \vec{E} і \vec{B} .

442. Іон, пройшовши прискорюючу різницю потенціалів $U = 645$ В, влетів в схрещені під прямим кутом однорідні магнітне ($B = 1,5$ мТл) та електричне ($E = 200$ В/м) поля. Визначити відношення заряду іона до його маси, якщо іон в цих полях рухається прямолінійно.

443. Альфа-частинка влетіла в схрещені під прямим кутом магнітне ($B = 5$ мТл) та електричне ($E = 30$ кВ/м) поля. Визначити прискорення \vec{a} альфа-частинки, якщо її швидкість \vec{v} ($|\vec{v}| = 2 \cdot 10^6$ м/с) перпендикулярна векторам \vec{B} і \vec{E} , причому сили, що діють з боку цих полів, протинаправлені.

444. Електрон, пройшовши прискорюючу різницю потенціалів $U = 1,2$ кВ, потрапив у схрещені під прямим кутом однорідні магнітне й

електричне поля. Визначити напруженість \vec{E} електричного поля, якщо магнітна індукція \vec{B} поля дорівнює 6 мТл.

445. Однорідні магнітне ($B = 2,5$ мТл) та електричне ($E = 10$ кВ/м) поля схрещені під прямим кутом. Електрон, швидкість v якого дорівнює $4 \cdot 10^6$ м/с, влітає в ці поля так, що сили, які діють на нього з боку магнітного та електричного полів, співнапрямлені. Визначити прискорення \vec{a} електрона.

446. Однозарядний іон літію масою $m = 7$ а.о.м. пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 300$ В і влетів у схрещені під прямим кутом однорідні магнітне та електричне поля. Визначити магнітну індукцію \vec{B} поля, якщо траєкторія іона в схрещених полях прямолінійна. Напруженість \vec{E} електричного поля дорівнює 2 кВ/м.

447. Альфа-частинки, що має швидкість $v = 2$ Мм/с, влітає під кутом $\alpha = 30^\circ$ до співнапрявленого магнітного ($B = 1$ мТл) й електричного ($E = 1$ кВ/м) полям. Визначити прискорення \vec{a} альфа-частинки.

448. Протон пройшов деяку прискорюючу різницю потенціалів U і влетів у схрещені під прямим кутом однорідні поля: магнітне ($B = 5$ мТл) та електричне ($E = 20$ кВ/м). Визначити різницю потенціалів U , якщо протон в схрещених полях рухається прямолінійно.

449. Магнітне ($B = 2$ мТл) та електричне ($E = 1,6$ кВ/м) поля співнапрямлені. Перпендикулярно до векторів \vec{B} та \vec{E} влітає електрон зі швидкістю $v = 0,8$ Мм/с. Визначити прискорення \vec{a} електрона.

450. У схрещені під прямим кутом однорідні магнітне ($H = 1$ МА/м) та електричне ($E = 50$ кВ/м) поля влетів іон. При якій швидкості \vec{v} іона (по модулю і напрямку) він буде рухатися в схрещених полях прямолінійно?

451. Плоский контур площею $S = 20$ см² знаходиться в однорідному магнітному полі ($B = 0,03$ Тл). Визначити магнітний потік Φ , що пронизує контур, якщо площа його складає кут $\varphi = 60^\circ$ з напрямком ліній індукції.

452. Магнітний потік Φ крізь перетин соленоїда дорівнює 50 мкВб. Довжина соленоїда $l = 50$ см. Знайти магнітний момент p_m соленоїда, якщо його витки щільно прилягають один до одного.

453. У середній частині соленоїда, що містить $n = 8$ витків/см, поміщений круговий виток діаметром $d = 4$ см. Площина витка розташована під кутом $\varphi = 60^\circ$ до осі соленоїда. Визначити магнітний потік Φ , що пронизує виток, якщо по обмотці соленоїда тече струм $I = 1$ А.

454. На довгий картонний каркас діаметром $d = 5$ см укладена одношарова обмотка (виток до витка) з дроту діаметром $d = 0,2$ мм. Визна-

чити магнітний потік Φ , який створений таким соленоїдом при силі струму $I = 0,5 \text{ А}$.

455. Квадратний контур зі стороною $a = 10 \text{ см}$, в якому тече струм $I = 6 \text{ А}$, знаходиться в магнітному полі ($B = 0,8 \text{ Тл}$) під кутом $\alpha = 50^\circ$ до ліній індукції. Яку роботу A потрібно зробити, щоб при незмінній силі струму в контурі змінити його форму на коло?

456. Плоский контур зі струмом $I = 5 \text{ А}$ вільно встановився в однорідному магнітному полі ($B = 0,4 \text{ Тл}$). Площа контуру $S = 200 \text{ см}^2$. Підтримуючи струм у контурі незмінним, його повернули щодо осі, що лежить в площині контуру, на кут $\alpha = 40^\circ$. Визначити виконану при цьому роботу A .

457. Виток, в якому підтримується постійна сила струму $I = 60 \text{ А}$, вільно встановився в однорідному магнітному полі ($B = 20 \text{ мТл}$). Діаметр витка $d = 10 \text{ см}$. Яку роботу A потрібно зробити для того, щоб повернути виток щодо осі, яка збігається з діаметром, на кут $\alpha = \pi/3$?

458. В однорідному магнітному полі перпендикулярно до ліній індукції розташований плоский контур площею $S = 100 \text{ см}^2$. Підтримуючи в контурі постійну силу струму $I = 50 \text{ А}$, його перемістили з поля в область простору, де поле відсутнє. Визначити магнітну індукцію B поля, якщо при переміщенні контуру була здійснена робота $A = 0,4 \text{ Дж}$.

459. Плоский контур зі струмом $I = 50 \text{ А}$ розташований в однорідному магнітному полі ($B = 0,6 \text{ Тл}$) так, що нормаль до контуру перпендикулярна лініям магнітної індукції. Площа контуру $S = 200 \text{ см}^2$. Визначити роботу, що здійснюються силами поля при повільному повороті контуру близько осі, що лежить в площині контуру, на кут $\alpha = 30^\circ$.

460. Визначити магнітний потік Φ , який пронизує соленоїд, якщо його довжина $l = 50 \text{ см}$ і магнітний момент $p_m = 0,4 \text{ Вб}$.

461. В однорідному магнітному полі ($B = 0,1 \text{ Тл}$) рівномірно з частотою $n = 5 \text{ с}^{-1}$ обертається стрижень довжиною $l = 50 \text{ см}$ так, що площина його обертання перпендикулярна лініям напруженості, а вісь обертання проходить через один з його кінців. Визначити індуковану на кінцях стрижня різницю потенціалів U .

462. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,5 \text{ Тл}$ обертається з частотою $n = 10 \text{ с}^{-1}$ стрижень довжиною $l = 20 \text{ см}$. Вісь обертання паралельна лініям індукції й проходить через один з кінців стрижня перпендикулярно його осі. Визначити різницю потенціалів U на кінцях стрижня.

463. У дротяне кільце, приєднане до балістичного гальванометра, вставили прямий магніт. При цьому по ланцюгу пройшов заряд

$Q = 50$ мкКл. Визначити зміну магнітного потоку $\Delta\Phi$ через кільце, якщо опір ланцюга гальванометра $R = 10$ Ом.

464. Тонкий мідний дріт масою $m = 5$ г зігнутий у вигляді квадрата, і кінці його замкнуті. Квадрат поміщений в однорідне магнітне поле ($B = 0,2$ Тл) так, що його площа перпендикулярна до ліній поля. Визначити заряд Q , який потече по провіднику, якщо квадрат, потягнувши за протилежні вершини, витягнути в лінію.

465. Рамка з дроту опором $R = 0,04$ Ом рівномірно обертається в однорідному магнітному полі ($B = 0,06$ Тл). Вісь обертання лежить в площині рамки й перпендикулярна до ліній індукції. Площа рамки $S = 200$ см². Визначити заряд Q , який потече по рамці при зміні кута між нормаллю до рамки й лініями індукції: 1) від 0 до 45°; 2) від 45 до 90°.

466. Дротяний виток діаметром $D = 5$ см й опором $R = 0,02$ Ом знаходиться в однорідному магнітному полі ($B = 0,3$ Тл). Площа витка складає кут $\varphi = 40^\circ$ з лініями індукції. Який заряд Q протече по витку при вимиканні магнітного поля?

467. Рамка, яка містить $N = 200$ витків тонкого дроту, може вільно обертатися щодо осі, що лежить в площині рамки. Площа рамки $S = 50$ см². Вісь рамки перпендикулярна до ліній індукції однорідного магнітного поля ($B = 0,05$ Тл). Визначити максимальну ЕРС ε_{max} , яка індукується в рамці при її обертанні з частотою $n = 40$ с⁻¹.

468. Прямий провідний стрижень довжиною $l = 40$ см знаходиться в однорідному магнітному полі ($B = 0,1$ Тл). Кінці стрижня замкнуті гнучким дротом, який знаходиться поза полем. Опір всього ланцюга $R = 0,5$ Ом. Яка потужність P буде потрібно для рівномірного переміщення стрижня перпендикулярно лініям магнітної індукції зі швидкістю $v = 10$ м/с?

469. Дротяний контур площею $S = 500$ см² і опором $R = 0,1$ Ом рівномірно обертається в однорідному магнітному полі ($B = 0,5$ Тл). Вісь обертання лежить в площині кільця й перпендикулярна лініям магнітної індукції. Визначити максимальну потужність P_{max} необхідну для обертання контуру з кутовою швидкістю $\omega = 50$ рад/с.

470. Кільце з мідного дроту масою $m = 10$ г поміщено в однорідне магнітне поле ($B = 0,5$ Тл) так, що площа кільця складає кут $\beta = 60^\circ$ з лініями магнітної індукції. Визначити заряд Q , який пройде по кільцю, якщо зняти магнітне поле.

471. Соленоїд перетином $S = 10$ см² містить $N = 10^3$ витків. При силі струму $I = 5$ А магнітна індукція B поля всередині соленоїда дорівнює 0,05 Тл. Визначити індуктивність L соленоїда.

472. На картонний каркас довжиною $l = 0,8$ м та діаметром $D = 4$ см намотаний в один шар провід діаметром $d = 0,25$ мм так, що витки щільно прилягають один до одного. Обчислити індуктивність L отриманого соленоїда.

473. Катушка, що намотана на магнітний циліндричний каркас, має $N = 250$ витків та індуктивність $L_1 = 36$ мГн. Щоб збільшити індуктивність катушки до $L_2 = 100$ мГн, обмотку катушки зняли й замінили обмоткою з більш тонкого дроту з таким розрахунком, щоб довжина катушки залишилася колишньою. Скільки витків виявилось в катушці після перемотування?

474. Індуктивність L соленоїда, намотаного в один шар на немагнітний каркас, дорівнює $0,5$ мГн. Довжина l соленоїда дорівнює $0,6$ м, діаметр $D = 2$ см. Визначити ставлення n числа витків соленоїда до його довжини.

475. Соленоїд містить $N = 800$ витків. Перетин сердечника (з немагнітного матеріалу) $S = 10$ см². По обмотці тече струм, що створює поле з індукцією $B = 8$ мТл. Визначити середнє значення ЕРС $\langle \varepsilon_s \rangle$ самоіндукції, яка виникає на затискачах соленоїда, якщо сила струму зменшується практично до нуля за час $\Delta t = 0,8$ мс.

476. По катушці індуктивністю $L = 8$ мкГн тече струм $I = 6$ А. Визначити середнє значення ЕРС $\langle \varepsilon_s \rangle$ самоіндукції, що виникає в контурі, якщо сила струму зміниться практично до нуля за час $\Delta t = 5$ мс.

477. В електричному ланцюзі, що містить резистор опором $R = 20$ Ом і катушку індуктивністю $L = 0,06$ Гн, тече струм $I = 20$ А. Визначити силу струму I в ланцюзі через $\Delta t = 0,2$ мс після її розмикання.

478. Ланцюг складається з катушки індуктивністю $L = 0,1$ Гн і джерела струму. Джерело струму відключили, не розриваючи ланцюга. Час, через який сила струму зменшиться до $0,001$ первісного значення, дорівнює $t = 0,07$ с. Визначити опір катушки.

479. Джерело струму замкнули на катушку опором $R = 10$ Ом та індуктивністю $L = 0,2$ Гн. Через якийсь час сила струму в ланцюзі спіткає 50% максимального значення?

480. Джерело струму замкнули на катушці опором $R = 20$ Ом. Через час $t = 0,1$ с струм I в катушці досягла $0,95$ граничного значення. Визначити індуктивність L катушки.

5 ОПТИКА

5.1 Основні формули

Швидкість світла в середовищі:

$$v = c / n, \quad (5.1)$$

де c – швидкість світла у вакуумі;

n – показник заломлення середовища.

Оптична довжина шляху світлової хвилі:

$$L = nl, \quad (5.2)$$

де l – геометрична довжина шляху світлової хвилі в середовищі з показником заломлення n .

Оптична різниця ходу двох світлових хвиль:

$$\Delta = L_1 - L_2. \quad (5.3)$$

Залежність різниці фаз від оптичної різниці ходу світлових хвиль:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta, \quad (5.4)$$

де λ – довжина світлової хвилі.

Умова максимального посилення світла під час інтерференції:

$$\Delta = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.5)$$

Умова максимального послаблення світла:

$$\Delta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (5.6)$$

Оптична різниця ходу світлових хвиль, що виникає при відображенні монохроматичного світла від тонкої плівки:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda}{2} \quad (5.7)$$

або

$$\Delta = 2dn \cos i_2 \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (5.8)$$

де d – товщина плівки;

n – показник заломлення плівки;

i_1 – кут падіння;

i_2 – кут заломлення світла в плівці.

Радіус світлих кілець Ньютона у відбитому світлі:

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\lambda/2}; \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (5.9)$$

де k – номер кільця;

R – радіус кривизни.

Радіус темних кілець Ньютона у відбитому світлі:

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}. \quad (5.10)$$

Кут φ відхилення променів, який відповідає максимуму (світла смуга) при дифракції на одній щілини, визначається з умови:

$$a \sin \varphi = (2k+1)\lambda/2; \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.11)$$

де a – ширина щілини;

k – порядковий номер максимуму.

Кут φ відхилення променів, який відповідає максимуму (світла смуга) при дифракції світла на дифракційній ґратці, визначається з умови:

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda; \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.12)$$

де d – період дифракційної ґратки.

Роздільна здатність дифракційної ґратки:

$$R = \lambda / \Delta\lambda = kN, \quad (5.13)$$

де $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох сусідніх спектральних ліній (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при якій ці лінії можуть бути видні окремо в спектрі, отриманий за допомогою даної ґратки;

N – повне число щілин ґратки.

Формула Вульфа – Бреггов:

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad (5.14)$$

де θ – кут ковзання (кут між напрямком паралельного пучка рентгєнівського випромінювання, що падає на кристал, і атомною площиною у кристалі);

d – відстань між атомними площинами кристала.

Закон Брюстера:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_B = n_{21}, \quad (5.15)$$

де ε_B – кут падіння, при якому промінь, який відбився від діелектрика повністю поляризований;

n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (5.16)$$

де I_0 – інтенсивність плоскополяризованого світла, яке падає на аналізатор;

I – інтенсивність цього світла після аналізатора;

α – кут між напрямком коливань електричного вектора світла, яке падає на аналізатор, і площиною пропускання аналізатора (якщо коливання електричного вектора світла, що падає, збігаються з цією площиною, то аналізатор пропускає даний світло без ослаблення).

Кут повороту площини поляризації монохроматичного світла під час проходження через оптично активну речовину:

а) у твердих тілах:

$$\varphi = \alpha d, \quad (5.17)$$

де α – постійна обертання;

d – довжина шляху, пройденого світлом в оптично активній речовині;

б) в розчинах:

$$\varphi = [\alpha] \rho d, \quad (5.18)$$

де $[\alpha]$ – питоме обертання;

ρ – масова концентрація оптично активної речовини в розчині.

Взаємозв'язок маси й енергії релятивістської частки:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.19)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою частинки.

β – швидкість частинки, яка виражена в частках швидкості світла ($\beta = v/c$).

c – швидкість світла у вакуумі;

m – маса частинки.

Повна енергія вільної частинки:

$$E = E_0 + T, \quad (5.20)$$

де T – кінетична енергія релятивістської частинки.

Кінетична енергія релятивістської частинки:

$$T = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (5.21)$$

Імпульс релятивістської частинки:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{або} \quad p = mc \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.22)$$

Зв'язок між повною енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2. \quad (5.23)$$

Закон Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4, \quad (5.24)$$

де R_e – енергетична світність (випроміненість) абсолютно чорного тіла;

σ – постійна Стефана – Больцмана;

T – термодинамічна температура Кельвіна.

Закон зсуву Віна:

$$\lambda_m = b / T, \quad (5.25)$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання;

b – постійна Віна.

Енергія фотона:

$$\varepsilon = h\nu \quad \text{або} \quad \varepsilon = \hbar\omega, \quad (5.26)$$

де h – постійна Планка;

\hbar – постійна Планка, поділена на 2π ;

ν – частота фотона;

ω – циклічна частота.

Імпульс фотона:

$$p = h / \lambda, \quad (5.27)$$

де λ – довжина хвилі фотона.

Формула Ейнштейна для фотоэффекту:

$$h\nu = A + T_{max} = A + m\nu_{max}^2 / 2, \quad (5.28)$$

де $h\nu$ – енергія фотона, що падає на поверхню металу;

A – робота виходу електрона;

T_{max} – максимальна кінетична енергія фотоелектронів.

Червона межа фотоэффекту:

$$\nu_0 = A / h \quad \text{або} \quad \lambda_0 = hc / A, \quad (5.29)$$

де ν_0 – мінімальна частота світла, при якій ще можливий фотоэффект;

λ_0 – максимальна довжина хвилі світла, при якій ще можливий фотоэффект;

h – постійна Планка;

c – швидкість світла у вакуумі.

Формула Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (5.30)$$

або

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (5.31)$$

де λ – довжина хвилі фотона, що зустрівся з вільним або слабко пов'язаним електроном;

λ' – довжина хвилі фотона, розсіяного на кут θ після зіткнення з електроном;

m – маса електрона.

Комптонівська довжина хвилі:

$$\Lambda = h / (mc); \quad (\Lambda = 2,436 \text{ пм}). \quad (5.32)$$

Тиск світла при нормальному падінні на поверхню:

$$p = E_e(1 + \rho) / c = \omega(1 + \rho), \quad (5.33)$$

де E_e – енергетична освітленість;
 ω – об'ємна щільність енергії випромінювання;
 ρ – коефіцієнт відбиття.

5.2 Методичні вказівки до розділу «Оптика»

Інтерференція світла виникає при накладенні когерентних світлових хвиль. У звичайних оптичних системах (за винятком лазерних систем) когерентність досягається тим, що світловий пучок, що випускається точковим джерелом, розділяється на два; останні зводяться в одну точку простору, в якій і спостерігається інтерференція. Такий поділ часто призводить до того, що замість одного джерела з'являються два уявних, когерентність яких і треба встановити.

Задачі на інтерференцію світла діляться в основному на дві групи: задачі, пов'язані з інтерференцією хвиль від двох когерентних джерел і задачі на інтерференцію в тонких плівках (пластинках). До завдань першої групи належать випадки інтерференції, отримані за допомогою дзеркал Френеля, дзеркала Ллойда, біпризми Френеля, а також у досвіді Юнга. У цьому випадку використовують формули (5.5) – (5.6). Другу групу складають завдання на інтерференцію як в плоскопаралельних, так і в клиноподібних тонких пластинках, а також завдання на кільця Ньютонів. Робочими формулами в цьому випадку є формули (5.5) – (5.10).

Вирішити дифракційну задачу – означає знайти відносний розподіл освітленості на екрані залежно від розмірів і форми неоднорідностей, що викликають дифракцію. Для цих цілей залучається принцип Гюйгенса – Френеля. Точне рішення задачі на дифракцію є досить складним. Тому для розрахунку дифракційної картини для симетричних випадків залучають наближений метод зон Френеля.

Завдання на поляризацію світла, в основному, пов'язані з законами Брюстера й Малюса. У формулі (5.15), що виражає закон Брюстера, необхідно звернути увагу на зміст величин ε_B і n_{21} . Застосовуючи формулу (5.16) для закону Малюса, необхідно пам'ятати, що I_0 є інтенсивністю плоскополяризованого світла, яке падає на поляризатор, а не інтенсивністю природного світла.

Для теплового випромінювання ключовим визначенням є енергетична світність R_e тіла, яка вимірюється потоком випромінювання Φ_e , що випускаються одиницею площі поверхні, яка світиться:

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{1}{S} \frac{dW_e}{dt},$$

де dW_e – енергія, яка випромінюється поверхнею S за час dt .

Формули (5.24) та (5.25) справедливі для абсолютно чорного тіла. Для сірого тіла замість (5.24) справедливо застосувати вираз:

$$R'_e = a_T R_e,$$

де a_T – коефіцієнт чорноти, що показує, яку частину становить енергетична світність R'_e даного тіла від енергетичної світності R_e абсолютно чорного тіла, взятого при тій же температурі.

У завданнях на зовнішній фотоефект необхідний аналіз при виборі вираження для максимальної кінетичної енергії T_{\max} електрона. Якщо енергія фотона $h\nu \ll mc^2$, де $mc^2 = 0,511$ МеВ – енергія спокою електрона, то:

$$T_{\max} = \frac{m\nu_{\max}^2}{2}.$$

Якщо $h\nu \geq mc^2$, тоді:

$$T_{\max} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

де $\beta = \nu_{\max}/c$.

В останньому випадку можна знехтувати роботою виходу A .

5.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Від двох когерентних джерел S_1 та S_2 ($\lambda = 0,8$ мкм) промені потрапляють на екран. На екрані спостерігається інтерференційна картина. Коли на шляху одного із променів перпендикулярно йому помістили мильну плівку ($n = 1,33$), інтерференційна картина змінилася на протилежну. При якій найменшій товщині d_{\min} плівки це можливо?

Розв'язок. Зміна інтерференційної картини на протилежну означає, що на тих ділянках екрану, де спостерігалися інтерференційні максимуми, стали спостерігатися інтерференційні мінімуми. Такий зсув інтерференційної картини можливий при зміні оптичної різниці ходу пучків світлових хвиль на непарне число половин довжин хвиль, тобто:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k + 1)\lambda / 2, \quad (1)$$

де Δ_1 – оптична різниця ходу пучків світлових хвиль до внесення плівки;

Δ_2 – оптична різниця ходу тих же пучків після внесення плівки;
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Найменшій товщині d_{min} плівки відповідає $k = 0$. При цьому формула (1) набуде вигляду:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \lambda / 2. \quad (2)$$

Виразимо оптичні різниці ходу Δ_2 і Δ_1 з рис. 53 впливає:

$$\Delta_1 = l_1 - l_2;$$

$$\Delta_2 = [(l_1 - d_{min}) + nd_{min}] - l_2 = (l_1 - l_2) + d_{min}(n - 1).$$

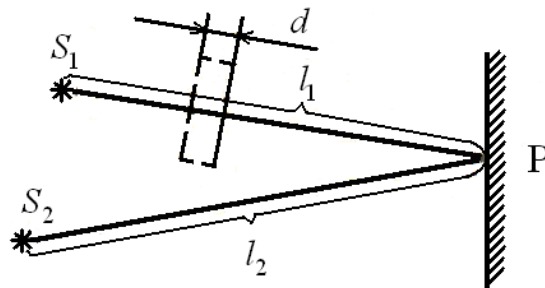


Рисунок 53 – Хід променів від двох когерентних джерел

Підставимо вирази Δ_1 та Δ_2 у формулу (2):

$$(l_1 - l_2) + d_{min}(n - 1) - (l_1 - l_2) = \lambda / 2$$

або

$$d_{min}(n - 1) = \lambda / 2.$$

Звідки:

$$d_{min} = \lambda / [2(n - 1)].$$

Зробимо обчислення:

$$d_{min} = \frac{0,8}{2(1,33 - 1)} \text{ мкм} = 1,21 \text{ мкм}.$$

Приклад 2. На скляний клин з малим кутом нормально до його грані падає паралельний пучок променів монохроматичного світла з дов-

жиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм. Число m виникаючих при цьому інтерференційних смуг, що припадають на відрізок довжини клина l , дорівнює 10. Визначити кут α клина.

Розв'язок. Паралельний пучок світла, падаючи нормально до межі клину, відбивається як від верхньої, так і від нижньої межі. Ці відбиті пучки світла когерентні. Тому на поверхні клина будуть спостерігатися інтерференційні смуги. Так як кут клина малий, то відбиті пучки 1 і 2 світла (рис. 54) будуть практично паралельні.

Темні смуги видно на тих ділянках клину, для яких різниця ходу променів кратна непарному числу половин довжин хвиль:

$$\Delta = (2k + 1)\lambda/2; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1)$$

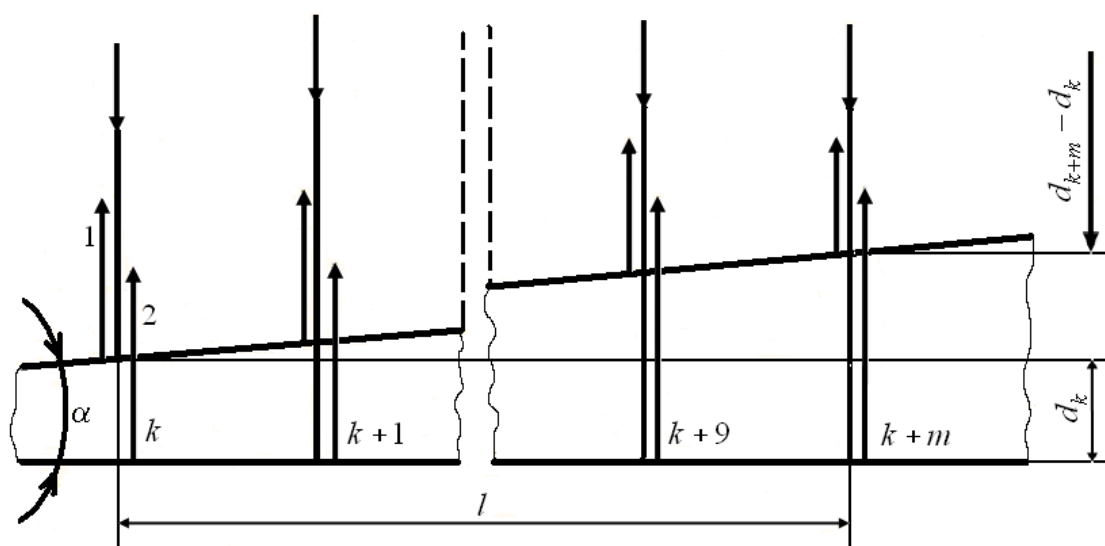


Рисунок 54 – Хід променів при відображенні світлових хвиль від поверхні клину

Різниця ходу Δ двох хвиль складається з різниці оптичних довжин шляхів цих хвиль ($2dn \cos \varepsilon_2'$) і половини довжини хвилі ($\lambda/2$). Величина $\lambda/2$ представляє собою додаткову різницю ходу, що виникає при відображенні світлової хвилі 1 від оптично більш густого середовища. Підставляючи в формулу (1) різницю ходу Δ світлових хвиль, отримуємо:

$$2d_k n \cos \varepsilon_2' + \lambda/2 = (2k + 1)\lambda/2, \quad (2)$$

де n – показник заломлення скла ($n = 1,5$);

d_k – товщина клину в тому місці, де спостерігається темна смуга, що відповідає номеру k ;

ε_2' – кут заломлення.

Згідно з умовою, кут падіння дорівнює нулю, отже, і кут заломлення ε_2' дорівнює нулю, а $\cos \varepsilon_2' = 1$. Розкривши дужки в правій частині рівності (2), після спрощення отримаємо:

$$2d_k n = k\lambda. \quad (3)$$

Нехай довільній темній смугі k -ого номера відповідає товщина d_k клина, а темній смугі $k+m$ -го номера – товщина d_{k+m} клина. Тоді (рис. 54), враховуючи, що m смуг укладається на відстані l , знайдемо:

$$\sin \alpha = (d_{k+m} - d_k) / l. \quad (4)$$

Виразимо з (3) d_k і d_{k+m} та підставимо їх у формулу (4). Потім, враховуючи, що $\sin \alpha = \alpha$ (для невеликих кутів α), отримаємо:

$$\alpha = \frac{(k+m)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{m\lambda}{2nl}.$$

Підставляючи значення фізичних величин, знайдемо:

$$\alpha = \frac{10 \cdot 0,6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,5 \cdot 1} \text{ рад} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Виразимо α у секундах. Для цього можна скористатися співвідношенням між радіаном і секундою: $1 \text{ рад} = 206265'' \approx 2,06 \cdot 10^5''$. Тоді:

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,06 \cdot 10^5'' = 41,2''.$$

Приклад 3. На дифракційну ґратку в напрямку нормалі до її поверхні падає монохроматичне світло. Період ґратки $d = 2$ мкм. Визначити найбільший порядок дифракційного максимуму, який дає ця ґратка у випадку червоного ($\lambda_1 = 0,7$ мкм) та у випадку фіолетового ($\lambda_2 = 0,41$ мкм) світла.

Розв'язок. З формули, що визначає положення головних максимумів дифракційної ґратки, знайдемо порядок m дифракційного максимуму:

$$m = (d \sin \varphi) / \lambda, \quad (1)$$

де d – період ґратки;

φ – кут дифракції;

λ – довжина хвилі монохроматичного світла. Так як $\sin \varphi$ не може бути більше 1, то число m не може бути більше d / λ , тобто:

$$m \leq d / \lambda.$$

Підставивши у формулу (2) значення величин, отримаємо:

$$m \leq 2 / 0,7 = 2,86 \quad (\text{для червоних променів});$$

$$m \leq 2 / 0,41 = 4,88 \quad (\text{для фіолетових променів}).$$

Якщо врахувати, що порядок максимумів є цілим числом, то для червоного світу $m_{max} = 2$ і для фіолетового $m_{max} = 4$.

Приклад 4. Пучок природного світла падає на поліровану поверхню скляної пластини, зануреної в рідину. Відбитий від пластини пучок світла утворює кут $\varphi = 97^\circ$ з падаючим пучком (рис. 55). Визначити показник заломлення n_1 рідини, якщо відбите світло максимально поляризоване.

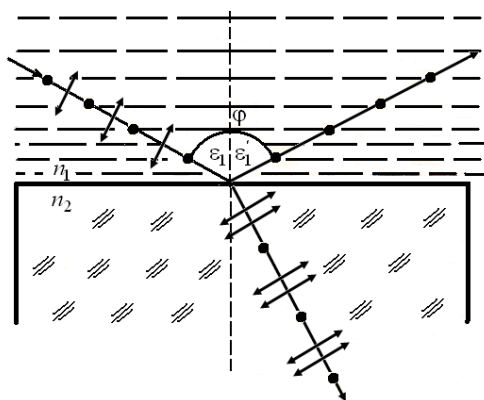


Рисунок 55 – Відбивання та заломлення світла на межі рідина – діелектрик

Розв'язок. Відповідно до закону Брюстера, пучок світла, відбитий від діелектрика, максимально поляризований в тому випадку, якщо тангенс кута падіння чисельно дорівнює відносним показником заломлення $\text{tg}\varepsilon = n_{21}$, де n_{21} – показник заломлення другого середовища (скла) щодо першої (рідини).

Відносний показник заломлення дорівнює відношенню абсолютних показників заломлення. Отже:

$$\text{tg}\varepsilon = n_2 / n_1.$$

Так як кут падіння дорівнює куту відбиття, то $\varepsilon = \varphi / 2$ і, отже, $\text{tg}(\varphi / 2) = n_2 / n_1$, звідки:

$$n_1 = \frac{n_2}{\text{tg}(\varphi / 2)}.$$

Зробимо обчислення:

$$n_1 = \frac{1,5}{\operatorname{tg}(97^\circ / 2)} = \frac{1,5}{1,13} = 1,33.$$

Приклад 5. Два ніколя N_1 і N_2 розташовані так, що кут між їх площинами пропускання становить $\alpha = 60^\circ$. Визначити, у скільки разів зменшиться інтенсивність I_0 природного світла: 1) при проходженні через один ніколь N_1 ; 2) при проходженні через обидва ніколи. Коефіцієнт поглинання світла в ніколі $k = 0,05$. Втрати на відбиття світла не враховувати.

Розв'язок 1. Природне світло, падаючи на грань призми Ніколя (рис. 56), розщеплюється внаслідок подвійного променезаломлення на два пучки: звичайний і незвичайний. Обидва пучки однакові за інтенсивністю й повністю поляризовані. Площина коливань незвичайного пучка лежить у площині креслення (площина головного перерізу). Площина коливань звичайного пучка перпендикулярна площині креслення. Звичайний пучок світла (о) внаслідок повного відображення від кордону АВ відкидається на зачорнений поверхню призми й поглинається нею. Незвичайний пучок (е) проходить через призму, зменшуючи свою інтенсивність внаслідок поглинання. Таким чином, інтенсивність світла, що пройшло через першу призму:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - k).$$

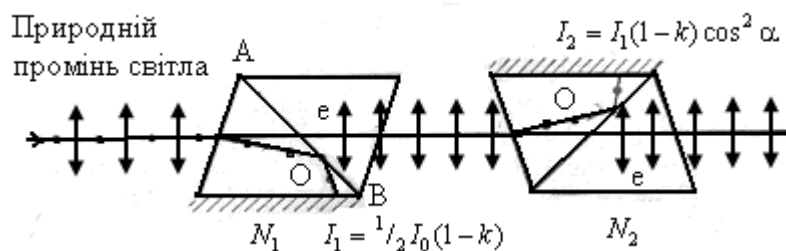


Рисунок 56 – Хід пучка світла через два ніколи

Відносно зменшення інтенсивності світла отримаємо, розділивши інтенсивність I_0 природного світла, що падає на перший ніколь, на інтенсивність I_1 поляризованого світла:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}. \quad (1)$$

Зробимо обчислення:

$$\frac{I_0}{I_i} = \frac{2}{1 - 0,05} = 2,1.$$

Таким чином, інтенсивність зменшується в 2,1 рази.

2. Плоскополяризований пучок світла інтенсивності I_1 падає на другий ніколь і також розщеплюється на два пучки різної інтенсивності: звичайний і незвичайний. Звичайний пучок повністю поглинається призмою, тому інтенсивність його нас не цікавить. Інтенсивність I_2 незвичайного пучка, що вийшов з призми N_2 , визначається законом Малюса (без урахування поглинання світла в другому ніколі):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

де α – кут між площиною коливань в поляризованому пучку й площиною пропускання ніколя N_2 .

Враховуючи втрати інтенсивності на поглинання у другому ніколі, отримаємо:

$$I_2 = I_1 (1 - k) \cos^2 \alpha.$$

Зменшення інтенсивності, що ми шукаємо при проходженні світла через обидва ніколі знайдемо, розділивши інтенсивність I_0 природного світла на інтенсивність I_2 світла, що пройшло систему з двох ніколей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1 (1 - k) \cos^2 \alpha}.$$

Замінюючи відношення I_0 / I_1 його виразом за формулою (1), отримуємо:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Зробимо обчислення:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - 0,05)^2 \cos^2 60^\circ} = 8,86.$$

Таким чином, після проходження світла через два ніколя інтенсивність його зменшиться у 8,86 рази.

Приклад 6. Плоскополяризований монохроматичний пучок світла падає на поляроїд і повністю їм гаситься. Коли на шляху пучка помістили

кварцову пластину, інтенсивність I пучка світла після поляроїда стала дорівнювати половині інтенсивності пучка, що падає на поляроїд. Визначити мінімальну товщину кварцової пластини. Поглинанням і відбиттям світла поляроїдів знехтувати, постійну обертання α кварцу прийняти рівною $48,9$ град/мм.

Розв'язок. Повне гасіння світла поляроїдів означає, що площина пропускання поляроїда (штрихова лінія на рис. 57) перпендикулярна площині коливань (I–I) плоскополяризованого світла, падаючого на нього. Введення кварцової пластини призводить до повороту площини коливань світла на кут:

$$\varphi = \alpha l, \quad (1)$$

де l – товщина пластини.

Знаючи, у скільки разів зменшиться інтенсивність світла при проходженні його через поляроїд, визначимо кут β , який встановиться між площиною пропускання поляроїда й новим напрямком (II–II) площини коливань падаючого на поляроїд плоскополяризованого світла. Для цього скористаємося законом Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \beta.$$

Помітивши, що $\beta = \pi/2 - \varphi$, можна написати:

$$I = I_0 \cos^2 (\pi/2 - \varphi), \quad \text{або} \quad I = I_0 \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

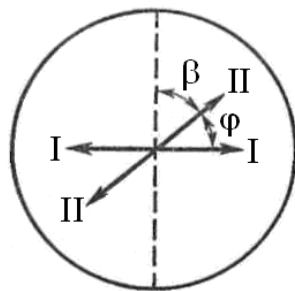


Рисунок 57 – Визначення кута повороту β

З рівності (2) з урахуванням (1) отримаємо $\alpha l = \arcsin \sqrt{I/I_0}$, звідки шукана товщина пластини:

$$l = (1/\alpha) \arcsin \sqrt{I/I_0}.$$

Зробимо обчислення у позасистемних одиницях:

$$l = \frac{1}{48,9} \arcsin \sqrt{1/2} \text{ мм} = \frac{0,785}{48,9} \text{ мм} = 16 \text{ мкм.}$$

Приклад 7. Визначити релятивістський імпульс електрона, що володіє кінетичною енергією $T = 5 \text{ МеВ}$.

Розв'язок. Релятивістська енергія E електрона пов'язана з його імпульсом p та масою m відношенням:

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \quad (1)$$

де c – швидкість світу у вакуумі.

Возводячи рівність (1) у квадрат, отримаємо:

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2, \quad (2)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою електрона.

З (2) знаходимо релятивістський імпульс:

$$p = (1/c) \sqrt{E^2 - E_0^2} = (1/c) \sqrt{(E - E_0)(E + E_0)}. \quad (3)$$

Різниця між повною енергією та енергією спокою є кінетична енергія T частинки: $E - E_0 = T$. Легко переконатися, що $E + E_0 = T + 2E_0$, тому зв'язок, який шукаємо, між імпульсом і кінетичною енергією релятивістської частинки виразиться формулою:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2E_0)}.$$

Обчислення зручно провести в два етапи: спочатку знайти числове значення радикала під позасистемних одиницях, а потім перейти до обчислення в одиницях СІ. Таким чином:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{T(T + 2E_0)}}{c} = \frac{\sqrt{5(5 + 2 \cdot 0,51)}}{c} \text{ МеВ} = \frac{5,5}{c} \text{ МеВ} = \\ &= \frac{5,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \text{ Дж} = 2,93 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с}. \end{aligned}$$

Приклад 8. Довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії в спектрі випромінювання чорного тіла, $\lambda_0 = 0,58 \text{ мкм}$. Визначити енергетичну світність (випроміненість) R_e поверхні тіла.

Розв'язок. Енергетична світність R_e абсолютно чорного тіла відповідно до закону Стефана – Больцмана пропорційна четвертому ступеню термодинамічної температури й виражається формулою:

$$R_e = \sigma T^4, \quad (1)$$

де σ – постійна Стефана – Больцмана;

T – термодинамічна температура.

Температуру T можна обчислити за допомогою закону зсуву Віна:

$$\lambda_0 = b / T, \quad (2)$$

де b – постійна закону зсуву Віна.

Використовуючи формули (2) і (1), отримуємо:

$$R_e = \sigma (b / \lambda_0)^4. \quad (3)$$

Зробимо обчислення:

$$R_e = 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{2,90 \cdot 10^{-3}}{5,8 \cdot 10^{-7}} \right)^4 \text{ Вт/м}^2 = 3,54 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2 = 35,4 \text{ МВт/м}^2.$$

Приклад 9. Визначити максимальну швидкість v_{max} фотоелектронів, що вириваються з поверхні срібла: 1) ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,155$ мкм; 2) γ випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_2 = 1$ пм.

Розв'язок. Максимальну швидкість фотоелектронів можна визначити з рівняння Ейнштейна для фотоефекту:

$$\varepsilon = A + T_{max}, \quad (1)$$

де ε – енергія фотонів, що падають на поверхню металу;

A – робота виходу;

T_{max} – максимальна кінетична енергія фотоелектронів.

Енергія фотона обчислюється також за формулою:

$$\varepsilon = hc / \lambda, \quad (2)$$

де h – постійна Планка;

c – швидкість світлу у вакуумі;

λ – довжина хвилі.

Кінетична енергія електрона може бути виражена або за класичною формулою:

$$T = m\nu^2 / 2, \quad (3)$$

або за релятивістської формулою:

$$T = E_0(1 / \sqrt{1 - \beta^2} - 1), \quad (4)$$

в залежності від того, яка швидкість повідомляється фотоелектрону. Швидкість фотоелектрона залежить від енергії фотона, що викликає фото-ефект: якщо енергія ε фотона багато менш ніж енергія спокою E_0 електрона, то може бути застосована формула (3), якщо ж ε порівняна за розміром з E_0 , то обчислення за формулою (3) приводить до помилки, тому потрібно користуватися формулою (4).

1. Обчислимо енергію фотона ультрафіолетового випромінювання за формулою (2):

$$\varepsilon_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^{-7}} \text{ Дж} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$$

або

$$\varepsilon_1 = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ еВ} = 8 \text{ еВ.}$$

Отримана енергія фотона (8 еВ) багато менша за енергію спокою електрона (0,51 МеВ). Отже, для даного випадку кінетична енергія фотоелектрона у формулі (1) може бути виражена за класичною формулою (3):

$$\varepsilon_1 = A + m\nu_{max}^2 / 2,$$

звідки

$$\nu_{max} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A) / m}. \quad (5)$$

Перевіримо, чи дає отримана формула одиницю швидкості. Для цього в праву частину формули (5) замість символів величин підставимо позначення одиниць:

$$\left(\frac{[\varepsilon_1 - A]}{[m]} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}} \right)^{1/2} = 1 \text{ м/с.}$$

Знайдена одиниця є одиницею швидкості. Підставивши значення величин у формулу (5), знайдемо:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18})}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

2. Обчислимо енергію фотона γ – випромінювання:

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} \text{ Дж} = 1,99 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$$

або під позасистемних одиницях

$$\varepsilon_2 = \frac{1,99 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ еВ} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ еВ} = 1,24 \text{ МеВ.}$$

Робота виходу електрона ($A = 4,7 \text{ еВ}$) нехтовно мала в порівнянні з енергією фотона ($\varepsilon_2 = 1,24 \text{ МеВ}$), тому можна прийняти, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії фотона: $T_{max} = \varepsilon_2 = 1,24 \text{ МеВ}$. Оскільки в даному випадку кінетична енергія електрона більше його енергії спокою, то для обчислення швидкості електрона треба взяти релятивістську формулу кінетичної енергії (4). З цієї формули знайдемо:

$$\beta = \sqrt{(2E_0 + T)T} / (E_0 + T).$$

Помітивши, що $v = c\beta$ і $T_{max} = \varepsilon_2$, отримаємо:

$$v_{max} = c\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2)\varepsilon_2} / (E_0 + \varepsilon_2).$$

Зробимо обчислення :

$$v_{max} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 1,24) \cdot 1,24}}{0,51 + 1,24} \text{ м/с} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Приклад 10. У результаті ефекту Комптона фотон при зіткненні з електроном був розсіяний на кут $\theta = 90^\circ$. Енергія розсіяного фотона. $\varepsilon_2 = 0,4 \text{ МеВ}$. Визначити енергію фотона ε_1 до розсіювання.

Розв'язок. Для визначення енергії первинного фотона скористаємося формулою Комптона:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1)$$

де $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ – зміна довжини хвилі фотона в результаті розсіювання на вільному електроні;

h – постійна Планка;

m – маса електрона;

c – швидкість світла у вакуумі;

ϑ – кут розсіювання фотона.

Перетворимо формулу (1): 1) замінимо в ній $\Delta\lambda$ на $\lambda_2 - \lambda_1$; 2) виразимо довжини хвиль λ_1 і λ_2 через енергії ε_1 та ε_2 відповідних фотонів, скориставшись формулою $\varepsilon = hc / \lambda$; 3) помножимо чисельник і знаменник правої частини формули на c , тоді:

$$\frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{mc^2} 2\sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Скоротимо на hc і виразимо з цієї формули шукану енергію:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 m_0 c^2}{mc^2 - \varepsilon_2 2\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\varepsilon_2 E_0}{E_0 - 2\varepsilon_2 \sin^2(\vartheta/2)}, \quad (2)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою електрона.

Обчислення за формулою (2) зручніше вести під позасистемних одиницях. Так як для електрона $E_0 = 0,511$ МеВ, то:

$$\varepsilon_1 = \frac{0,4 \cdot 0,511}{0,511 - 2 \cdot 0,4 \sin^2(90^\circ/2)} \text{ МеВ} = 1,85 \text{ МеВ}.$$

Приклад 11. Пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 663$ нм падає нормально на дзеркальну плоску поверхню. Потік випромінювання $\Phi_e = 0,6$ Вт. Визначити: 1) силу тиску F , випробовувану цією поверхнею; 2) кількість фотонів, які щомиті падають на поверхню.

Розв'язок. 1. Сила світлового тиску на поверхню дорівнює добутку світлового тиску p на площу S поверхні:

$$F = pS. \quad (1)$$

Світловий тиск може бути знайдено за формулою:

$$p = E_e(\rho + 1) / c, \quad (2)$$

де E_e – енергетична освітленість;

c – швидкість світла у вакуумі;

ρ – коефіцієнт відбиття.

Підставляючи праву частину виразу (2) у формулу (1), отримаємо:

$$F = E_e S (\rho + 1) / c. \quad (3)$$

Оскільки $E_e S$ представляє собою потік випромінювання Φ_e , то:

$$F = \Phi_e (\rho + 1) / c. \quad (4)$$

Зробимо обчислення, враховуючи, що для дзеркальної поверхні $\rho = 1$:

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8} (1 + 1) \text{ Н} = 4 \text{ кН}.$$

2. Множення енергії ε одного фотона на число фотонів n_1 , які щомиті падають на поверхню, дорівнює потужності випромінювання, тобто потоку випромінювання: $\Phi_e = \varepsilon n_1$, а оскільки енергія фотона $\varepsilon = hc / \lambda$, то:

$$\Phi_e = hcn_1 / \lambda,$$

звідки

$$n_1 = \Phi_e \lambda / (hc). \quad (5)$$

Зробимо обчислення:

$$n_1 = \frac{0,6 \cdot 6,63 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ с}^{-1} = 2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

5.4 Контрольна робота № 5

Таблиця варіантів

Варіант	Номери задач							
	510	520	530	540	550	560	570	580
0	510	520	530	540	550	560	570	580
1	501	511	521	531	541	551	561	571
2	502	512	522	532	542	552	562	572
3	503	513	523	533	543	553	563	573
4	504	514	524	534	544	554	564	574
5	505	515	525	535	545	555	565	575
6	506	516	526	536	546	556	566	576
7	507	517	527	537	547	557	567	577
8	508	518	528	538	548	558	568	578
9	509	519	529	539	549	559	569	579

501. Між скляною пластинкою й плосковипуклою лінзою, що лежить на ній, перебуває рідина. Знайти показник заломлення рідини, якщо радіус r_3 третього темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0,6$ мкм дорівнює $0,28$ мм. Радіус кривизни лінзи $R = 0,5$ м.

502. На тонку плівку в напрямку нормалі до її поверхні падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм. Відбите від неї світло максимально посилене внаслідок інтерференції. Визначити мінімальну товщину d_{min} плівки, якщо показник заломлення матеріалу плівки $n = 1,4$.

503. Відстань L від щілин до екрану в досліді Юнга дорівнює 1 м. Визначити відстань між щілинами, якщо на відрізку довжиною $l = 1$ см укладається $N = 10$ темних інтерференційних смуг. Довжина хвилі $\lambda = 0,7$ мкм.

504. На скляну пластину покладена опуклою стороною плоскоопукла лінза. Зверху лінза висвітлена монохроматичним світлом довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм. Знайти радіус R лінзи, якщо радіус четвертого, темного кільця Ньютона у відбитому світлі $r_4 = 2$ мм.

505. На тонку гліцеринову плівку товщиною $d = 1,5$ мкм нормально до її поверхні падає біле світло. Визначити довжини хвиль λ променів видимої ділянки спектру ($0,4 \leq \lambda \leq 0,8$ мкм), які будуть ослаблені в результаті інтерференції.

506. На скляну пластину нанесений тонкий шар прозорої речовини з показником заломлення $n = 1,3$. Пластинка висвітлена паралельним пучком монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 640$ нм, який падає на пластинку нормально. Яку мінімальну товщину d_{min} повинен мати шар, щоб відбитий пучок мав найменшу яскравість?

507. На тонкий скляний клин падає нормально паралельний пучок світла з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм. Відстань між сусідніми темними інтерференційними смугами у відбитому світлі $b = 0,5$ мм. Визначити кут α між поверхнями клину. Показник заломлення скла, з якого виготовлений клин, $n = 1,6$.

508. Плоскоопукла скляна лінза с $f = 1$ м лежить опуклою стороною на скляній пластинці. Радіус п'ятого темного кільця Ньютона у відбитому світлі $r_5 = 1,1$ м. Визначити довжину світлової хвилі λ .

509. Між двома плоскопаралельними пластинами на відстані $L = 10$ см від межі їхнього зіткнення знаходиться дріт діаметром $d = 0,01$ мм, утворюючи повітряний клин. Пластини висвітлюються нормально падаючим монохроматичним світлом ($\lambda = 0,6$ мкм). Визначити ширину b інтерференційних смуг, що спостерігаються у відбитому світлі.

510. Устаткування для спостереження кілець Ньютона освітлюється нормально падаючим монохроматичним світлом ($\lambda = 590$ нм). Радіус кривизни R лінзи дорівнює 5 см. Визначити товщину d_3 повітряного проміжку в тому місці, де у відбитому світлі спостерігається третє світле кільце.

511. Яке найменше число N_{min} штрихів повинна містити дифракційна ґратка, щоб у спектрі другого порядку можна було бачити роздільно дві жовті лінії натрію з довжинами хвиль $\lambda_1 = 589,0$ нм і $\lambda_2 = 589,6$ нм? Яка довжина l таких ґрат, якщо постійна ґратки $d = 5$ мкм?

512. На поверхню дифракційної ґратки нормально до її поверхні падає монохроматичне світло. Постійна дифракційної ґратки в $n = 4,6$ рази більше довжини світлової хвилі. Знайти загальне число M дифракційних максимумів, які теоретично можна спостерігати в даному випадку.

513. На дифракційну ґратку падає нормально паралельний пучок білого світла. Спектри третього й четвертого порядку частково накладаються один на одного. На яку довжину хвилі в спектрі четвертого порядку накладається межа ($\lambda = 780$ нм) спектру третього порядку?

514. На дифракційну ґратку, яка містить $n = 600$ штрихів на міліметр, падає нормально біле світло. Спектр проектується вміщеною поблизу ґратки лінзою на екран. Визначити довжину l спектра першого порядку на екрані, якщо відстань від лінзи до екрана $L = 1,2$ м. Межі видимого спектру: $\lambda_{чер} = 780$ нм; $\lambda_{ф} = 400$ нм.

515. На грань кристала кам'яної солі падає паралельний пучок рентгенівського випромінювання. Відстань d між атомними площинами дорівнює 280 пм. Під кутом $\theta = 65^\circ$ до атомної площині спостерігається дифракційний максимум першого порядку. Визначити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

516. На непрозору пластину з вузькою щілиною падає нормально плоска монохроматична світлова хвиля ($\lambda = 600$ нм). Кут відхилення променів, які відповідають другому дифракційному максимуму, $\varphi = 20^\circ$. Визначити ширину a щілини.

517. На дифракційну ґратку, яка містить $n = 100$ штрихів на 1 мм, нормально падає монохроматичне світло. Зорова труба спектрометра наведена на максимум другого порядку. Щоб навести трубу на інший максимум того ж порядку, її потрібно повернути на кут $\Delta\varphi = 16^\circ$. Визначити довжину хвилі λ світла, яка падає на ґратку.

518. На дифракційну ґратку падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 410$ нм). Кут $\Delta\varphi$ між напрямками на максимумах першого й другого

порядків дорівнює $2^{\circ}21'$. Визначити число n штрихів на 1 мм дифракційної ґратки.

519. Постійна дифракційної ґратки в $n = 4$ рази більше довжини світлової хвилі монохроматичного світла, нормально падаючого на її поверхню. Визначити кут α між двома першими симетричними дифракційними максимумами.

520. Відстань між штрихами дифракційної ґратки $d = 4$ мкм. На ґрати падає нормально світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,58$ мкм. Максимум якого найбільшого порядку дає ця ґратка?

521. Пластинку кварцу товщиною $d = 2$ мм помістили між паралельними ніколями, в результаті чого площина поляризації монохроматичного світла повернулася на кут $\varphi = 53^{\circ}$. Якої найменшої товщини d_{min} треба взяти пластинку, щоб поле зору поляриметра стало зовсім темним?

522. Паралельний пучок світла переходить з гліцерину в скло так, що пучок, відбитий від межі розподілу цих середовищ, виявляється максимально поляризованим. Визначити кут γ між падаючим та заломлених пучками.

523. Кварцову пластинку помістили між схрещеними ніколями. При якій найменшій товщині d_{min} кварцовою пластини поле зору між ніколями буде максимально просвітлене? Постійна обертаня α кварцу дорівнює 27 град/мм.

524. При проходженні світла через трубку довжиною $l_1 = 20$ см, що містить розчин цукру концентрацією $C_1 = 20\%$, площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi_1 = 13,3^{\circ}$. В іншому розчині цукру, наливо в трубку довжиною $l_2 = 15$ см, площина поляризації повернулася на кут $\varphi_2 = 5,2^{\circ}$. Визначити концентрацію C_2 другого розчину.

525. Пучок світла послідовно проходить через два ніколя, площини пропускання яких утворюють між собою кут $\varphi = 40^{\circ}$. Приймаючи, що коефіцієнт поглинання k кожного ніколя дорівнює $0,15$, знайти, у скільки разів пучок світла, що виходить з другого ніколя, ослаблений у порівнянні з пучком, що падає на перший ніколь.

526. Кут падіння ε променя на поверхню скла дорівнює 60° . При цьому відбитий пучок світла виявився максимально поляризованим. Визначити кут ε_2 заломлення променя.

527. Кут α між площинами пропускання поляроїдів дорівнює 50° . Природне світло, проходячи через таку систему, послаблюється в $n = 8$ рази. Нехтуючи втратою світла при відбиванні, визначити коефіцієнт поглинання k світла в поляроїда.

528. Пучок світла, що йде в скляній посудині з гліцерином, відбивається від дна посудини. При якому куті ε падіння відбитий пучок світла максимально поляризований?

529. Пучок світла переходить з рідини в скло. Кут падіння ε_B пучка дорівнює 60° , кут заломлення $\varepsilon_2 = 50^\circ$. При якому куті падіння ε_B пучок світла, відбитий від межі розподілу цих середовищ, буде максимально поляризований?

530. Пучок світла падає на плоскопаралельну скляну пластину, нижня поверхня якої знаходиться у воді. При якому куті падіння ε_B світло, відбите від межі скло-вода, буде максимально поляризоване?

531. Частка рухається зі швидкістю $v = c/3$, де c – швидкість світлу у вакуумі. Яку частку енергії спокою становить кінетична енергія частинки?

532. Протон з кінетичною енергією $T = 3$ ГеВ при гальмуванні втратив третину цієї енергії. Визначити, у скільки разів змінився релятивістський імпульс α -частинки.

533. Яку прискорюючу різницю потенціалів повинен подолати електрон для того, щоб мати швидкість, яка дорівнює $0,9 c$?

534. Визначити відношення релятивістського імпульсу p -електрона з кінетичною енергією $T = 1,53$ МеВ до комптонівського імпульсу $m_0 c$ електрона.

535. Швидкість електрона $v = 0,8 c$ (де c – швидкість світлу у вакуумі). Знаючи енергію спокою електрона в мегаелектрон-вольтах, визначити в тих же одиницях кінетичну енергію T електрона.

536. Протон має імпульс $p = 469$ МеВ/с. Яку кінетичну енергію необхідно додатково надати протону, щоб його релятивістський імпульс зріс удвічі?

537. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 5 \cdot 10^{-2}$ Тл по колу радіуса $R = 4 \cdot 10^{-2}$ м. Знайти кінетичну енергію електрона.

538. Яку швидкість β (у частках швидкості світла) потрібно повідомити частці, щоб її кінетична енергія дорівнювала подвоєній енергії спокою?

539. Релятивістський електрон мав імпульс $p_1 = mc$. Визначити кінцевий імпульс цього електрона (в одиницях mc), якщо його енергія збільшилася в $n = 2$ рази.

540. Релятивістський протон мав кінетичну енергію, що дорівнює енергії спокою. Визначити, у скільки разів зросте його кінетична енергія, якщо його імпульс збільшиться в $n = 2$ рази.

541. Обчислити справжню температуру T вольфрамової розпеченої стрічки, якщо радіаційний пірометр показує температуру $T_{rad} = 2,5$ кК. Прийняти, що поглинальна здатність для вольфраму не залежить від частоти випромінювання й дорівнює $a_i = 0,35$.

542. Чорне тіло має температуру $T_1 = 500$ К. Яка буде температура T_2 тіла, якщо в результаті нагрівання потік випромінювання збільшиться в $n = 5$ разів?

543. Температура абсолютно чорного тіла $T = 2$ кК. Визначити довжину хвилі λ_m на яку припадає максимум енергії випромінювання, і спектральну щільність енергетичної світності (випроміненості) $(r_{\lambda,T})_{max}$ для цієї довжини хвилі.

544. Визначити температуру T та енергетичну світність (випроміненості) R_e абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 600$ нм.

545. З оглядового віконця печі випромінюється потік $\Phi_e = 4$ кДж/хв. Визначити температуру T печі, якщо площа віконечка $S = 8$ см².

546. Потік випромінювання абсолютно чорного тіла $\Phi_e = 10$ кВт. Максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі $\lambda_m = 0,8$ мкм. Визначити площу S випромінюючої поверхні.

547. Як і в скільки разів зміниться потік випромінювання абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання переміститься з червоного кордону видимого спектру ($\lambda_{m1} = 780$ нм) на фіолетову ($\lambda_{m2} = 390$ нм)?

548. Визначити поглинаючу здатність a_T сірого тіла, для якого температура, виміряна радіаційним пірометром, $T_{rad} = 1,4$ кК, тоді як справжня температура T тіла дорівнює $3,2$ кК.

549. Муфельна піч, яка споживає потужність $P = 1$ кВт, має отвір площею $S = 100$ см². Визначити частку η потужності, що розсіюється стінками печі, якщо температура її внутрішньої поверхні дорівнює 1 кК.

550. Середня енергетична світність R поверхні Землі дорівнює $0,5$ Дж/(см²·хв). Яка повинна бути температура T поверхні Землі, якщо умовно вважати, що вона випромінює як сіре тіло з коефіцієнтом чорноти $a_T = 0,25$?

551 Червона межа фотоефекту для цинку $\lambda_0 = 310$ нм. Визначити максимальну кінетичну енергію T_{max} фотоелектронів в електрон-вольтах, якщо на цинк падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 200$ нм.

552. На поверхню калію падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 150$ нм. Визначити максимальну кінетичну енергію T_{max} фотоелектронів.

553. Фотон з енергією $\varepsilon = 10$ еВ падає на срібну пластину й викликає фотоефект. Визначити імпульс p , отриманий пластиною, якщо прийняти, що напрями руху фотона й фотоелектрон лежать на одній прямій, перпендикулярній поверхні пластин.

554. На фотоелемент з катодом з літію падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 200$ нм. Знайти найменше значення затримуючої різниці потенціалів U_{min} , яку потрібно прикласти до фотоелемента, щоб припинити фотострум.

555. Яка повинна бути довжина хвилі γ – випромінювання, що падає на платинову пластину, щоб максимальна швидкість фотоелектронів була $v_{max} = 3$ Мм/с?

556. На металеву пластину спрямований пучок ультрафіолетового випромінювання ($\lambda = 0,25$ мкм). Фотострум припиняється при мінімальній затримуючій різниці потенціалів $U_{min} = 0,96$ В. Визначити роботу виходу A електронів з металу.

557. На поверхню металу падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,1$ мкм. Червона межа фотоефекту $\lambda_0 = 0,3$ мкм. Яка частка енергії фотона витрачається на повідомлення електрону кінетичної енергії?

558. На метал падає рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 1$ нм. Нехтуючи роботою виходу, визначити максимальну швидкість v_{max} фотоелектронів.

559. На металеву пластину спрямований монохроматичне пучок світла з частотою $\nu = 7,3 \cdot 10^{14}$ Гц. Червона межа λ_0 фотоефекту для даного матеріалу дорівнює 560 нм. Визначити максимальну швидкість v_{max} фотоелектронів.

560. На цинкову пластину спрямований монохроматичне пучок світла. Фотострум припиняється при затримуючій різниці потенціалів $U = 1,5$ В. Визначити довжину хвилі λ світла, що падає на пластину.

561. Фотон при ефекті Комптона на вільному електроні був розсіяний на кут $\vartheta = \pi/2$. Визначити імпульс p (в МеВ/с), придбаний електроном, якщо енергія фотона до розсіювання була $\varepsilon_1 = 1,02$ МеВ.

562. Рентгенівське випромінювання ($\lambda = 1$ нм) розсіюється електронами, яке можна вважати практично вільними. Визначити максимальну довжину хвилі λ_{max} рентгенівського випромінювання в розсіяному пучку.

563. Яка частка енергії фотона припадає при ефекті Комптона на електрон віддачі, якщо розсіювання фотона відбувається на кут $\vartheta = \pi/2$? Енергія фотона до розсіювання $\varepsilon_1 = 0,51$ МеВ.

564. Визначити максимальну зміну довжини хвилі $(\Delta\lambda)_{\max}$ при комптонівському розсіянні світла на вільних електронах і вільних протонах.

565. Фотон з довжиною хвилі $\lambda_1 = 15$ пм розсіявся на вільному електроні. Довжина хвилі розсіяного фотона $\lambda_2 = 16$ пм. Визначити кут ϑ розсіювання.

566. Фотон з енергією $\varepsilon_1 = 0,51$ МеВ був розсіяний при ефекті Комптона на вільному електроні на кут $\vartheta = 180^\circ$. Визначити кінетичну енергію T електрона віддачі.

567. У результаті ефекту Комптона фотон з енергією $\varepsilon_1 = 1,02$ МеВ був розсіяний на вільних електронах на кут $\vartheta = 150^\circ$. Визначити енергію ε_2 розсіяного фотона.

568. Визначити кут ϑ , на який був розсіяний квант з енергією $\varepsilon_1 = 1,53$ МеВ при ефекті Комптона, якщо кінетична енергія електрона віддачі $T = 0,51$ МеВ.

569. Фотон з енергією $\varepsilon_1 = 0,51$ МеВ при розсіюванні на вільному електроні втратив половину своєї енергії. Визначити кут розсіювання ϑ .

570. Визначити імпульс p_e електрона віддачі, якщо фотон з енергією $\varepsilon_1 = 1,53$ МеВ в результаті розсіювання на вільному електроні втратив $1/3$ своєї енергії.

571. Визначити енергетичну освітленість (опромінюваність) E_e дзеркальної поверхні, якщо тиск p , який вироблений випромінюванням, дорівнює 40 мкПа. Випромінювання падає нормально до поверхні.

572. Тиск p світла з довжиною хвилі $\lambda = 40$ нм, яке падає нормально на чорну поверхню, дорівнює 2 нПа. Визначити число N фотонів, що падають за час $t = 10$ с на площу $S = 1$ мм² цієї поверхні.

573. Визначити коефіцієнт відображення ρ поверхні, якщо при енергетичній освітленості $E_e = 120$ Вт/м² тиск p світла на неї виявилось рівним $0,5$ мкПа.

574. Тиск світла, яке виробляється на дзеркальну поверхню $p = 5$ мПа. Визначити концентрацію n_0 фотонів поблизу поверхні, якщо довжина хвилі світла, що падає на поверхню, $\lambda = 0,5$ мкм.

575. На відстані $r = 5$ м від точкового монохроматичного ($\lambda = 0,5$ мкм) ізотропного джерела розташований майданчик ($S = 8$ мм²) перпендикулярно падаючим пучкам. Визначити число N фотонів, які щомиті падають на майданчик. Потужність випромінювання $P = 100$ Вт.

576. На дзеркальну поверхню під кутом $\alpha = 60^\circ$ до нормалі падає пучок монохроматичного світла ($\lambda = 590$ нм). Щільність потоку енергії світлового пучка $\varphi = 1$ кВт/м². Визначити тиск p , який світло справляє на дзеркальну поверхню.

577. Світло падає нормально на дзеркальну поверхню, що знаходиться на відстані $r = 10$ см від точкового ізотропного випромінювача. За якої потужності P випромінювача тиск p на дзеркальну поверхню буде рівним 1 мПа?

578. Світло з довжиною хвилі $\lambda = 600$ нм нормально падає на дзеркальну поверхню й справляє на неї тиск $p = 4$ мкПа. Визначити число N фотонів, що падають за час $t = 10$ с на площу $S = 1$ мм² цієї поверхні.

579. На дзеркальну поверхню площею $S = 6$ см² падає нормально потік випромінювання $\Phi_e = 0,8$ Вт. Визначити тиск p і силу тиску F світла на цю поверхню.

580. Точкове джерело монохроматичного ($\lambda = 1$ нм) випромінювання знаходиться в центрі сферичної зачерненої колби радіусом $R = 10$ см. Визначити світловий тиск p , що вироблений на внутрішню поверхню колби, якщо потужність джерела $P = 1$ кВт.

6 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ ТА КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ. ФІЗИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

6.1 Основні формули

Борівська теорія воднеподібного атома. Момент імпульсу електрона (другий постулат Бора):

$$L_n = \hbar n \quad \text{або} \quad m v_n r_n = \hbar n, \quad (6.1)$$

де m – маса електрона;

v_n – швидкість електрона на n -й орбіті;

r_n – радіус n -й стаціонарної орбіти;

\hbar – постійна Планка;

n – головне квантове число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Радіус n -ї стаціонарної орбіти:

$$r_n = a_0 n^2, \quad (6.2)$$

де a_0 – перший борівський радіус.

Енергія електрона в атомі водню:

$$E_n = E_i / n^2, \quad (6.3)$$

де E_i – енергія іонізації атома водню.

Енергія, яку випромінює або поглинається атомом водню:

$$\varepsilon = \hbar \omega = E_{n_2} - E_{n_1} \quad (6.4)$$

або

$$\varepsilon = E_i (1/n_1^2 - 1/n_2^2), \quad (6.5)$$

де n_1 і n_2 – квантові числа, що відповідають енергетичним рівням, між якими відбувається перехід електрона в атомі.

Спектроскопічне хвильове число:

$$\tilde{\nu} = 1/\lambda = R(1/n_1^2 - 1/n_2^2), \quad (6.6)$$

де λ – довжина хвилі випромінювання або поглинання атомом;

R – постійна Рідберга.

Хвильові властивості частинок. Довжина хвилі де Бройля:

$$\lambda = 2\pi\hbar / p = h/p, \quad (6.7)$$

де p – імпульс частинки;

h – постійна Планка.

Імпульс частинки та його зв'язок з кінетичною енергією T :

а) нерелятивістська частинка:

$$p = mv; \quad p = \sqrt{2mT}; \quad (6.8)$$

б) релятивістська:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + T)T}, \quad (6.9)$$

де m – маса частинки;

v – швидкість частинки;

c – швидкість світла у вакуумі;

E_0 – енергія спокою частинки ($E_0 = mc^2$).

Співвідношення невизначеностей:

а) для координати та імпульсу:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar, \quad (6.10)$$

де Δp_x – невизначеність проекції імпульсу на вісь X ;

Δx – невизначеність координати;

б) для енергії й часу:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar, \quad (6.11)$$

де ΔE – невизначеність енергії;

Δt – час життя квантової системи в даному енергетичному стані.

Одномірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(x) = 0, \quad (6.12)$$

де $\psi(x)$ – хвильова функція, що описує стан частки;

m – маса частинки;

E – повна енергія;

$U = U(x)$ – потенційна енергія частки.

Щільність імовірності:

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = |\psi(x)|^2, \quad (6.13)$$

де $d\omega(x)$ – ймовірність того, що частка може бути виявлена поблизу точки з координатою x на ділянці dx .

Ймовірність виявлення частки в інтервалі від x_1 до x_2 :

$$\omega = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx. \quad (6.14)$$

Рішення рівняння Шредінгера для одновимірної, нескінченно глибокої, прямокутної потенційної скриньки:

а) власна нормована хвильова функція:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x; \quad (6.15)$$

б) власне значення енергії:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}, \quad (6.16)$$

де n – квантове число ($n = 1, 2, 3, \dots$);

l – ширина скриньки.

В області $0 \leq x \leq l$ $U = \infty$ та $\psi(x) = 0$.

Атомне ядро. Радіоактивність. Масове число ядра (число нуклонів у ядрі):

$$A = Z + N, \quad (6.17)$$

де Z – число заряду (число протонів);

N – число нейтронів.

Закон радіоактивного розпаду:

$$dN = -\lambda N dt \quad \text{або} \quad N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.18)$$

де dN – число ядер, що розпадаються за інтервал часу dt ;

N – число ядер, які не розпалися на момент часу t ;

N_0 – число ядер у початковий момент ($t = 0$);

λ – постійна радіоактивного розпаду.

Число ядер, що розпалися за час t :

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (6.19)$$

У разі, якщо інтервал часу Δt , за який визначається число ядер, що розпалися, багато менше періоду напіврозпаду $T_{1/2}$, то число ядер, які розпалися, можна визначити за формулою:

$$\Delta N = \lambda N \Delta t. \quad (6.20)$$

Залежність періоду напіврозпаду від постійної радіоактивного розпаду:

$$T_{1/2} = (\ln 2) / \lambda = 0,693 / \lambda. \quad (6.21)$$

Середній час τ життя радіоактивного ядра, тобто інтервал часу, за який число ядер, що не розпалися, зменшується в e раз:

$$\tau = 1 / \lambda. \quad (6.22)$$

Число N атомів, що містяться в радіоактивному ізотопі:

$$N = m N_A / M, \quad (6.23)$$

де m – маса ізотопу;

M – молярна маса;

N_A – постійна Авогадро.

Активність A радіоактивного ізотопу:

$$A = - dN / dt = \lambda N \quad \text{або} \quad A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.24)$$

де dN – число ядер, що розпадаються за інтервал часу dt ;

A_0 – активність ізотопу в початковий момент часу.

Питома активність ізотопу:

$$a = A / m. \quad (6.25)$$

Дефект маси ядра:

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_{\text{я}}, \quad (6.26)$$

де Z – число заряду (число протонів в ядрі);

A – масове число (число нуклонів у ядрі);

$(A - Z)$ – число нейтронів у ядрі;

m_p – маса протона;

m_n – маса нейтрона;

m_y – маса ядра.

Енергія зв'язку ядра:

$$E_{зв} = \Delta m c^2, \quad (6.27)$$

де Δm – дефект маси ядра;

c – швидкість світла у вакуумі.

Під позасистемними одиницями енергія зв'язку ядра дорівнює $E_{зв} = 931\Delta m$, де дефект маси Δm – в а.о.м.; 931 – коефіцієнт пропорційності (1 а.о.м. ~ 931 МеВ).

Теплоємність кристала. Середня енергія квантового одновимірного осцилятора:

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0 + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}, \quad (6.28)$$

де ε_0 – нульова енергія ($\varepsilon_0 = 1/2 \hbar\omega$);

\hbar – постійна Планка;

ω – кругова частота коливань осцилятора;

k – постійна Больцмана;

T – термодинамічна температура.

Молярна внутрішня енергія системи, що складається з не взаємодіючих квантових осциляторів:

$$U_m = U_{0m} + 3R\Theta_E / (e^{\Theta_E/T} - 1), \quad (6.29)$$

де R – молярна газова постійна;

$\Theta_E = \hbar\omega / k$ – характеристична температура Ейнштейна;

$U_{0m} = 2/3 R\Theta_E$ – молярна нульова енергія (по Ейнштейну).

Молярна теплоємність кристалічного твердого тіла в області низьких температур (граничний закон Дебая):

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 = 234R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \quad (T \ll \Theta_D). \quad (6.30)$$

Теплота, необхідна для нагрівання тіла:

$$Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT, \quad (6.31)$$

де m – маса тіла;

M – молярна маса;

T_1 та T_2 – початкова та кінцева температури тіла.

Елементи квантової статистики. Розподіл вільних електронів у металі по енергіях при 0 К:

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon, \quad (6.32)$$

де $dn(\varepsilon)$ – концентрація електронів, енергія яких укладена в межах від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$;

m – маса електрона.

Це вираз справедливий при $\varepsilon < \varepsilon_F$ (де ε_F – енергія або рівень Фермі).

Енергія Фермі в металі при $T = 0$ К:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (6.33)$$

де n – концентрація електронів в металі.

Напівпровідники. Питома провідність власних напівпровідників:

$$\gamma = \gamma_0 \exp(-\Delta E / 2kT), \quad (6.34)$$

де ΔE – ширина забороненої зони;

γ_0 – константа.

Сила струму в $p-n$ – переході:

$$I = I_0 [\exp(eU / kT) - 1], \quad (6.35)$$

де I_0 – граничне значення сили зворотного струму;

U – зовнішня напруга, прикладена до $p-n$ – переходу.

Контактні й термоелектричні явища. Внутрішня контактна різниця потенціалів:

$$U_{12} = \frac{\varepsilon_{F1} - \varepsilon_{F2}}{e}, \quad (6.36)$$

де ε_{F1} і ε_{F2} – енергія Фермі відповідно для першого й другого металів;

e – заряд електрона.

6.2 Методичні вказівки до розділу «Елементи атомної фізики та квантової механіки. Фізика твердого тіла»

У завданнях на боровську теорію водневоподібних атомів крім постулатів Бора, доцільно використовувати й рівняння руху електрона в атомі.

Завдання на застосування формули де Бройля вимагають попереднього аналізу рішення: для нерелятивістської частинки потрібно користуватися формулою (6.8) для імпульсу, а для релятивістської – формулою (6.9). Зауважимо, що у всіх випадках руху електрона в атомі релятивістськими ефектами можна знехтувати.

Застосовуючи співвідношення невизначеностей (6.10), необхідно мати на увазі наступне:

а) якщо дано лінійні розміри області l , в якій знаходиться частинка, то вважають $\Delta x \approx l$; якщо відомий модуль імпульсу p , але невідомо його напрям, то вважають $\Delta p \approx p$;

б) величина, яку шукаємо, не може бути менше найменшої невизначеності в її вимірі, тобто в якості мінімального значення шуканої величини розглядають мінімальну невизначеність цієї величини: $l_{min} \approx (\Delta x)_{min}$, $p_{min} = (\Delta p)_{min}$.

При вирішенні завдань на явище радіоактивності необхідно розуміти, що число ядер, які не розпалися до моменту часу t , визначається формулою (6.18), а число ядер, що розпалися за цей час – формулою (6.19).

Рішення задач на ядерні реакції ґрунтується на застосування законів збереження: 1) електричного заряду; 2) сумарного числа нуклонів, 3) енергії; 4) імпульсу. У цьому випадку необхідно мати на увазі, що під енергією розуміється повна релятивістська енергія. Для однієї частки ця енергія дорівнює сумі енергій спокою E_0 частинки та її кінетичної енергії T .

6.3 Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Електрон в атомі водню перейшов з четвертого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію фотона, що спущений.

Розв'язок. Для визначення енергії фотона скористаємося серіальною формулою для воднеподібних іонів:

$$1/\lambda = RZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2), \quad (1)$$

де λ – довжина хвилі фотона;
 R – постійна Ридберга;

Z – заряд ядра у відносних одиницях (при $Z = 1$ формула переходить в серіальну формулу для водню);

n_1 – номер орбіти, на яку перейшов електрон;

n_2 – номер орбіти, з якої перейшов електрон (n_1 і n_2 – головні квантові числа).

Енергію фотона ε можна виразити формулою:

$$\varepsilon = hc / \lambda .$$

Тому, помноживши обидві частини рівності (1) на hc , отримаємо вираз для енергії фотона:

$$\varepsilon = RhcZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Оскільки Rhc є енергія іонізації E_i атома водню, то:

$$\varepsilon = E_i Z^2 (1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Обчислення виконаємо в позасистемних одиницях: $E_i = 13,6$ еВ (див. табл. 1 додатка); $Z = 1$; $n_1 = 2$; $n_2 = 4$:

$$\varepsilon = 13,6 \cdot 1^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \text{ еВ} = 13,6 \cdot 3/16 \text{ еВ} = 2,55 \text{ еВ}.$$

Приклад 2. Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорюючу різницю потенціалів U . Знайти довжину хвилі де Бройля електрона для двох випадків: 1) $U_1 = 51$ В; 2) $U_2 = 510$ кВ.

Розв'язок. Довжина хвилі де Бройля для частинки залежить від її імпульсу p і визначається за формулою:

$$\lambda = h / p, \tag{1}$$

де h – постійна Планка.

Імпульс частинки можна визначити, якщо відома її кінетична енергія T . Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією різна для нерелятивістського випадку (коли кінетична енергія частинки багато менше її енергії спокою) та для релятивістського випадку (коли кінетична енергія порівняна з енергією спокою частки).

У нерелятивістському випадку:

$$p = \sqrt{2mT}, \tag{2}$$

де m – маса частинки.

У релятивістському випадку:

$$p = \sqrt{(2E_0 + T)T} / c, \quad (3)$$

де $E_0 = mc^2$ – енергія спокою частинки.

Формулу (1) з урахуванням співвідношень (2) та (3) запишемо:

– у нерелятивістському випадку:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}; \quad (4)$$

– у релятивістському випадку:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + T)T}}. \quad (5)$$

Порівняємо кінетичні енергії електрона, що пройшов задані в умові завдання різниці потенціалів $U_1 = 51$ В; $U_2 = 510$ кВ, з енергією спокою електрона й залежно від цього вирішимо, яку з формул (4) або (5) слід застосувати для обчислення довжини хвилі де Бройля.

Як відомо, кінетична енергія електрона, що пройшла, прискорює різницю потенціалів U :

$$T = eU.$$

У першому випадку $T_1 = eU = 51$ еВ $= 0,51 \cdot 10^{-4}$ МеВ, що багато менше енергії спокою електрона $E_0 = mc^2 = 0,51$ МеВ. Отже, в цьому випадку можна застосувати формулу (4). Для спрощення розрахунків зауважимо, що $T_1 = 10^{-4} mc^2$. Підставивши цей вираз у формулу (4), перепишемо її у вигляді:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot 10^{-4} \cdot mc^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{h}{mc}.$$

Враховуючи, що h/mc є комптонівська довжина хвилі Λ , отримаємо:

$$\lambda_1 = 10^2 \Lambda / \sqrt{2}.$$

Оскільки $\Lambda = 2,43$ пм (див. табл. 1 додатка), то:

$$\lambda_1 = 10^2 \cdot 2,43 / \sqrt{2} \text{ пм} = 171 \text{ пм.}$$

У другому випадку кінетична енергія $T_2 = eU_2 = 510 \text{ кеВ} = 0,51 \text{ МеВ}$, тобто дорівнює енергії спокою електрона. У цьому випадку необхідно застосувати релятивістську формулу (5). Враховуючи, що $T_2 = 0,51 \text{ МеВ} = mc^2$, по формулі (5) знаходимо:

$$\lambda_2 \frac{h}{\sqrt{(2mc^2 + mc^2)mc^2 / c}} = \frac{h}{\sqrt{3}mc}$$

або

$$\lambda_2 = \Lambda / \sqrt{3}.$$

Підставимо значення Λ і зробимо обчислення:

$$\lambda_2 = 2,43 / \sqrt{3} \text{ пм} = 1,40 \text{ пм.}$$

Приклад 3. Кінетична енергія електрона в атомі водню складає величину порядку $T = 10 \text{ еВ}$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

Розв'язок. Співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу має вигляд:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad (1)$$

де Δx – невизначеність координати частинки (в даному випадку електрона);

Δp_x – невизначеність імпульсу частинки (електрона);

\hbar – постійна Планка.

Зі співвідношення невизначеностей випливає, що чим точніше визначається положення частинки в просторі, тим більш невизначеним стає імпульс, а отже, і енергія частинки. Нехай атом має лінійні розміри l , тоді електрон атома буде знаходитися десь в межах області з невизначеністю:

$$\Delta x = l / 2.$$

Співвідношення невизначеностей (1) можна записати в цьому випадку у вигляді:

$$(l / 2) \Delta p_x \geq \hbar,$$

звідки

$$l \geq 2\hbar / \Delta p_x. \quad (2)$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x в усякому разі не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x , тобто $\Delta p_x \leq p_x$. Імпульс p_x пов'язаний з кінетичною енергією T співвідношенням $p_x = \sqrt{2mT}$. Змінимо Δp_x значенням $\sqrt{2mT}$ (така заміна не збільшить l).

Переходячи від нерівності до рівності, отримаємо:

$$l_{min} = 2\hbar / \sqrt{2mT}. \quad (3)$$

Перевіримо, чи дає отримана формула одиницю довжини. Для цього в праву частину формули (3) замість символів величин підставимо позначення їх одиниць:

$$\begin{aligned} \frac{[h]}{([m][T])^{1/2}} &= \frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{(1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж})^{1/2}} = \left(\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}}\right)^{1/2} \cdot 1 \text{ с} = \\ &= \left(\frac{1 \text{ кг} \times \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}}\right)^{1/2} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

Знайдена одиниця є одиницею довжини.

Зробимо обчислення:

$$l_{min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10} \text{ м} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 124 \text{ нм}.$$

Приклад 4. Хвильова функція $\psi(x) = \sqrt{2/l} \sin \frac{\pi}{l} x$ описує основний стан частинки в нескінченно глибокому прямокутному ящику шириною l . Обчислити ймовірність знаходження частинки в малому інтервалі $\Delta l = 0,01l$ у двох випадках: 1) (поблизу стінки) ($0 \leq x \leq \Delta l$); 2) в середній частині ящика $\left(\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}\right)$ (рис. 58).

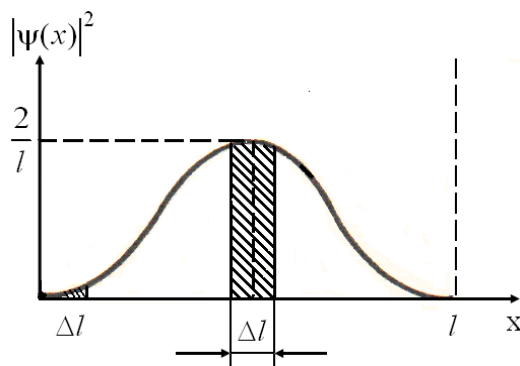


Рисунок 58 – Графік щільності ймовірності для частинки

Розв'язок. Імовірність того, що частка буде виявлена в інтервалі dx (від x до $x + dx$), пропорційна цьому інтервалу й квадрату модуля хвильової функції, яка описує даний стан, дорівнює:

$$d\omega = |\psi(x)|^2 dx.$$

У першому випадку шукана ймовірність знайдеться інтегруванням в межах від 0 до $0,01l$:

$$\omega = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx.$$

Знак модуля опущений, так як ψ – функція в даному разі не є комплексною.

Так як x змінюється в інтервалі $0 \leq x \leq 0,01l$ і, отже, $\pi x / l \ll 1$ справедливо наближена рівність:

$$\sin^2 \frac{\pi}{l} x \approx \left(\frac{\pi}{l} x \right)^2.$$

З урахуванням цього виразу (1) набуде вигляду:

$$\omega = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \left(\frac{\pi}{l} x \right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3} \int_0^{0,01l} x^2 dx.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\omega = \frac{2}{3} \pi^2 \cdot 10^{-6} = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

У другому випадку можна обійтися без інтегрування, так як квадрат модуля хвильової функції поблизу її максимуму в заданому малому інтервалі ($\Delta l = 0,01l$) практично не змінюється. Ймовірність, яку шукаємо у другому випадку визначається виразом:

$$\omega = |\psi(l/2)|^2 \Delta l$$

або

$$\omega = \frac{2}{l} \left(\sin \frac{\pi l}{2} \right)^2 \Delta l = \frac{2}{l} \cdot 0,01l = 0,02.$$

Приклад 5. Обчислити дефект маси й енергію зв'язку ядра ${}^7_3\text{Li}$.

Розв'язок. Маса ядра завжди менша ніж сума мас вільних (що знаходяться поза ядром) протонів і нейтронів, з яких ядро утворилося. Дефект маси ядра Δm і є різниця між сумою мас вільних нуклонів (протонів і нейтронів) і масою ядра, тобто:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}, \quad (1)$$

де Z – атомний номер (число протонів в ядрі);

A – масове число (число нуклонів, що складають ядро);

$m_p, m_n, m_{\text{я}}$ – відповідно маси протона, нейтрона й ядра.

У довідкових таблицях завжди даються маси нейтральних атомів, але не ядер, тому формулу (1) доцільно перетворити так, щоб у неї входила маса $m_{\text{я}}$ нейтрального атома. Можна вважати, що маса нейтрального атома дорівнює сумі мас ядра й електронів, складових електронну оболонку атома: $m_a = m_{\text{я}} + Zm_e$, звідки:

$$m_{\text{я}} = m_a - Zm_e. \quad (2)$$

Виразивши в рівності (1) масу ядра за формулою (2), отримуємо:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a + Zm_e,$$

або

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_a.$$

Помічаючи, що:

$$m_p + m_e = m_H,$$

де m_H – маса атома водню, остаточно знаходимо:

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a. \quad (3)$$

Підставивши у вираз (3) числові значення мас (див. табл. 15 і 17 додатка), отримаємо:

$$\Delta m = [3 \cdot 1,00783 + (7 - 3) \cdot 1,00867 - 7 \cdot 0,1601] \text{ а.о.м.} = 0,04216 \text{ а.о.м.}$$

Відповідно до закону пропорційності маси й енергії:

$$E = c^2 \Delta m, \quad (4)$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

Коефіцієнт пропорційності c^2 може бути виражений дwoяко:

$$c^2 = 9 \cdot 10^{16} \quad \text{або} \quad c^2 = \Delta E / \Delta m = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг}.$$

Якщо обчислити енергію зв'язку, користуючись позасистемними одиницями, то $c^2 = 931 \text{ МеВ/а.о.м.}$ З урахуванням цього формула (4) набуде вигляду:

$$E = 931 \Delta m \text{ (МеВ)}. \quad (5)$$

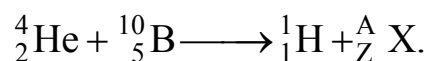
Підставивши знайдене значення дефекту маси ядра в формулу (5), отримаємо:

$$E = 931 \cdot 0,04216 \text{ МеВ} = 39,2 \text{ МеВ}.$$

Примітка. Термін «дефект маси» часто застосовують в іншому сенсі: дефектом маси Δ називають різницю між масою нейтрального атома даного ізотопу та його масовим числом A : $\Delta = m_a - A$. Ця величина особливого фізичного сенсу не має, але її використання дозволяє в ряді випадків значно спростити обчислення. У цьому посібнику всюди мається на увазі дефект маси Δm , визначається за формулою (1).

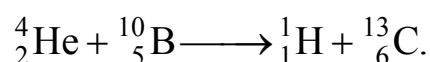
Приклад 6. При зіткненні α -частинки з ядром бору ${}^{10}_5\text{B}$ сталася ядерна реакція, в результаті якої утворилося два нових ядра. Одним з цих ядер було ядро атома водню ${}^1_1\text{H}$. Визначити порядковий номер і масове число другого ядра, дати символічну запис ядерної реакції й визначити її енергетичний ефект.

Розв'язок. Означимо невідоме ядро символом ${}^A_Z\text{X}$. Так як α -частка являє собою ядро гелію ${}^4_2\text{He}$, запис реакції має вигляд:



Застосувавши закон збереження числа нуклонів, отримаємо рівняння $4 + 10 = 1 + A$, звідки $A = 13$. Застосувавши закон збереження заряду, отримаємо рівняння $2 + 5 = 1 + Z$, звідки $Z = 6$. Отже, невідоме ядро є ядром атома ізотопу вуглецю ${}^{13}_6\text{C}$.

Тепер можемо записати реакцію в остаточному вигляді:



Енергетичний ефект Q ядерної реакції визначається за формулою:

$$Q = 931[(m_{He} + m_B) - (m_H + m_C)].$$

Тут, у перших круглих дужках вказані маси вихідних ядер, у других дужках – маси ядер – продуктів реакції. При числових підрахунках по цій формулі маси ядер замінюють масами нейтральних атомів. Можливість такої заміни впливає з таких міркувань.

Число електронів в електронній оболонці нейтрального атома дорівнює його зарядовому числу Z . Сума зарядових чисел вихідних ядер дорівнює сумі зарядових чисел ядер – продуктів реакції. Отже, електронні оболонки ядер гелію й бору містять разом стільки ж електронів, скільки їх містять електронні оболонки ядер вуглецю й водню.

Очевидно, що при вирахуванні суми мас нейтральних атомів вуглецю та водню з суми мас атомів гелію й бору, маси електронів випадуть і ми отримаємо той же результат, як якщо б брали маси ядер. Підставивши маси атомів (див. табл. 15 додатка) у розрахункову формулу, отримаємо:

$$Q = 931(4,00260 + 10,01294) - (1,00783 + 13,00335) \text{ MeV} = 4,06 \text{ MeV}.$$

Приклад 7. Визначити початкову активність A_0 радіоактивного препарату магнію ^{27}Mg масою $m = 0,2$ мкг, а також його активність A через час $t = 6$ год. Період напіврозпаду $T_{1/2}$ магнію вважати відомим.

Розв'язок. Активність A ізотопу характеризує швидкість радіоактивного розпаду й визначається відношенням числа dN ядер, що розпалися за інтервал часу dt , до цього інтервалу:

$$A = -dN / dt. \quad (1)$$

Знак « $-$ » показує, що число N радіоактивних ядер із часом зменшується. Для того, щоб знайти dN / dt , скористаємося законом радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

де N – число радіоактивних ядер, що містяться в ізотопі, в момент часу t ;

N_0 – число радіоактивних ядер в момент часу, прийнятий за початковий ($t = 0$);

λ – постійна радіоактивного розпаду.

Продиференціюємо вираз (2) за часом:

$$dN / dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Виключивши з формул (1) та (3) dN/dt , знаходимо активність препарату в момент часу t :

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

Початкову активність A_0 препарату отримаємо при $t = 0$:

$$A_0 = \lambda N_0. \quad (5)$$

Постійна радіоактивного розпаду λ пов'язана з періодом напіврозпаду $T_{1/2}$ співвідношенням:

$$\lambda = (\ln 2) / T_{1/2}. \quad (6)$$

Число N_0 радіоактивних ядер, що містяться в ізотопі, дорівнює добутку постійної Авогадро N_A на кількість речовини ν даного ізотопу:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \quad (7)$$

де m – маса ізотопу;

M – молярна маса.

З урахуванням виразів (6) і (7) формули (5) і (4) приймають вигляд:

$$A_0 = \frac{m \ln 2}{M T_{1/2}} N_A; \quad (8)$$

$$A = \frac{m \ln 2}{M T_{1/2}} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}. \quad (9)$$

Зробимо обчислення, враховуючи, що $T_{1/2} = 10$ хв = 600 с (див. табл. 16 додатка); $\ln 2 = 0,693$; $t = 6$ год = $6 \cdot 3,6 \cdot 10^3$ с = $2,16 \cdot 10^4$ с:

$$A_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} \text{ Бк} = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк} = 5,13 \text{ ТБк};$$

$$A = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} e^{-\frac{0,693}{600} \cdot 2,16 \cdot 10^4} \text{ Бк} = 81,3 \text{ Бк}.$$

Приклад 8. Використовуючи квантову теорію теплоємності Ейнштейна, обчислити питому теплоємність с при постійному об'ємі алюмінію.

нію при температурі $T = 200$ К. Характеристичну температуру Θ_E Ейнштейна прийняти для алюмінію рівною 300 К.

Розв'язок. Питома теплоємність c речовини може бути виражена через молярну теплоємність C_m співвідношенням:

$$c = C_m / M, \quad (1)$$

де M – молярна маса.

Молярна теплоємність при постійному об'ємі з теорії Ейнштейна виражається формулою:

$$C_m = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T} - 1)^2}. \quad (2)$$

Підставивши в (1) вираз теплоємності C_m за формулою (2), отримаємо:

$$c = \frac{3R}{M} \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T} - 1)^2}. \quad (3)$$

Зробимо обчислення:

$$c = \frac{3 \cdot 8,31}{27 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{300}{200} \right)^2 \frac{e^{300/200}}{(e^{300/200} - 1)^2} \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 770 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Приклад 9. Визначити теплоту ΔQ , необхідну для нагрівання кристала NaCl масою $m = 20$ г від температури $T_1 = 2$ К до температури $T_2 = 4$ К. Характеристичну температуру Дебая Θ_D для NaCl прийняти рівною 320 К та умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.

Розв'язок. Теплота ΔQ , що підводиться для нагрівання тіла від температури T_1 до T_2 , може бути обчислена за формулою:

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C_T dT, \quad (1)$$

де C_T – теплоємність тіла.

Теплоємність тіла пов'язана з молярною теплоємністю співвідношенням:

$$C_T = mC_m / M, \quad (2)$$

де m – маса тіла;

M – молярна маса.

Підставивши вираз C_T у формулу (1), отримаємо:

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT. \quad (3)$$

У загальному випадку теплоємність C_m є складна функція температури, тому виносити її за знак інтегралу не можна. Однак, якщо виконана умова $T \ll \Theta_D$, то знаходження ΔQ полегшується тим, що можна скористатися граничним законом Дебая, згідно з яким теплоємність пропорційна кубу термодинамічної температури:

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \quad (4)$$

Підставляючи молярну теплоємність (4) в формулу (3), отримаємо:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT.$$

Зробимо інтегрування:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left(\frac{T_2^4}{4} - \frac{T_1^4}{4} \right).$$

Переписавши отриману формулу у вигляді:

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} (T_2^4 - T_1^4),$$

зробимо обчислення:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{3 \cdot (3,14)^4}{5} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{58,5 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31}{(320)^2} (4^4 - 2^4) \text{ Дж} = \\ &= 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,22 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

Приклад 10. Обчислити максимальну енергію ε_F (енергію Фермі), яку можуть мати вільні електрони в металі (мідь) при температурі

$T = 0$ К. Прийняти, що на кожен атом міді припадає по одному валентному електрону.

Розв'язок. Максимальна енергія ε_F , яку можуть мати електрони в металі при $T = 0$ К, пов'язана з концентрацією вільних електронів співвідношенням:

$$\varepsilon_F = \hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} / (2m), \quad (1)$$

де \hbar – постійна Планка;

m – маса електрона.

Концентрація вільних електронів за умовою задачі дорівнює концентрації атомів, яка може бути знайдена за формулою:

$$n = \rho N_A / M, \quad (2)$$

де ρ – щільність міді;

N_A – постійна Авогадро;

M – молярна маса.

Підставляючи вираз n у формулу (1), отримаємо:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \rho \frac{N_A}{M} \right)^{2/3}.$$

Зробимо обчислення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_F &= \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \left[3 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,9 \cdot 10^3 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} \right]^{2/3} \text{ Дж} = \\ &= 1,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7,4 \text{ еВ}. \end{aligned}$$

Приклад 11. Кремнієвий зразок нагрівають від температури $t_1 = 0^0$ С до температури $t_2 = 10^0$ С. У скільки разів зростає його питома провідність?

Розв'язок. Питома провідність γ власних напівпровідників пов'язана з температурою T співвідношенням:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E / (2kT)},$$

де γ_0 – константа;

ΔE – ширина забороненої зони.

Отже:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{e^{-\Delta E/(2kT_2)}}{e^{-\Delta E/(2kT_1)}} = \exp \left[\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right].$$

Вважаючи для кремнію $\Delta E = 1,1$ еВ, зробимо обчислення:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \exp \frac{1,76 \cdot 10^{-19}}{2(1,38 \cdot 10^{-23})} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{283} \right) = 2,28.$$

6.4 Контрольна робота № 6

Таблиця варіантів

Варіант	Номери задач							
0	601	611	621	631	641	651	661	671
1	602	612	622	632	642	652	662	672
2	603	613	623	633	643	653	663	673
3	604	614	624	634	644	654	664	674
4	605	615	625	635	645	655	665	675
5	606	616	626	636	646	656	666	676
6	607	617	627	637	647	657	667	677
7	608	618	628	638	648	658	668	678
8	609	619	629	639	649	659	669	679
9	610	620	630	640	650	660	670	680

601. Незбуджений атом водню поглинає квант випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 102,6$ нм. Обчислити, користуючись теорією Бора, радіус r електронної орбіти збудженого атома водню.

602. Обчислити з теорії Бора радіус r_2 другої стаціонарної орбіти й швидкість v_2 електрона на цій орбіті для атома водню.

603. Обчислити з теорії Бора період T обертання електрона в атомі водню, що знаходиться у збудженому стані, обумовленому головним квантовим числом $n = 2$.

604. Визначити зміну енергії ΔE електрона в атомі водню при випромінюванні атомом фотона з частотою $\nu = 6,28 \cdot 10^{14}$ Гц.

605. У скільки разів зміниться період T обертання електрона в атомі водню, якщо при переході в не збуджений стан атом випроменив фотон із довжиною хвилі $\lambda = 97,5$ нм?

606. На скільки змінилася кінетична енергія електрона в атомі водню при випромінюванні атомом фотона з довжиною хвилі $\lambda = 435$ нм?

607. У яких межах $\Delta\lambda$ повинна лежати довжина хвиль монохроматичного світла, щоб при збудженні атомів водню квантами цього світла радіус r_n орбіти електрона збільшився в 16 разів?

608. В однозарядному іоні літію електрон перейшов з четвертого енергетичного рівня на другий. Визначити довжину хвилі λ випромінювання, випущеного іоном літію.

609. Електрон в атомі водню знаходиться на третьому енергетичному рівні. Визначити кінетичну T , потенціальну Π та повну E енергію електрона. Відповідь виразити в електрон-вольтах.

610. Фотон вибиває з атома водню, що знаходиться в основному стані, електрон з кінетичною енергією $T = 10$ еВ. Визначити енергію ε фотона.

611. Обчислити найбільш імовірну дебройлевську довжину хвилі λ молекул азоту, що містяться в повітрі при кімнатній температурі.

612. Визначити енергію ΔT , яку необхідно додатково надати електрону, щоб його дебройлевська довжина хвилі зменшилася від $\lambda_1 = 0,2$ мм до $\lambda_2 = 0,1$ нм.

613. На скільки по відношенню до кімнатної повинна змінитися температура ідеального газу, щоб дебройлевська довжина хвилі λ його молекул зменшилася на 20 %?

614. Паралельний пучок моноенергетичних електронів падає нормально на діафрагму у вигляді вузької прямокутної щілини, ширина якої $a = 0,06$ мм. Визначити швидкість цих електронів, якщо відомо, що на екрані, віддаленому від щілини на відстані $l = 40$ мм, ширина центрального дифракційного максимуму $b = 10$ мкм.

615. При яких значеннях кінетичної енергії T електрона помилка у визначенні дебройлевської довжини хвилі λ за нерелятивістською формулою не перевищує 10 %?

616. З катодної трубки на діафрагму з вузькою прямокутною щелиною нормально до площини діафрагми спрямований потік моноенергетичних електронів. Визначити анодну напругу трубки, якщо відомо, що на екрані, віддаленому від щілини на відстані $l = 0,5$ м, ширина центрального дифракційного максимуму $\Delta x = 10,0$ мкм. Ширину b щілини прийняти рівною 0,10 мм.

617. Протон має кінетичну енергію $T = 1$ кеВ. Визначити додаткову енергію ΔT , яку необхідно йому повідомити для того, щоб довжина хвилі λ де Бройля зменшилася в три рази.

618. Визначити довжини хвиль де Бройля α -частинки й протона, що пройшли однакову прискорюючу різницю потенціалів $U = 1$ кВ.

619. Електрон має кінетичну енергію $T = 1,02$ МеВ. У скільки разів зміниться довжина хвилі де Бройля, якщо кінетична енергія T електрона зменшиться вдвічі?

620. Кінетична енергія T електрона дорівнює подвоєному значенню його енергії спокою ($2mc^2$). Обчислити довжину хвилі λ де Бройля для такого електрона.

621. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію електрона, що рухається всередині сфери радіусом $R = 0,05$ нм.

622. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити найменші помилки Δv у визначенні швидкості електрона й протона, якщо координати центру мас цих частинок можуть бути встановлені з невизначеністю 1 мкм.

623. Яка повинна бути кінетична енергія T протона в моноенергетичному пучку, який використовується для дослідження структури з лінійними розмірами $l \approx 10^{-13}$ см?

624. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити ширину l одновимірної потенційної скриньки, в якій мінімальна енергія електрона $E_{min} = 10$ еВ.

625. Альфа-частинка знаходиться в нескінченно глибокій, одноірній, прямокутній потенційній скриньці. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити ширину l скриньки, якщо відомо, що мінімальна енергія α -частинки $E_{min} = 8$ МеВ.

626. Середній час життя атома у збудженому стані становить $\Delta t \approx 10^{-8}$ с. При переході атома в нормальний стан випромінюється фотон, середня довжина хвилі $\langle \lambda \rangle$ якого дорівнює 600 нм. Оцінити ширину $\Delta \lambda$ випромінюваної спектральної лінії, якщо не відбувається її розширення за рахунок інших процесів.

627. Для наближеної оцінки мінімальної енергії електрона в атомі водню можна припустити, що невизначеність Δr радіуса r електронної орбіти й невизначеність Δp імпульсу p електрона на такій орбіті відповідно пов'язані наступним чином: $\Delta r \approx r$ і $\Delta p \approx p$. Використовуючи ці зв'язки, а також співвідношення невизначеностей, знайти значення радіуса електронної орбіти, відповідного мінімальної енергії електрона в атомі водню.

628. Моноенергетичний пучок електронів висвічує в центрі екрана електронно-променевої трубки пляму радіусом $r \approx 10^{-3}$ см. Користуючись співвідношенням невизначеностей, знайти, у скільки разів невизначеність Δx координати електрона на екрані в напрямку, перпендикулярному осі трубки, менше розміру r плями. Довжину L електронно-променевої

трубки прийняти рівною 0,50 м, а прискорює електрон напруга U – дорівнює 20 кВ.

629. Середній час життя Δt атома в збудженому стані становить близько 10^{-8} с. При переході атома в нормальний стан випромінюється фотон, середня довжина хвилі $\langle \lambda \rangle$ якого дорівнює 400 нм. Оцінити відносну ширину $\Delta \lambda / \lambda$ випромінюваної спектральної лінії, якщо не відбувається розширення лінії за рахунок інших процесів.

630. Для наближеної оцінки мінімальної енергії електрона в атомі водню можна припустити, що невизначеність Δr радіуса r електронної орбіти й невизначеність Δp імпульсу p електрона на такій орбіті відповідно пов'язані наступним чином: $\Delta r \approx r$ і $\Delta p \approx p$. Використовуючи ці зв'язки, а також співвідношення невизначеностей, визначити мінімальне значення енергії T_{min} електрона в атомі водню.

631. Частина знаходиться в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенційній скриньки. Знайти відношення різниці $\Delta E_{n,n+1}$ сусідніх енергетичних рівнів до енергії E_n частки в трьох випадках: 1) $n = 2$; 2) $n = 5$; 3) $n \rightarrow \infty$.

632. Електрон знаходиться в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенційній скриньці шириною $l = 0,1$ нм. Визначити в електрон-вольтах найменшу різницю енергетичних рівнів електрона.

633. Частина в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенційній скриньці шириною l знаходиться у збудженому стані ($n = 3$). Визначити, в яких точках інтервалу $0 < x < l$ щільність ймовірності перебування частинки має максимальне й мінімальне значення.

634. У прямокутній потенційній ямі шириною l з абсолютно непроникними стінками ($0 < x < l$) знаходиться частинка в основному стані. Знайти ймовірність ω місцезнаходження цієї частки в області $1/4 l < x < 3/4 l$.

635. Частина в нескінченно глибокій, одновимірній, прямокутній потенційній скриньці знаходиться в основному стані. Яка ймовірність ω виявлення частки в крайній чверті скриньки?

636. Хвильова функція, що описує рух електрона в основному стані атома водню, має вигляд:

$$\psi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

де A – деяка постійна;

a_0 – перший борівський радіус.

Знайти для основного стану атома водню найбільш ймовірну відстань електрона від ядра.

637. Частина знаходиться в основному стані в прямокутній ямі шириною l з абсолютно непроникними стінками. У скільки разів відрізняються ймовірності місцезнаходження частинки: ω_1 – в крайній третини і ω_2 – в крайній чверті скриньки?

638. Хвильова функція, що описує рух електрона в основному стані атома водню, має вигляд:

$$\psi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

де A – деяка постійна;

a_0 – перший борівський радіус.

Знайти для основного стану атома водню середнє значення $\langle F \rangle$ кулонівської сили.

639. Електрон знаходиться в нескінченно глибокій, одномірній, прямокутній потенційній скриньці шириною l . У яких точках в інтервалі $0 < x < l$ щільності ймовірності знаходження електрона на другому й третьому енергетичних рівнях однакові? Обчислити густину ймовірності для цих точок. Рішення пояснити графіком.

640. Хвильова функція, що описує рух електрона в основному стані атома водню, має вигляд:

$$\psi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

де A – деяка постійна;

a_0 – перший борівський радіус.

Знайти для основного стану атома водню середнє значення $\langle \Pi \rangle$ потенційної енергії.

641. Знайти період напіврозпаду $T_{1/2}$ радіоактивного ізотопу, якщо його активність за час $t = 10$ діб зменшилась на 24 % в порівнянні з початковою.

642. Визначити, яка частка радіоактивного ізотопу ${}^{225}_{89}\text{Ac}$ розпадається протягом часу $t = 6$ діб.

643. Активність A деякого ізотопу за час $t = 10$ діб зменшилась на 20 %. Визначити період напіврозпаду $T_{1/2}$ цього ізотопу.

644. Визначити масу m ізотопу ${}^{131}_{53}\text{I}$, що має активність $A = 37$ ГБк.

645. Знайти середню тривалість життя τ атома радіоактивного ізотопу кобальту ${}^{60}_{27}\text{Co}$.

646. Лічильник α -частинок, встановлений поблизу радіоактивного ізоотопу, при першому вимірі реєстрував $N_1 = 1400$ частинок на хвилину, а через певний час $t = 4$ год – тільки $N_2 = 400$. Визначити період напіврозпаду $T_{1/2}$ ізоотопу.

647. У скільки разів зменшиться активність ізоотопу $^{32}_{15}\text{P}$ через час $t = 20$ діб?

648. На скільки відсотків зменшиться активність ізоотопу іридію $^{192}_{77}\text{Ir}$ за час $t = 15$ діб?

649. Визначити число N ядер, які розпадаються протягом часу: 1) $t_1 = 1$ хв; 2) $t = 5$ діб – в радіоактивному ізоотопі фосфору $^{32}_{15}\text{P}$ масою $m = 1$ мг.

650. З кожного мільйона атомів радіоактивного ізоотопу кожену секунду розпадається 200 атомів. Визначити період напіврозпаду $T_{1/2}$ ізоотопу.

651. Визначити кількість теплоти Q , що виділяється при розпаді радону активністю $A = 3,7 \cdot 10^{10}$ Бк за час $t = 20$ хв. Кінетична енергія T вилітає з радону α -частинки дорівнює 5,5 МеВ.

652. Маса $m = 1$ г урану $^{238}_{92}\text{U}$ в рівновазі з продуктами його розпаду виділяє потужність $P = 1,07 \cdot 10^{-7}$ Вт. Знайти молярну теплоту Q_m , що виділяється ураном за середній час життя τ атомів урану.

653. Визначити енергію, необхідну для поділу ядра ^{20}Ne на дві α -частинки та ядро ^{12}C . Енергії зв'язку на один нуклон в ядрах ^{20}Ne , ^4He та ^{12}C дорівнюють відповідно 8,03; 7,07 і 7,68 МеВ.

654. В одному акті поділу ядра урану ^{235}U звільняється енергія 200 МеВ. Визначити: 1) енергію, що виділяється при розпаді всіх ядер цього ізоотопу урану масою $m = 1$ кг; 2) масу кам'яного вугілля з питомою теплотою згоряння $q = 29,3$ МДж/кг, еквівалентну в тепловому відношенні 1 кг урану ^{235}U .

655. Потужність P двигуна атомного судна становить 15 МВт, його ККД дорівнює 30 %. Визначити місячну витрату ядерного пального при роботі цього двигуна.

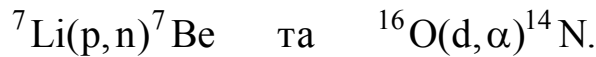
656. Вважаючи, що в одному акті поділу ядра урану ^{235}U звільняється енергія 200 МеВ, визначити масу m цього ізоотопу, що піддалося поділу при вибуху атомної бомби з тротиловим еквівалентом $30 \cdot 10^6$ кг, якщо тепловий еквівалент тротилу q дорівнює 4,19 МДж/кг.

657. При розподілі ядра урану ^{235}U під дією уповільненого нейтрона утворилися осколки з масовими числами $M_1 = 90$ і $M_2 = 143$. Визначити

число нейтронів, що вилетіли з ядра в даному акті поділу. Визначити енергію й швидкість кожного з осколків, якщо вони розлітаються в протилежні сторони та їх сумарна кінетична енергія T дорівнює 160 MeV.

658. Ядерна реакція $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$ викликана α -частинкою, яка володіла кінетичною енергією $T_\alpha = 4,2$ MeV. Визначити тепловий ефект цієї реакції, якщо протон, що вилетів під кутом $\vartheta = 60^\circ$ до напрямку руху α -частинки, отримав кінетичну енергію $T = 2$ MeV.

659. Визначити теплові ефекти наступних реакцій:



660. Визначити швидкості продуктів реакції $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$, що протікає в результаті взаємодії теплових нейтронів з спочиваючими ядрами бору.

661. Визначити теплоту Q , необхідну для нагрівання кристала калію масою $m = 200$ г від температури $T_1 = 4$ К до температури $T_2 = 5$ К. Прийняти характеристичну температуру Дебая для калію $\Theta_D = 100$ К і вважати умову $T \ll \Theta_D$ здійсненою.

662. Обчислити характеристичну температуру Θ_D Дебая для заліза, якщо при температурі $T = 20$ К молярна теплоємність заліза $C_m = 0,226$ Дж/К·моль. Умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.

663. Система, що складається з $N = 10^{20}$ тривимірних квантових осциляторів, знаходиться при температурі $T = \Theta_E$ ($\Theta_E = 250$ К). Визначити енергію E системи.

664. Мідний зразок масою $m = 100$ г знаходиться при температурі $T_1 = 10$ К. Визначити теплоту Q необхідну для нагрівання зразка до температури $T_2 = 20$ К. Можна прийняти характеристичну температуру Θ_D для міді рівної 300 К, а умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.

665. Використовуючи квантову теорію теплоємності Ейнштейна, визначити коефіцієнт пружності β зв'язку атомів у кристалі алюмінію. Прийняти для алюмінію $\Theta_E = 300$ К.

666. Знайти відношення середньої енергії $\langle \varepsilon_{кв} \rangle$ лінійного одновимірного осцилятора, обчисленої з квантової теорії, до енергії $\varepsilon_{кл}$ такого ж осцилятора, обчисленої за класичною теорією. Обчислення зробити для двох температур: 1) $T = 0,1\Theta_E$; 2) $T = \Theta_E$, де Θ_E – характеристична температура Ейнштейна.

667. Знаючи, що для алмазу $\Theta_E = 2000$ К, обчислити його питому теплоємність при температурі $T = 30$ К.

668. Питома теплоємність C_m срібла при температурі $T = 20$ К виявилася рівною $1,65$ Дж/(моль·К). Обчислити за значенням теплоємності характеристичну температуру Θ_D . Умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.

669. Обчислити (за Дебаєм) питому теплоємність хлористого натрію при температурі $T = \Theta_D / 20$. Умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.

670. Обчислити за теорією Дебая теплоємність цинку масою $m = 100$ г при температурі $T = 10$ К. Прийняти для цинку характеристичну температуру Дебая $\Theta_D = 300$ К і вважати умову $T \ll \Theta_D$ виконаною.

671. Визначити частку вільних електронів в металі при температурі $T = 0$ К, енергії ε яких укладені в інтервалі значень від $1/2 \varepsilon_{max}$ до ε_{max} .

672. Германієвий кристал, ширина ΔE забороненої зони в якому дорівнює $0,72$ еВ, нагрівають від температури $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до температури $t_2 = 15^\circ\text{C}$. У скільки разів зросте його питома провідність?

673. При нагріванні кремнієвого кристала від температури $t_1 = 0^\circ$ до температури $t_2 = 10^\circ\text{C}$ його питома провідність зростає в $2,28$ рази. За наведеними даними визначити ширину ΔE забороненої зони кристала кремнію.

674. p-n – перехід знаходиться під зворотною напругою $U = 0,1$ В. Його опір $R_1 = 692$ Ом. Який опір R_2 переходу при прямій напрузі?

675. Метали літій і цинк приводять у зіткнення один з одним при температурі $T = 0$ К. На скільки зміниться концентрація електронів провідності в цинку? Який з цих металів буде мати більш високий потенціал?

676. Опір R_1 p-n – переходу, що знаходиться під прямою напругою $U = 1$ В, дорівнює 10 Ом. Визначити опір R_2 переходу при зворотній напрузі.

677. Знайти мінімальну енергію W_{min} необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі CaAs, якщо його питома провідність γ змінюється в 10 разів при зміні температури від 20 до 3°C .

678. Опір R_1 кристалу PbS при температурі $t_1 = 20^\circ\text{C}$ дорівнює 10^4 Ом. Визначити його опір R_2 при температурі $t_2 = 80^\circ\text{C}$.

679. Яке значення енергії Фермі ε_F у електронів провідності двохвалентної міді? Висловити енергію Фермі в джоулях і електрон-вольтах.

680. Пряма напруга U , прикладена до p-n –переходу, дорівнює 2 В. У скільки разів зросте сила струму через перехід, якщо змінити температуру від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 273$ К?

ДОДАТОК А

Таблиця А1 – Основні фізичні постійні (округлені значення)

Фізична стала	Позначення	Значення
Нормальне прискорення вільного падіння	g	9,81 м/с ²
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постійна Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярна газова постійна	R	8,31 Дж/(моль · К)
Стандартний об'єм (молярний об'єм ідеального газу під час нормальних умов)	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$
Постійна Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Елементарний заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Швидкість світла у вакуумі	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постійна Стефана-Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постійна закону зміщення Віна	b	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постійна Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	\hbar	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Стала Ридберга	R	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радіус Бора	a	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптонівська довжина хвилі електрона	λ	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	μ_B	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Енергія іонізації атома водню	E_i	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 еВ)
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Електрична постійна	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнітна константа	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

Таблиця А2 – Деякі астрономічні величини

Найменування	Значення
1	2
Радіус Землі	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$

Продовження Таблиці А2

Маса Землі	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Радіус Сонця	$6,95 \cdot 10^8$ м
Маса Сонця	$1,98 \cdot 10^{30}$ кг
Радіус Місяця	$1,74 \cdot 10^6$ м
Маса Місяця	$7,33 \cdot 10^{22}$ кг
Відстань від центру Землі до центру Сонця	$1,49 \cdot 10^{11}$ м
Відстань від центру Землі до центру Місяця	$3,84 \cdot 10^8$ м

Таблиця А3 – Щільність твердих тіл

Тверде тіло	Щільність, кг/м ³	Тверде тіло	Щільність, кг/м ³
Алюміній	$2,70 \cdot 10^3$	Мідь	$8,9 \cdot 10^3$
Барій	$3,50 \cdot 10^3$	Нікель	$8,90 \cdot 10^3$
Ванадій	$6,02 \cdot 10^3$	Свинець	$11,3 \cdot 10^3$
Вісмут	$9,8 \cdot 10^3$	Срібло	$10,5 \cdot 10^3$
Залізо	$7,88 \cdot 10^3$	Цезій	$1,90 \cdot 10^3$
Літій	$0,53 \cdot 10^3$	Цинк	$7,15 \cdot 10^3$

Таблиця А4 – Щільність рідин

Рідина	Щільність, кг/м ³	Рідина	Щільність, кг/м ³
Вода (при 4°C)	$1,00 \cdot 10^3$	Сірковуглець	$1,26 \cdot 10^3$
Гліцерин	$1,26 \cdot 10^3$	Спирт	$0,80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$		

Таблиця А5 – Щільність газів (за нормальних умов)

Газ	Щільність, кг/м ³	Газ	Щільність, кг/м ³
Водень	0,09	Гелій	0,18
Повітря	1,29	Кисень	1,43

Таблиця А6 – Коефіцієнт поверхневого натягу рідин

Рідина	Коефіцієнт, мН/м	Рідина	Коефіцієнт, мН/м
Вода	72	Ртуть	500
Мильна піна	40	Спирт	22

Таблиця А7 – Ефективний діаметр молекули

Газ	Діаметр, м	Газ	Діаметр, м
Азот	$3,0 \cdot 10^{-10}$	Гелій	$1,9 \cdot 10^{-10}$
Водень	$2,3 \cdot 10^{-10}$	Кисень	$2,7 \cdot 10^{-10}$

Таблиця А8 – Діелектрична проникність

Речовина	Проникливість	Речовина	Проникливість
Вода	81	Парафін	2,0
Масло трансформаторне	2,2	Скло	7,0

Таблиця А9 – Питомий опір металів

Метал	Питомий опір, Ом·м	Метал	Питомий опір, Ом·м
Залізо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Ніхром	$1,1 \cdot 10^{-6}$
Мідь	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Срібло	$1,6 \cdot 10^{-8}$

Таблиця А10 – Енергія іонізації

Речовина	E_i , Дж	E_i , еВ
Водень	$2,18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелій	$3,94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Літій	$1,21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1,66 \cdot 10^{-18}$	10,4

Таблиця А11 – Рухливість іонів у газах, $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$

Газ	Позитивні іони	Негативні іони
Азот	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Водень	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$
Повітря	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$

Таблиця А12 – Показник заломлення

Речовина	Показник	Речовина	Показник
Алмаз	2,42	Гліцерин	1,47
Вода	1,33	Скло	1,50

Таблиця А13 – Робота виходу електронів

Метал	A , Дж	A , еВ
Калій	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Літій	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубідій	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Срібло	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезій	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

Таблиця А14 – Відносні атомні маси (округлені значення) A_r і порядкові номери Z деяких елементів

Елемент	Символ	A_r	Z	Елемент	Символ	A_r	Z
Азот	N	14	7	Марганець	Mn	55	25
Алюміній	Al	27	13	Мідь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молібден	Mo	96	42
Барій	Ba	137	56	Натрій	Na	23	11
Ванадій	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водень	H	1	1	Нікель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелій	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Залізо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сіра	S	32	16
Калій	K	39	19	Срібло	Ag	108	47
Кальцій	Ca	40	20	Вуглець	C	12	6
Кисень	O	16	8	Уран	U	238	92
Магній	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

Таблиця А15 – Маса атомів легких ізотопів

Ізотоп	Символ	Маса, а.о.м.	Ізотоп	Символ	Маса, а.о.м.
1	2	3	4	5	6
Нейтрон	${}_0^1n$	1,00867	Берилій	${}_4^7\text{Be}$	7,01693
				${}_4^9\text{Be}$	9,01219
Водень	${}_1^1\text{H}$	1,00783	Бор	${}_5^{10}\text{B}$	10,01294
	${}_1^2\text{H}$	2,01410		${}_5^{11}\text{B}$	11,00930
	${}_1^3\text{H}$	3,01605			

Продовження таблиці А15

1	2	3	4	5	6
Гелій	${}^3_2\text{He}$	3,01605	Вуглець	${}^{14}_6\text{C}$	12,00000
	${}^4_2\text{He}$	4,00260		${}^{13}_6\text{C}$	13,00335
Літій	${}^6_3\text{Li}$	6,01513	Азот	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307
	${}^7_3\text{Li}$	7,01601			
Кисень	${}^{16}_8\text{O}$	15,99491			
	${}^{17}_8\text{O}$	16,99913			

Таблиця А16 – Періоди напіврозпаду радіоактивних ізотопів

Ізотоп	Символ	Період напіврозпаду
Актиній	${}^{225}_{89}\text{Ac}$	10 діб
Йод	${}^{131}_{53}\text{I}$	8 діб
Кобальт	${}^{60}_{27}\text{Co}$	5,3 років
Магній	${}^{27}_{12}\text{Mg}$	10 хв
Радій	${}^{226}_{86}\text{Ra}$	1620 років
Радон	${}^{222}_{86}\text{Rn}$	3,8 діб
Стронцій	${}^{90}_{38}\text{Sr}$	27 років
Фосфор	${}^{32}_{15}\text{P}$	14,3 доби
Церій	${}^{144}_{58}\text{Ce}$	285 доби

Таблиця А17 – Маса й енергія спокою деяких часток

Частка	m		E_0	
	кг	а.о.м	Дж	МеВ
Електрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01335	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частка	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
π -мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

Таблиця А18 – Одиниці СІ, що мають спеціальні найменування

Величина		Одиниця		
Найменування	Розмірність	Найменування	Позначення	Вираз через основні й додаткові одиниці
1	2	3	4	5
Основні одиниці				
Довжина	L	метр	м	
Маса	M	кілограм	кг	
Час	T	секунда	с	
Сила електричного току	I	ампер	А	
Термодинамічна температура	Θ	кельвін	К	
Кількість речовини	ν	моль	моль	
Сила світу	J	кандела	кд	
Додаткові одиниці				
Плоский кут	–	радіан	рад	
Тілесний кут	–	стерадіан	ср	
Довільні одиниці				
Частота	T^{-1}	герц	Гц	s^{-1}
Сила, вага	$LM T^{-2}$	ньютон	Н	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Тиск, механічна напруга	$L^{-1} M T^{-2}$	паскаль	Па	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Енергія, робота, кількість тепла	$L^2 M T^{-2}$	джоуль	Дж	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Потужність, потік енергії	$L^2 M T^{-3}$	ватт	Вт	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Кількість електрики (елект. заряд)	$T I$	кулон	Кл	$s \cdot A$
Електрична ємність	$L^{-2} M^{-1} T^4 I^2$	фарад	Ф	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Електричний опір	$L^2 M T^{-3} I^{-2}$	Ом	Ом	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Електрична провідність	$L^{-2} M^{-1} T^3 I^2$	сименс	См	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^{-1}$

Продовження таблиці А18

1	2	3	4	5
Електрична напру- га, електричний потенціал, різниця електричних по- тенціалів, ЕРС	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Магнітний потік	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Магнітна індукція	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Індуктивність вза- ємна індуктив.	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Світовий потік	J	люмен	лм	кд · ср
Освітленість	$L^{-2}J$	люкс	лк	$m^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активність ізо- топу, (активність у радіоактивному джерелі)	T^{-1}	беккерель	Бк	s^{-1}
Поглинена доза випромінювання	L^2I^{-2}	грей	Гр	$m^2 \cdot c^{-2}$

Примітки:

1. Окрім температури Кельвіна (позначення T) допускається засто-
совувати також температуру Цельсія (t°), визначається виразом $t^\circ = T - T_0$,
де $T_0 = 273,15$ К. Температура Кельвіна виражається в кельвінах, темпера-
тура Цельсія – в градусах Цельсія (міжнародне й російське $^\circ\text{C}$). За розмі-
ром градус Цельсія дорівнює Кельвіну.

2. Інтервал чи різницю температур Кельвіна виражають у кельвінах.
Інтервал чи різницю температур Цельсія допускається висловлювати як в
кельвінах, так і в градусах Цельсія.

Таблиця А19 – Множники й приставки для утворення десяткових
кратних і часткових одиниць та їх найменування

Приставка		Множник	Приставка		Множник
Найменуван- ня	Позна- чення		Найменува- ня	Позна- чення	
1	2	3	4	5	6
екса	Е	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санті	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	міллі	м	10^{-3}

Продовження таблиці А19

1	2	3	4	5	6
гіга	Г	10^9	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^3	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^1	атто	а	10^{-18}

Таблиця А20 – Грецький алфавіт

Позначення літер		Назви літер	Позначення літер		Назви літер
<i>A</i>	α	альфа	<i>N</i>	ν	ню
<i>B</i>	β	бета	Ξ	ξ	ксі
<i>G</i>	γ	гама	<i>O</i>	\omicron	омікрон
Δ	δ	дельта	Π	π	Пи
<i>E</i>	ϵ	епсілон	<i>P</i>	ρ	ро
<i>Z</i>	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
<i>H</i>	η	ета	<i>T</i>	τ	тау
Θ	θ	тета	<i>Y</i>	υ	іпсилон
<i>J</i>	ι	йота	Φ	ϕ	фі
<i>K</i>	χ	каппа	<i>X</i>	χ	хі
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	псі
<i>M</i>	μ	ми	Ω	ω	омега

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**Основна**

1. Физика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов (включая сельскохозяйственные вузы) / А. А. Воробьев, В. П. Иванов, В. Г. Кондакова, А. Г. Чертов – М.: Высш. шк., 1987. – 208 с.: ил.
2. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1979.
3. Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1973-1979. – Т. 1, 2, 3.
4. Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. – М.: Наука, 1972-1974. – Т. 1, 2, 3.
5. Савельев И. В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1977-1979. – X 1, 2, 3
6. Трофимова Т. И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1985.
7. Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981.
8. Фирганг Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физике. – М.: Высшая школа, 1977.
9. Новодворская Е. М., Дмитриев Э. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе. – 3-е изд. – перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1981.

Додаткова

10. Калашников С. Г. Электричество. – М.: Наука, 1977.
11. Кикоин И. К., Кикоин А. К. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1976.
12. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. – М.: Высшая школа, 1976–1986.
13. Матвеев А. Н. Молекулярная физика. – М.: Высшая школа, 1981.
14. Матвеев А. Н. Электродинамика. – М.: Высшая школа, 1980.
15. Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. М.:– Наука, 1977.
16. Сивухин Д. В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1977–1980, Т. 1, 2, 3, 4..
17. Стрелков С. П. Механика. – М.: Наука, 1975.
18. Чертов А. Г. Единицы физических величин. – М.: Высшая школа, 1977.
19. Епифанов Г. И., Мома Ю. А. Твердотельная электроника. – М.: Высшая школа, 1986.

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Галіахметов Алмаз Мансурович

**МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ЗАГАЛЬНОГО КУРСУ ФІЗИКИ
ГАЛУЗЬ ЗНАНЬ 0701 «ТРАНСПОРТ І ТРАНСПОРТНА
ІНФРАСТРУКТУРА» (ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ
НАВЧАННЯ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ –
6.070106 «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»)**

Підписано до випуску 01.03 2012 р. Гарнітура Times New Roman.
Умов. друк. арк. 13,69. Зам. № 70.

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51
E – mail: druknt@rambler.ru

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007 р.

