УДК 681.3

АНАЛИЗ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МНОГОШАГОВЫХ БЛОЧНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Щеглов М.И., Фельдман Л.П.
Донецкий национальный технический университет

Исследования, изложенные в статье, посвящены разработке и оценке эффективности параллельных блочных многошаговых методов численного решения задачи Коши. Для вычисления приближенных значений решения задачи Коши колокационным многошаговым блочным методом можно для этого использовать следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} &V_n^{(1)} = U_n^{(0)} + \tau\Phi_1 F_n^{(0)}, \\ &V_{n+1}^{(r+1)} = \left(U_n^{(0)} + \tau\Phi F_n^{(0)}\right) + \tau\tilde{\Psi} F_{n+1}^{(r)}, n = 1, 2, \dots; r = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{1}$$

Закрепим каждый процессорный элемент за точкой n-го блока, которая вычисляется. Тогда каждый из k процессоров сначала будет вычислять значения начального вектора по методу Адамса-Башфорта. Далее каждый процессор будет находить соответствующий вектор со значениями правых частей $f_{n,j}=f(t_n+j\tau,u_{n,j})$. Если количество процессоров меньше, чем размерность блока, то некоторые процессорные элементы будут последовательно вычислять значения нескольких точек блока, что в итоге увеличит общее время вычислений.

Определим время решения задачи m-шаговым k-точечным блочным методом на однопроцессорной линейке k процессоров. Время вычисления на одном процессоре с локальной точностью $O(\tau^{m+k})$ во всех k узлах:

$$T_1 = k(k+1)\cdot t_f + 4k^3\cdot t_{сл} + 2k^2(2k+1)\cdot t_{ум}. \tag{2}$$

Время параллельного вычисления приближенных значений решения на линейке из процессоров с той же точностью для всех узлов блока составит

$$T_k = (k+1)\cdot t_f + 2[k\cdot(2k+1)+1]\cdot t_{ca} + 3[k\cdot(2k+1)+1]\cdot t_{mk} + k(2k+1)\cdot t \qquad (3)$$

При решении системы дифференциальных уравнений возможны два варианта распределения процессоров:

- для каждого уравнения выделяется $P_1=P/k$ процессоров, где P – общее число процессоров, а k – число уравнений в системе. P_1 процессоров участвуют в параллельном вычислении значений блока: m/P_1 значений точек блока вычисляются на каждом из процессоров;
- для каждого блока выделяется $P_1=P/m$ процессоров, где P – общее число процессоров, а m – число точек в блоке. k/P_1 уравнений системы вычисляются на каждом из процессоров.

На каждом шаге вычислений производится обмен найденными значениями на текущем шаге вычислений между процессорами. Для реализации расчётов на узле необходимо наличие следующих данных (рис. 1):

- вектор начальных приближений искомой функции $U_{i,j}$;
- вектор значений ОДУ для сеточных функций в узлах предыдущего блока $F_{i,j}$;
- вектор значений элементов $\psi_{i,j}$, который является i-ым столбцом матрицы Ψ;
- вектор значений элементов $\varphi_{i,j}$, который является i-ым столбцом матрицы Φ;
- вектор значений элементов $F_{i,j}$, который является i-ой строкой матрицы F.

Критериями оценки параллельных алгоритмов, как правило, выступают две величины:

- ускорение S_p;
- эффективность E_p.

Введем следующие обозначения:

T_1 – время выполнения последовательного алгоритма;

T_p – время выполнения параллельного алгоритма, распараллеленного на k процессоров;

T_f – время вычисления значения функции f(t,x);

$T_{сл}$ – время выполнения операции сложения;

$T_{ум}$ – время выполнения операции умножения;

$T_{об}$ – время передачи числа соседнему процессору.

Ускорение (speedup), получаемое при использовании параллельного алгоритма для p процессоров, по сравнению с последовательным вариантом выполнения вычислений определяется величиной

$$S_p(n)=T_1(n)/T_p(n), \qquad (4)$$

т.е. как отношение времени решения задач на скалярной ЭВМ к времени выполнения параллельного алгоритма (величина n применяется для параметризации вычислительной сложности решаемой задачи и может пониматься, например, как количество входных данных задачи).

Эффективность (efficiency) использования параллельным алгоритмом процессоров при решении задачи определяется

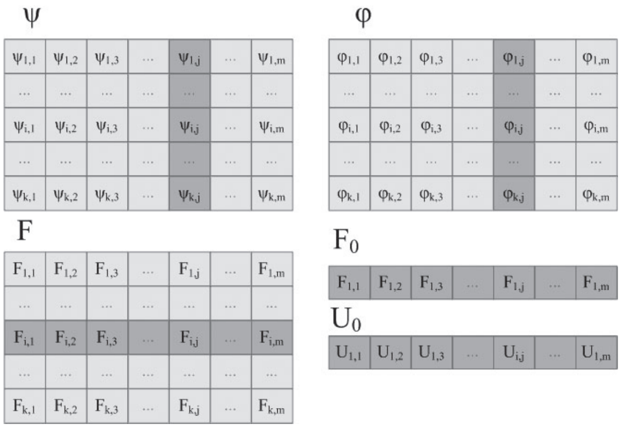

Рисунок 1 – Вычислительная зависимость элементов соотношением

$$E_p(n)=T_1(n)/(pT_p(n))=S_p(n)/p \qquad (5)$$

(величина эффективности определяет среднюю долю времени выполнения алгоритма, в течение которой процессоры реально задействованы для решения задачи).

Следует отметить, что на динамические характеристики параллелизма влияют латентность и время передачи одного слова. Полученная зависимость коэффициента эффективности от латентности является обратнопропорциональной и приведена на рис. 2.

С ростом величины латентности время, затрачиваемое на обмен данными между процессами увеличивается, а эффективность параллельных вычислений уменьшается. При расчете ускорения и эффективности многошагового блочного метода наибольшее влияние на показатели оказывает время вычислений правой части уравнений, т.к. время выполнения арифметических операций и обмена значительно меньше времени вычисления правой части. Зависимость коэффициентов ускорения и эффективности от времени вычисления правой части уравнения Tf и числа точек блока k приведены на рис. 3–4.

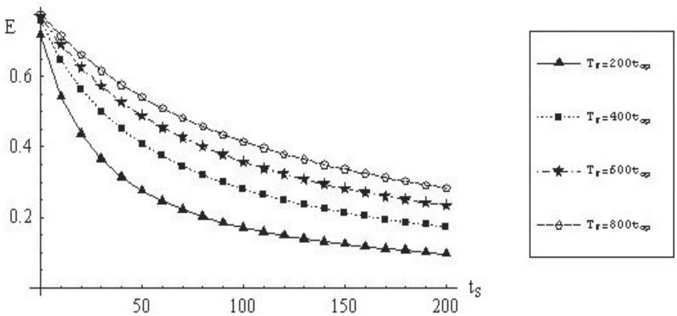

Рисунок 2 – Зависимость коэффициентов эффективности параллельного многошагового блочного метода от величины латентности, t_s

Ускорение k-точечного многошагового параллельного алгоритма можно считать приближенно равным

$$W(k) \approx k, \tag{6}$$

и эффективность будет равна

$$E(k) \approx 1. \tag{7}$$

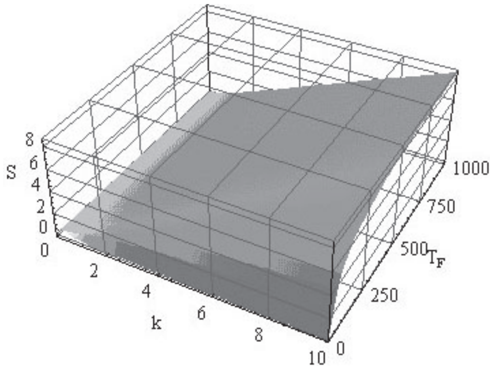

Рисунок 3 – Зависимость коэффициента ускорения параллельного многошагового блочного метода от времени вычисления правой части, T_f и числа точек блока k

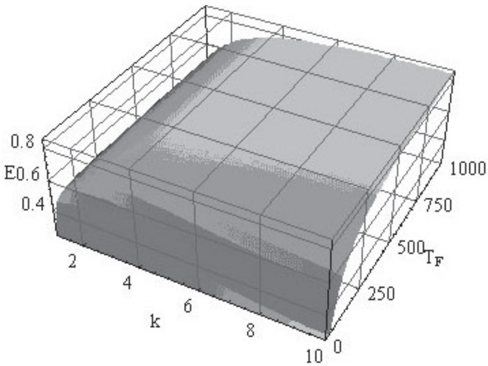

Рисунок 4 – Зависимость коэффициента эффективности параллельного многошагового блочного метода от времени вычисления правой части, T_f и числа точек блока k

При этом характеристики параллелизма в системах с кольцевой структурой оказываются хуже, чем в системах с топологией гиперкуб и тор, что свидетельствует про сильное влияние время обмена данными между процессорами в параллельных вычислительных системах. Между временем вычисления правой части и эффективностью существует прямая зависимость: при увеличении трудоемкости вычислений правых частей, эффективность рассмотренных методов увеличивается. Также следует отметить, что в связи с тем, что число точек блока связано с числом используемых процессоров, при увеличении числа точек в блоке возрастает коэффициент ускорения S и уменьшается коэффициент эффективности E.

Литература

[1] Фельдман Л.П. Блочные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Сборник трудов конференции Моделирование-2006. – К., 2006. – С. 423-427.

[2] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир,1999. – 685с.

[3] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.: Наука, 1989.- 432с.

[4] Дмитриева О.А. Анализ параллельных алгоритмов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами Адамса–Башфорта и Адамса–Моултона // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, №5. С. 81–86.

[5] Worland P.B. Parallel methods for the numerical solution of ordinary differential equations //IEEE Trans. Comp. C. – 25, 10(1976). – P.1045-1048.