УДК 681.19, 512.83

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Куприй Я.А., Дмитриева О.А.
Донецкий национальный технический университет

Моделирование динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или их системами, предъявляет особые требования к обеспечению устойчивости решения. Дополнительные трудности появляются при численном решении жестких систем. Это обусловлено необходимостью использования специальных методов, позволяющих выбирать шаг интегрирования исходя лишь из требований точности, а не устойчивости, или из требований сходимости итерационного процесса решения неявных уравнений. В настоящей работе рассматривается устойчивость параллельных методов решения жестких систем. Для задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ \ x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

уравнения одношагового разностного метода [1] для блока *n,* содержащего *k* точек, можно записать в виде

$$\frac{u_{n,i}-u_{n,0}}{i\tau}=b_iF_{n,0}+\sum_{j=1}^{k}a_{i,j}F_{n,j},\ i=\overline{1,k},\ n=1,2,... \tag{2}$$

где $F_{n,i}=f(t_{n,i},u_{n,i})$, *i*- номер точки в блоке, τ - шаг интегрирования. Условие устойчивости Далквиста для разностных уравнений (2) выполняется, так как для каждого *i* характеристическое уравнение разностного метода имеет вид

$$\lambda^{i}=1,\ i=\overline{1,k}, \tag{3}$$

все *i* простых корней которого лежат на окружности единичного радиуса, и наивысший порядок аппроксимации (2) равен $p = k+1$ [1]. Таким образом выполнены условия сходимости решения разностной задачи при $\tau \to 0$ к решению исходной задачи (1) на конечном отрезке $0 \le nk\tau \le T$. Однако выполнение условий устойчивости разностных уравнений по Далквисту [2] является недостаточным при проведении практических расчетов на больших интервалах *t,* так как не гарантирует абсолютную устойчивость разностного метода. Исследование устойчивости одношаговых блочных методов (2) в настоящей работе проводилось на модельном одномерном уравнении

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x,\ t>0, \tag{4}$$

устойчивость двухточечного метода

$$\begin{aligned} u_{n+1}&=u_n+\mu*(5u_n+8u_{n+1}-u_{n+2})/12\\ u_{n+2}&=u_n+\mu*(u_n+4u_{n+1}+u_{n+2})/12 \end{aligned} \tag{5}$$

обеспечивало выполнение следующих условий

$$|q_1|=\left|\frac{6-\mu^2}{2(3-3\mu+\mu^2)}\right|\le 1\ \text{и}\ |q_2|=\left|\frac{3+3\mu+\mu^2}{3-3\mu+\mu^2}\right|\le 1, \tag{6}$$

где $\mu=\lambda\tau$.

Для доказательства устойчивости необходимо определить множество точек комплексной плоскости, в которых выполняются условия $|q_1|\le 1$, $|q_2|\le 1$. Границей такой области является множество точек, для которых $|q_1|$=1. Положив $q_1 = e^{i\varphi}$, получим

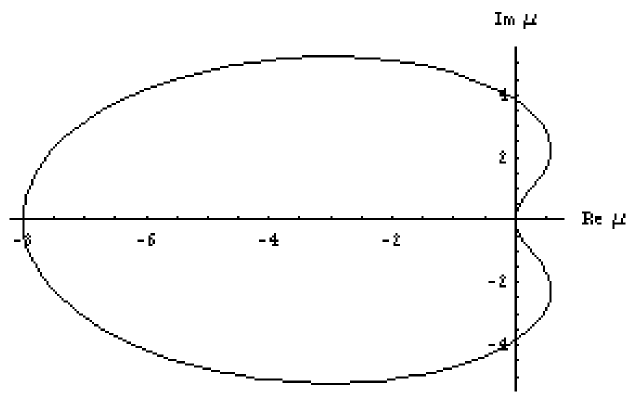

Рисунок 1 - Граница устойчивости первого уравнения 2-х точечного метода

Для точек, расположенных внутри этой кривой, выполнено условие $|q_1|$>1, поэтому область устойчивости первого уравнения метода представляет собой внешность кривой. Областью устойчивости второго уравнения метода является левая полуплоскость Re(μ)<0, так как для действительных отрицательных μ имеет место $|q_2|$<1. Поскольку области устойчивости обоих уравнений содержат левую полуплоскость (μ <0), то метод является А-устойчивым.

В работе доказана $A(\alpha)$- устойчивость четырехточечного метода

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \mu*(251u_n + 646u_{n+1} - 264u_{n+2} + 106u_{n+3} - 19u_{n+4})/720 \\
u_{n+2} &= u_n + \mu*(29u_n + 124u_{n+1} + 24u_{n+2} + 4u_{n+3} - u_{n+4})/90 \\
u_{n+3} &= u_n + 3\mu*(9u_n + 34u_{n+1} + 24u_{n+2} + 14u_{n+3} - u_{n+4})/80 \\
u_{n+4} &= u_n + 2\mu*(7u_n + 32u_{n+1} + 12u_{n+2} + 32u_{n+3} + 7u_{n+4})/45
\end{aligned}, \qquad (7)$$

которая обеспечивается выполнением следующих условий

$$\begin{aligned}
|q_1| &= \left|\frac{60 - 60\mu + 15\mu^2 + 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1, \\
|q_2| &= \left|\frac{60 - 15\mu^2 + 2\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1, \\
|q_3| &= \left|\frac{60 + 60\mu + 15\mu^2 - 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1, \\
|q_4| &= \left|\frac{60 + 120\mu + 105\mu^2 + 50\mu^3 + 12\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1
\end{aligned} \qquad (8).$$

Границей области устойчивости 1-го уравнения является множество точек

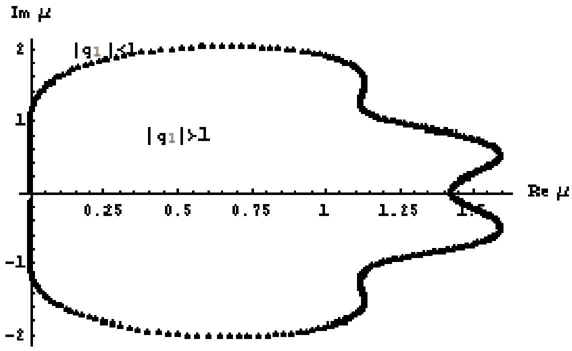

Рисунок 2 - Граница устойчивости первого уравнения 4-х точечного метода

Повторив последовательность действий для оставшихся уравнений системы, получим границы областей устойчивости каждого уравнения. При этом областью устойчивости четвертого уравнения метода является мнимая ось, т.е. множество точек, для которых $\mu = i\alpha$, где α – произвольное действительное число, тогда областью является левая полуплоскость $\mathrm{Re}(\mu) < 0$. Таким образом можно утверждать, что одношаговый четырехточечный метод является $A(\alpha)$ устойчивым.

Решение нелинейной системы уравнений (1) может быть осуществлено либо с помощью итерационного процесса, который позволяет проводить вычисления параллельно для каждого узла блока, либо с помощью метода Ньютона. Полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений результаты могут быть распространены и на системы.

Предложенная методика позволяет также исследовать устойчивость параллельных многошаговых методов [1,3] с любым числом точек в блоке. Проведенные численные решения одношаговыми блочными методами тестовых жестких систем практически подтвердили их надежность и эффективность.

Литература

[1] Фельдман Л.П., Дмитриева О.А. Эффективные методы распараллеливания численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.// Математическое моделирование, том 13, № 7, 2001. – С. 66-72.
[2] Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці – К.: Видавнича група BHV , 2006. – 480 с.
[3] Дмитриева О.А. Об особенностях моделирования линейных динамических систем в многопроцессорных средах// Электронное моделирование, № 2, 2007. С. 63-72