УДК 519.688

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТАХ SCILAB И MATHEMATICA

Иваница С.В., Меркулов А.В., Аноприенко А.Я.
Донецкий национальный технический университет

Рассмотрена проблема эффективности интервальных вычислений в пакетах Mathematica и SciLab. Выполнен сравнительный анализ интервальных вычислений в различных пакетах, а также сравнительный анализ потребляемых ресурсов в традиционных методах и в интервальных вычислениях. Получены таблицы и графики зависимостей. Сделан вывод об области применения интервальных вычислений и их актуальности в будущем.

5

Введение

Интервал – это замкнутый числовой промежуток. Например, интервал между x_1 и x_2 содержит все вещественные числа между x_1 и x_2, включая их самих, и обозначается как $[x_1, x_2]$ (работающие с интервалами системы компьютерной математики представляют интервалы в виде $|x_1, x_2|$ или $\{x_1, x_2\}$). Такое представление машинных чисел в ЭВМ позволяет оперировать с интервальными неопределенностями как с состоянием неполного (частичного) знания о данной величине, когда можно лишь указать ее принадлежность данному входному или результирующему интервалу. В качестве математической дисциплины, изучающей задачи с интервальными неопределенностями в данных и методы их решения, выступает интервальный анализ. Интервальный анализ является далеко не новой концепцией выполнения арифметических действий над числами в формате с плавающей запятой — первая монография, полностью посвященная интервальному анализу, была опубликована Р. Е. Муром в 1966 г [1]. Частью интервального анализа является интервальная арифметика, которая непосредственно включает в себя обширный набор арифметических операций над интервалами (интервальных операций).

Следует отметить, что главным достоинством применения интервальной арифметики является тот факт, что возникающие в процессе вычислений погрешности не выводят истинное значение за границы интервала. В качестве основного недостатка интервальной арифметики можно указать на значительное увеличение времени выполнения интервальных операций по сравнению с арифметическими операциями над действительными числами, представленными в формате с плавающей точкой.

Классическая интервальная арифметика образована интервалами $\mathrm{X} = \{\, x_1, x_2 \mid x_1 \geq x_2 \,\} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{Y} = \{\, y_1, y_2 \mid y_1 \geq y_2 \,\} \subset \mathbb{R}$ так, что $\mathrm{X} \bullet \mathrm{Y} = \{\, x \bullet y \mid x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y} \,\}$ для $\bullet \in \{\, +, -, *, / \,\}$. При этом, интервальная функция $\mathrm{F(X)}$, $\mathrm{X} \in \mathrm{I}\mathbb{R}$ называется интервальным расширением вещественной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, если $\mathrm{F(X)}$ монотонна по включению и $\mathrm{F(X)} = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

В качестве основной цели проведения исследования можно выделить анализ точности и времени выполнения интервальных операций в поддерживающих интервальную арифметику математических пакетах Wolfram Mathematica 5 [2] и Digiteo SciLab 5.2.2 [3] (для математического пакета SciLab необходимо наличие интервальной надстройки Int4Sci).

В процессе проведения интервальных вычислений в математических пакетах были выполнены следующие задачи:

– получение значений тестовых функций для вычислений: гиперболический эллипсоид (Rotated Hyper-Ellipsoid) и функция Растригина (Rastrigin's function) с использованием пакетов Mathematica и SciLab;
– выполнение интервальных вычислений данных функций и сравнительный анализ точности полученных результатов в данных пакетах;
– получение и сравнительный анализ временной характеристики *Tn* (*Tn* — время вычисления функции в *n*-количествах циклов вычислений) при вычислениях точечным (обычным) и интервальным способами.

Графики функций Rotated Hyper-Ellipsoid (1) и Rastrigin's function (2) представлены на рис. 1.

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} x_j^2 \tag{1}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 10\,cos(2\pi x_i) \right) + 10n \tag{2}$$

Выполнение интервальных вычислений и получение необходимых результатов работы математических пакетов проводилось на ноутбуке DELL Inspiron N5010 со следующими параметрами конфигурации: CPU Intel CoreTM i3-330M (2,13 GHz); RAM DDRII 3072MB; VGA ATI Radeon HD5470 (GDDR III 1GB); HDD SATA 320GB.

Результаты интервальных вычислений функции Rotated Hyper-Ellipsoid

При выполнении вычислений интервальной функции гипер-эллипсоида $F_1(X)$ было выбрано начальное интервальное значение X = [1.4999, 1.5001], представляющее собой интервальное окружение числа 1,5. Для проведения анализа точности полученных результатов при интервальных вычислениях, предварительно было произведено точечное вычисление данной функции при значении аргумента x = 1.5:

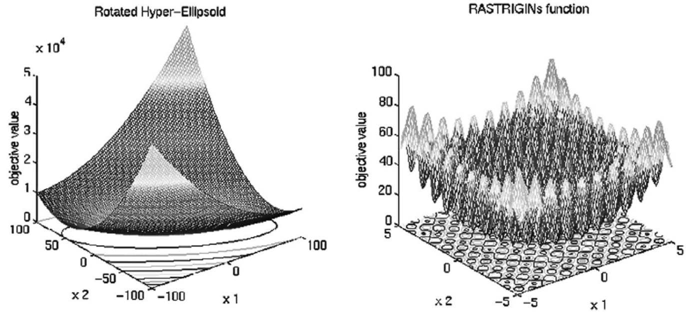

Рисунок 1 – Графики тестовых функций Rotated Hyper-Ellipsoid и Rastrigin's function

$$n = 5 \to f_1(x) = 33.75;$$

$$n = 25 \to f_1(x) = 731.25;$$

$$n = 100 \to f_1(x) = 11362.50;$$

$$n = 500 \to f_1(x) = 281812.50.$$

Результаты и время вычисления интервальной функции $F_1(X)$ в соответствующих математических пакетах приведены в табл. 1 (в скобках указаны значения *Tn*, полученные при выполнении точечных вычислений функции $f_1(1.5)$).

При анализе полученных результатов вычисления функции $F_1(X)$ следует отметить, что результирующие интервалы, поученные пакетами SciLab и Mathematica корректны в равной степени, так как, во-первых, имеют небольшую ширину, и, во-вторых, включают в себя полученные обычным способом значения функции $f_1(x)$. Однако, время, затраченное на вычисления в SciLab в значительной степени больше аналогичного времени вычисления в Mathematica, а при $n = 500$ значение функции $F_1(X)$ пакетом SciLab вообще не было получено, т. к. по истечении 20 минут работа вычислительного ядра была принудительно остановлена.

5

Таблица 1 – Вычисление интервальной функции Rotated Hyper-Ellipsoid

n	Tn, c		Результат $F_1(X)$	
	SciLab	Mathematica	SciLab	Mathematica
5	0.24960 (0.0312002)	$0. \cdot 10^{-8}$ (0.01560)	33.7455001499999696, 33.7545001500000055	{ 33.745500149999955`, 33.75450015000004` }
25	4.1964269 (0.0156001)	0.0156000 ($0. \cdot 10^{-8}$)	731.152503249993288, 731.347503250010959	{ 731.1525032499974`, 731.3475032500027` }
100	64.132011 (0.0624004)	0.0624001 (0.0312001)	11360.9850504974384, 11364.0150505016991	{ 11360.985050499863`, 11364.015050500127` }
500	> 20 мин (0.3900025)	0.7332013 (0.1872003)	—	{ 281774.9262524849`, 281850.07625251607` }

Результаты временных параметров при интервальных и обычных вычислениях функции Rotated Hyper-Ellipsoid представлены на рис. 2.

Результаты интервальных вычислений функции Rastrigin's function

При выполнении вычислений интервальной функции Растригина $F_2(X)$ было также выбрано начальное интервальное значение X = [1.4999, 1.5001]. Как и в предыдущем случае, для проведения анализа точности полученных результатов при интервальных вычислениях, предварительно было произведено точечное вычисление данной функции при значении аргумента $x = 1.5$:

$$n = 5 \to f_2(x) = 111.25;$$

$$n = 25 \to f_2(x) = 556.25;$$

$$n = 100 \to f_2(x) = 2225.00;$$

$$n = 500 \to f_2(x) = 11125.00.$$

Результаты и время вычисления интервальной функции $F_2(X)$ в соответствующих математических пакетах приведены в табл. 2

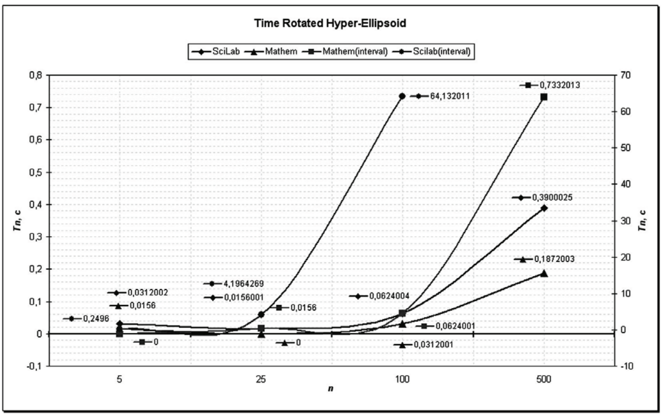

Рисунок 2 – Временные параметры вычисления функции Rotated Hyper-Ellipsoid (в скобках указаны значения *Tn*, полученные при выполнении точечных вычислений функции $f_2(1.5)$).

Полученные результаты вычисления функции $F_2(X)$ аналогичны результатам вычисления функции $F_1(X)$: оба математических пакета получили корректные результирующие интервалы; пакет Mathematica вновь значительно опередил пакет SciLab по времени выполнения интервальных вычислений.

Для наглядной оценки полученных результатов по быстродействию интервальных вычислений, на рис. 3 приведены временные параметры вычислений функции Rastrigin's function обычным и интервальным способами.

Выводы

Опираясь на результаты проведения вычислений интервальных функций $F_1(X)$ и $F_2(X)$, можно утверждать следующее: оба математических пакета являются достаточно точным инструментом для выполнения интервальных вычислений; пакет Mathematica, благодаря своему быстродействию, является идеальной математической системой при проведении интервальных

Таблица 2 – Вычисление интервальной функции Rastrigin's function

n	*Tn, c*		*Результат $F_2(X)$*	
	SciLab	*Mathematica*	*SciLab*	*Mathematica*
5	0.1716011 (0.0312002)	$0. \cdot 10^{-8}$ ($0. \cdot 10^{-8}$)	111.248490180395834, 111.251500050000018	{ 111.24849018039583\`, 111.2515000500000 5\` }
25	0.624 (0.0468003)	$0. \cdot 10^{-8}$ ($0. \cdot 10^{-8}$)	556.242450901977577, 556.257500250001158	{ 556.2424509019785\`, 556.2575002500006\` }
100	2.3244149 (0.0656001)	0.0156000 (0.01560)	2224.96980360790212, 2225.03000100000463	{ 2224.969803607908\`, 2225.0300010000133\` }
500	11.575274 (0.312105)	0.0624002 ($0. \cdot 10^{-8}$)	11124.8490180389672, 11125.1500050002505	{ 11124.849018039376\`, 11125.150005000 2\` }

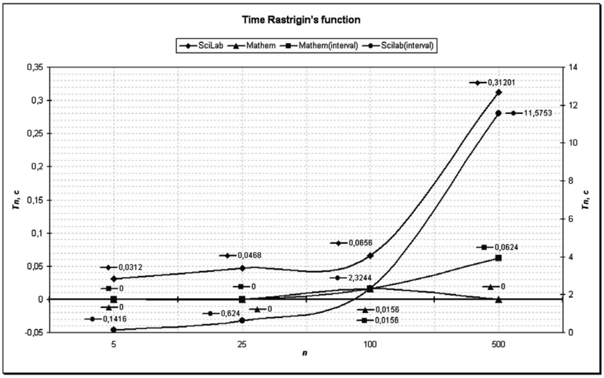

Рисунок 3 – Временные параметры вычисления функции Rastrigin's function

вычислений на персональном компьютере.

5

Литература

[1] Moore R.E. Interval analysis. Eiiglewood Cliffs. N.J.:Prentic-e-llall. 1966.

[2] Wolfram Mathematica home page: http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html.

[3] Scilab official website: http://www.scilab.org.

[4] Долгов Ю.Г. Метод глобальной оптимизации на основе метода ветвей и границ / Ю.Г. Долгов, Интервальная математика и распространение ограничений МКВМ-2004, С. 184-192.