УДК 004.8+519.5

ПРИМЕНЕНИЕ М – НУМЕРАЦИИ К РАСПОЗНАВАНИЮ ГРАФА

Татаринов Е.А.
Институт прикладной математики и механики НАНУ, Донецк

1 Введение

Основной проблемой компьютерной науки является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата, агента и его операционной среды) [1, 2]. Взаимодействие этих систем, зачастую, представляется как процесс перемещения агента по помеченному графу (лабиринту) среды [3]. Целенаправленное перемещение агента в его операционной среде невозможно без формирования достаточно полной модели среды. К моделированию операционных сред определился ряд подходов, одним из которых является топологический [4]. В этом случае агенту недоступна метрическая или алгоритмическая информация о среде и доступна только информация о связях между различными областями среды. Часто такая ситуация возникает в роботике [5]. Топологические модели представляют собой графы с помеченными различными способами вершинами, дугами, инциденторами.

2 Основные определения

В статье под графом G понимается конечный, неориентированный, связный граф без петель и кратных ребер. Пусть $G(V,E)$ - граф, у которого V - множество вершин, мощность $n \geq 1$ и $E \subseteq V^2$ - множество ребер. Здесь V^2 - множество всех двух элементных подмножеств множества V. Мощности соответствующих множеств будем обозначать так $n = |V|$, а $m = |E|$. Если $e = (u,v)$ - ребро графа, то пары $\{u,e\}$, $\{v,e\}$ - называются инциденторами ребра e. При этом говорят, что инцидентор $\{u,e\}$ примыкает к вершине u. Через I_u обозначается множество всех инциденторов примыкающих к u. Будем называть 1 – окрестностью вершины u инциденторы I_u и множество всех вершин смежных с u. Через $\mu(v)$ и $\mu(v,e)$ обозначим цвет вершины v и цвет инцидентора $\{v,e\}$ соответственно. S будем называть вершину, в которой в данный момент находиться агент, а $\delta(S,e)$ - вершину смежную с S через ребро e.

Будем говорить что граф G изоморфен графу G' тогда и только тогда, когда существует сюрьективное отображение $\varphi: V \to V'$, для которого $(v_1,v_2) \in E$ тогда и только тогда когда $(\varphi(v_1),\varphi(v_2)) \in E'$. Нумерацией F вершин графа $G(V,E)$ называется [6] иньективное отображение множества вершин графа V во множество N натуральных чисел, $F: V \to N$. Номером вершины p в нумерации F обозначается $F(p)$. M - нумерацией вершин графа называется [6] нумерация вершин графа, соответствующая порядку их обхода при поиске в глубину. N - нумерацией вершин графа называется [6] нумерация вершин графа, соответствующая порядку их обхода при поиске в ширину. При этом дуги порождающие дерево поиска в глубину, в силу того, что они являются M - путями, обладают следующими свойствами: если (x,y) - древесная дуга, то $M(x) < M(y)$. Элементом графа будем назвать элементарную часть графа, которую агент может выделить (различить) находясь в вершине графа. Примером элементов графа могут быть вершины и инциденторы графа. Простым экспериментальным путем (ПЭП) – последовательность вершин пронумерованная числами. Укладкой ПЭП в граф H будем называть процесс последовательной обработки вершин и объединение вершин с одинаковыми номерами в графе H и текущей обрабатываемой вершины ПЭП, с добавлением соответствующих ребер. Метка – существующий в данный момент способ раскраски либо элемента графа, либо совокупности элементов графа. В каждой конкретной прикладной задаче способ реализации меток обуславливается сенсорными возможностями агента и / или свойствами элементов графа.

Все неопределяемые понятия можно найти в [6].

3 Постановка задачи

Задан граф G неориентированный, конечный, связный без петель и кратных ребер. Вершины и инциденторы которого можно метить специальными красками. Задан агент, который может передвигаться из вершины в вершину по ребру, соединяющему их, воспринимать и анализировать некоторую локальную информацию об 1 – окрестности вершины, в которой он находится. Агент обладает набором средств для изменения меток элементов графа, конечной, но бесконечно наращиваемой памятью, которую он будет записывать в ПЭП, и будет производить его укладку в граф H изоморфный графу G с точностью до меток на элементах графа. Изначально предполагается, что все элементы графа G не помечены. Агент помещается в произвольную вершину графа. Необходимо разработать такой метод обхода графа G и сбора информации о нем, что бы можно было построить ПЭП и уложить его в граф H.

4 Метода распознавания графов при помощи построения на них М – нумерации

Распознавание графа можно условно разбить на два основных этапа: «Обход графа» и «Восстановление графа». На первом этапе происходит разметка графа и сбор локальной информации об его 1 – окрестностях, построение ПЭП. На втором этапе происходит обработка собранной информации и укладка ПЭП в граф H. В этапе «Обход графа» можно выделить два подэтапа : «Разметка графа» и «Сбор информации».

На первом подэтапе «Разметка графа» на графе строится некоторая нумерация, благодаря которой на втором подэтапе собирается информация об 1 – окрестностях вершин графа, и строится ПЭП.

При выполнении этапа «Восстановление графа» происходит считывание ПЭП и его укладка в граф H. Этот процесс можно разбить на два подэтапа: «Чтение ПЭП» и «Укладка ПЭП».

На первом подэтапе происходит считывание из памяти последовательности переходов и отображение их в обозначениях графа H, т.е. отображает обозначений меток элементов графа G в обозначения графа H. После чего эта последовательность переходов укладывается в граф H - «Укладка ПЭП».

Теорема 1. Для распознавания графа необходимо пометить уникальной меткой и посетить все вершины, а затем пройти по всем ребрам исследуемого графа.

Следствие 1.1. Для построения ПЭП необходимо не более чем n различных меток, в силу того, что каждой вершине будет присвоена уникальная метка.

Следствие 1.2. Для построения ПЭП потребуется не меньше, чем m переходов по ребрам графа G, в силу того, что агент должен посетить все ребра графа.

На подэтапе «Разметка графа» агент может использовать уже известные нумерации и методы их построения. Например, N - нумерация и M - нумерация, а так же другие методы нумерации вершин графа уникальными метками.

Подэтап «Сбор информации» будет зависеть от того, какой способ нумерации был выбран на подэтапе «Разметка графа». Поэтому априорное знание метода обхода графа позволит выбрать наиболее эффективную стратегию посещения всех ребер. На подэтапе «Чтение ПЭП» агенту потребуется решать задачу отображения информации о вершинах и ребрах графа G в обозначения графа H. На подэтапе «Укладка ПЭП» происходит обработка отображенной информации и укладка ПЭП, используя обозначения графа H.

Для простоты изложения будем предполагать, что обозначения графа G и графа H совпадают. Т.е. если $\mu(v) = i$, где $v \in G(V)$, то и в графе H вершина соответствующая v будет иметь метку i.

5 Алгоритмы, реализующие распознавания графов при помощи построения M – нумерации

Рассмотрим на конкретных примерах алгоритмы для реализации этапов «Обход графа» и «Восстановление графа».

Агент не сможет воспользоваться стандартными алгоритмами построения N-нумерации в силу специфики постановки задачи. Агент не может за один шаг попасть из одной вершину в другую, если они не смежные, поэтому реализация стандартного алгоритма для агента будет достаточно громоздкой. Но способ для реализации «Сбор информации» будет тот же, что и при использовании M -нумерации. Алгоритм для агента, реализующий построение на графе G N-нумерации очень громоздкий, поэтому будет требовать заведомо больше шагов, чем при использовании M-нумерации. Поэтому он рассматриваться не будет.

Рассмотрим процесс распознавания графа с применением M-нумерации. Общие схемы выполнения этапов «Обход графа» и «Восстановление графа» описаны ниже.

Алгоритм «Обход графа»

Идея: При помощи агента реализовать некоторую нумерацию на вершинах исследуемого графа и организовать обход всех ребер графа.

Вход: граф G с непомеченными вершинами.

Выход: граф G на вершинах, которого нанесена некоторая нумерация и ПЭП.

1. $i := 1$;
2. Находясь в вершине x, можно двигаться в любую другую, ранее не посещенную вершину (если таковая имеется), если она не помечена меткой, одновременно запоминая дугу e по которой мы впервые попали в нее $\mu(x,e) := r$, $\mu(x) := i$; $i := i+1$; добавить в ПЭП переход $M(z) \to M(x)$.

3. Если из вершины x мы не можем попасть в ранее не пройденную вершину или такой вообще нет, то необходимо перейти по всем ребрам $e=(x,v)\in I_x$, у которых $\mu(x,e)=w$ и при этом добавлять в ПЭП переход $M(x)\to M(v)$. После чего возвращаемся в вершину z, из которой впервые попали в вершину x, и продолжаем поиск в глубину из вершины z.

Алгоритм завершается, когда посещены все вершины и ребра графа G.

Алгоритм «Восстановление графа»

Идея: Укладывать ПЭП в граф H, используя M-номера на вершинах ПЭП.

Вход: ПЭП.

Выход: граф H изоморфный графу G, с точностью до меток на элементах графа.

Будем ассоциировать номер вершины графа G, с номером той же вершины в графе H, то есть, если $v\in V(G)$ и $\mu(v)=i$, то в графе H ей будет соответствовать вершина i.

1. c - номер вершины прочитанный из ПЭП. $E(H):=\varnothing$, $V(H):=\varnothing$; $x:=1$.
2. Прочитать в c номер вершины из ПЭП.
3. Если $c\notin V(H)$ то $V(H):=V(H)\cup\{c\}$
4. $E(H):=E(H)\cup\{(c,x)\}$
5. $x:=c$

Алгоритм завершает работу, когда агент прочитает все вершины ПЭП.

Будем предполагать, что за один шаг алгоритма «Обход графа», агент выполняет все или часть следующих действий: переходит по ребру из вершины в вершину; добавляет в ПЭП переход; анализирует метки I_v, где v - текущая вершина. Тогда ег временная сложность равна $2(n-1)+4m$, а длина ПЭП равна $2(n-1)+4m+1$.

Пусть за один шаг алгоритма «Восстановление графа» агент выполняет все или часть следующих действий: читает из ПЭП номер вершины; добавляет вершину и / или ребро в граф H. Тогда его временная сложность равна $2(n-1)+4m+1$.

Теорема 2. ПЭП укладывается в граф H изоморфный графу G с точностью до меток на элементах графа, если ПЭП содержит все вершины и ребра графа G и на момент считывания номера вершины из ПЭП ее метка уникальна для уже построенной части графа H.

Замечание 2.1. В конкретных алгоритмах, реализующих распознавание графов при помощи построения на них M-нумерации, в ПЭП не будут записаны вспомогательные переходы по ребрам графа G.

6 Выводы

Предложен метод распознавания графов при помощи построения нумераций их вершин. Рассмотрены методы распознавания графов при помощи построения на них неявной M-нумерации. Весь процесс разбит на два этапа «Обход графа» и «Восстановление графа». Найдены нижние оценки для выполнения обоих этапов, линейно зависящие от количества ребер в исследуемом графе. Рассмотрены алгоритмы реализующие распознавание графа, при помощи построения на нем неявной M-нумерации. Рассмотрены способы замены явных M-номеров комбинациями меток на элементах исследуемого графа.

Литература

[1] Глушков В.М., Летичевский А.А. Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики. – Новосибирск: Наука, 1973. – с. 5 – 20.

[2] Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М.:

Наука, 1988. – 296 с.
[3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подкозлин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985. – 320 с.
[4] Kuipers B. The spatial semantic hierarchy // Artificial Intelligence. – 2000. – v.119, № 1 – 2. – p. 191 – 233.
[5] Dudek G, Jenkin M. Computational principles of mobile robotics – Cambridge Univ. press, Cambridge, 2000. – 280 p.
[6] Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. графы в программировании, визуализация и применение – СПБ.: Петербург, 2003. – 1104 с.