ПРО ОДИН КЛАС РЕКУРЕНТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Лужецький В.А., Яремчук Ю.Є.
Вінницький державний технічний університет

Luzhetsky V., Yaremchuk Y. About one recurent sequences class. *The given work presents the qualities of recurent sequence class, at calculation of which elements the recurrences with factors connected with the significance of initial elements of sequences are used.*

Вступ

Рекурентні послідовності в загальному вигляді породжуються таким співвідношенням [1]

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k},$$

де a_1, a_2, ... , a_k – коефіцієнти, k – порядок послідовності, виходячи з початкових елементів u_0, u_1, ... , u_k.

Складність обчислення елементів такої послідовності залежить від кількості ненульових коефіцієнтів a_1, a_2, ... , a_k та від порядку k рекурентного співвідношення.

Відомими прикладами вказаної послідовності є послідовність Фібоначі [2] та послідовність Хорадама [3, 4]. В усіх цих послідовностях початкові елементи – довільні числа, які не пов'язані з коефіцієнтами.

Певну цікавість представляють послідовності, в яких початкові елементи пов'язані з коефіцієнтами. Найпростішим прикладом в цьому випадку є послідовність, елементи якої обчислюються за формулою

$$u_n = a_1 u_{n-1}.$$

Якщо $u_1 = q$, $a_1 = q$, то $u_n = q^n$. Тобто, в цьому випадку, рекурентне співвідношення породжує степеневу послідовність.

Наступним за складностю є випадок, коли два коефіцієнти відрізняються від нуля. В цьому випадку елементи послідовності обчислюються за такою формулою

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_k u_{n-k}.$$

В роботі наводяться певні властивості такої рекурентної послідовності.

Рекурентна U_k –послідовність.

Означення 1. Послідовність чисел, що обчислюються за формулою

$$u_{n,k} = g_k u_{n-1,k} + g_1 u_{n-k,k} \qquad (1)$$

при початкових значеннях $u_{0,k} = g_1$, $u_{1,k} = g_2$, $u_{2,k} = g_3$, ... $u_{k-1,k} = g_k$; де g_1, g_2, g_3, ... , g_k – цілі числа; n і k – цілі додатні числа називається U_k *–послідовністю.*

Покажемо перші $2k-1$ елементів послідовності.

$u_{k+2,k}$	$u_{k+1,k}$	$u_{k,k}$	$u_{k-1,k}$	$\cdots$	$u_{1,k}$	$u_{0,k}$
$g_k^4 + g_1^2 g_k^2 + g_1 g_2 g_k + g_1 g_3$	$g_k^3 + g_1^2 g_k + g_1 g_2$	$g_k^2 + g_1^2$	g_k	$\cdots$	g_2	g_1

$\cdots$	$u_{2k-1,k}$	$\cdots$	$u_{k+3,k}$
$\cdots$	$g_k^{k+1} + g_1 g_1 g_k^{k-1} + g_1 g_2 g_k^{k-2} + g_1 g_3 g_k^{k-3} + \ldots + g_1 g_{k-1} g_k^{k-(k-1)} + g_1 g_k$	$\cdots$	$g_k^5 + g_1^2 g_k^3 + g_1 g_2 g_k^2 + g_1 g_3 g_k + g_1 g_4$

Окремим випадком U_k –послідовності є V_k^+–послідовність, елементи якої обчислюються за формулою

$$v_{n,k} = g_k v_{n-1,k} + g_1 v_{n-k,k} \tag{2}$$

при початкових значеннях $v_{0,k} = 1$, $v_{1,k} = g_2$ для $k = 2$; $v_{0,k} = v_{1,k} = \ldots = v_{k-3,k} = 0$, $v_{k-2,k} = 1$, $v_{k-1,k} = g_k$ для $k > 2$.

Формула безпосереднього обчислення елементу $u_{n,k}$ через початкові елементи, яка є більш зручною для досліджень відповідної послідовності, наведена в такій теоремі.

Теорема 1. Для будь-яких цілих додатних n і k, таких що $n \geq k$

$$u_{n,k} = g_k^{n-(k-2)} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} g_k^{n-(k-2)-ki} \cdot g_1^i \Big(\sum_{j=1}^{k-1} C_{n-(k-1)i-j}^{i-1} \cdot g_k^{k-j-1} \cdot g_j + C_{n-(k-1)-(k-1)i}^{i}\Big). \tag{3}$$

Доведення.

Доведення будемо вести індукцією по n.

Покажемо, що (3) виконується для n, які дорівнюють k, $k+1$, $k+2$, $k+3$, ..., $2k-1$.

$$u_{k,k} = g_k^2 + C_0^0 g_1^2 + C_{-1}^0 g_1 g_2 g_k^{-1} + \ldots = g_k^2 + g_1^2,$$

$$u_{k+1,k} = g_k^3 + C_1^0 g_1 g_1 g_k + C_0^0 g_1 g_2 + C_{-1}^0 g_1 g_3 g_k^{-1} + \ldots = g_k^3 + g_1 g_1 g_k + g_1 g_2,$$

$$u_{k+2,k} = g_k^4 + C_2^0 g_1 g_1 g_k^2 + C_1^0 g_1 g_2 g_k + C_0^0 g_1 g_3 + C_{-1}^0 g_1 g_4 g_k^{-1} + \ldots =$$
$$= g_k^4 + g_1 g_1 g_k^2 + g_1 g_2 g_k + g_1 g_3,$$

$$u_{k+3,k} = g_k^5 + C_3^0 g_1 g_1 g_k^3 + C_2^0 g_1 g_2 g_k^2 + C_1^0 g_1 g_3 g_k + C_0^0 g_1 g_4 + C_{-1}^0 g_1 g_5 g_k^{-1} + \ldots =$$
$$= g_k^5 + g_1 g_1 g_k^3 + g_1 g_2 g_k^2 + g_1 g_3 g_k + g_1 g_4,$$

...

$$u_{2k-1,k} = g_k^{k+1} + C_{k-1}^0 g_1 g_1 g_k^{k-1} + C_{k-2}^0 g_1 g_2 g_k^{k-2} + C_{k-3}^0 g_1 g_3 g_k^{k-3} + \ldots +$$
$$+ C_1^0 g_1 g_{k-1} g_k + C_1^1 g_k g_1 =$$
$$= g_k^{k+1} + g_1 g_1 g_k^{k-1} + g_1 g_2 g_k^{k-2} + g_1 g_3 g_k^{k-3} + \ldots + g_1 g_{k-1} g_k + g_1 g_k.$$

Основа індукції, таким чином, доведена.

Нехай співвідношення (3) виконується для $n-k$, $n-k+1$, ..., $n-1$. Покажемо, що воно виконується для n.

$$u_{n,k} = g_k \cdot u_{n-1,k} + g_1 \cdot u_{n-k,k} =$$

$$= g_k^{n-(k-2)} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor} g_k^{n-(k-2)-ki} \cdot g_1^i \cdot \Big(\sum_{j=1}^{k-1} C_{n-1-(k-1)i-j}^{i-1} \cdot g_k^{k-j-1} \cdot g_j + C_{n-1-(k-1)-(k-1)i}^{i}\Big) +$$

$$+ g_k^{n-k-(k-2)} \cdot g_1 + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-k}{k} \right\rfloor} g_k^{n-k-(k-2)-ki} \cdot g_1^{i+1} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{k-1} C_{n-k-(k-1)i-j}^{i-1} \cdot g_k^{k-j-1} \cdot g_j + C_{n-k-(k-1)-(k-1)i}^{i}\Big) =$$

$$= g_k^{n-(k-2)} + C_{n-k-1}^0 g_k^{n-k} g_1^2 + C_{n-k-2}^0 g_k^{n-k-1} g_1 g_2 + C_{n-k-3}^0 g_k^{n-k-2} g_1 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-2k+1}^0 g_k^{n-2k+2} g_1 g_{k-1} + C_{n-2k+1}^1 g_k^{n-2k+2} g_1 +$$
$$+ C_{n-2k}^1 g_k^{n-2k} g_1^3 + C_{n-2k-1}^1 g_k^{n-2k-1} g_1^2 g_2 + C_{n-2k-2}^1 g_k^{n-2k-2} g_1^2 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-3k+2}^1 g_k^{n-3k+2} g_1^2 g_{k-1} + C_{n-3k+2}^2 g_k^{n-3k+2} g_1^2 +$$
$$+ C_{n-3k+1}^2 g_k^{n-3k} g_1^4 + C_{n-3k}^2 g_k^{n-3k-1} g_1^3 g_2 + C_{n-3k-1}^2 g_k^{n-3k-2} g_1^3 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-4k+3}^2 g_k^{n-4k+2} g_1^3 g_{k-1} + C_{n-4k+3}^3 g_k^{n-4k+2} g_1^3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-2k+1}^0 g_k^{n-2k+2} g_1 + C_{n-2k}^0 g_k^{n-2k} g_1^3 + C_{n-2k-1}^0 g_k^{n-2k-1} g_1^2 g_2 + C_{n-2k-2}^0 g_k^{n-2k-2} g_1^2 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-3k+2}^0 g_k^{n-3k+2} g_1^2 g_{k-1} + C_{n-3k+2}^1 g_k^{n-3k+2} g_1^2 +$$
$$+ C_{n-3k+1}^1 g_k^{n-3k} g_1^4 + C_{n-3k}^1 g_k^{n-3k-1} g_1^3 g_2 + C_{n-3k-1}^1 g_k^{n-3k-2} g_1^3 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-4k+3}^1 g_k^{n-4k+2} g_1^3 g_{k-1} + C_{n-4k+3}^2 g_k^{n-4k+2} g_1^3 +$$
$$+ C_{n-4k+2}^2 g_k^{n-4k} g_1^5 + C_{n-4k+1}^2 g_k^{n-4k-1} g_1^4 g_2 + C_{n-4k}^2 g_k^{n-4k-2} g_1^4 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-5k+4}^2 g_k^{n-5k+2} g_1^4 g_{k-1} + C_{n-5k+4}^3 g_k^{n-5k+2} g_1^4 + \ldots$$

Тут доданок $g_k^{n-2k+2} g_1$ добавлений C_{n-2k+1}^0, оскільки для будь-якого m $C_m^0 = 1$.

Відомо [2], що

$$C_n^r + C_n^{r+1} = C_{n+1}^{r+1}. \tag{4}$$

і для будь-яких n та m

$$C_n^0 = C_m^0$$

Враховуючи це та замінюючи доданки попарно з урахуванням (4), отримаємо :

$$u_{n,k} = g_k^{n-(k-2)} + C_{n-k}^0 g_k^{n-k} g_1^2 + C_{n-k-1}^0 g_k^{n-k-1} g_1 g_2 + C_{n-k-2}^0 g_k^{n-k-2} g_1 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-2k+2}^0 g_k^{n-2k+2} g_1 g_{k-1} + C_{n-2k+2}^1 g_k^{n-2k+2} g_1 +$$
$$+ C_{n-2k+1}^1 g_k^{n-2k} g_1^3 + C_{n-2k}^1 g_k^{n-2k-1} g_1^2 g_2 + C_{n-2k-1}^1 g_k^{n-2k-2} g_1^2 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-3k+3}^1 g_k^{n-3k+2} g_1^2 g_{k-1} + C_{n-3k+3}^2 g_k^{n-3k+2} g_1^2 +$$
$$+ C_{n-3k+2}^2 g_k^{n-3k} g_1^4 + C_{n-3k+1}^2 g_k^{n-3k+1} g_1^3 g_2 + C_{n-3k}^2 g_k^{n-3k-2} g_1^3 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-4k+4}^2 g_k^{n-4k+2} g_1^3 g_{k-1} + C_{n-4k+4}^3 g_k^{n-4k+2} g_1^3 + \ldots$$

Представимо тепер формулу (3), розписавши в ній суми.

$$u_{n,k} = g_k^{n-(k-2)} + g_k^{n-(k-2)-k} \cdot g_1 (\sum_{j=1}^{k-1} C_{n-(k-1)-j}^0 \cdot g_k^{k-j-1} \cdot g_j + C_{n-(k-1)-(k-1)}^1) +$$
$$+ g_k^{n-(k-2)-2k} \cdot g_1^2 (\sum_{j=1}^{k-1} C_{n-2(k-1)-j}^1 \cdot g_k^{k-j-1} \cdot g_j + C_{n-(k-1)-2(k-1)}^2) +$$
$$+ g_k^{n-(k-2)-3k} \cdot g_1^3 (\sum_{j=1}^{k-1} C_{n-3(k-1)-j}^2 \cdot g_k^{k-j-1} \cdot g_j + C_{n-(k-1)-3(k-1)}^3) + \ldots =$$
$$= g_k^{n-(k-2)} + C_{n-k}^0 g_k^{n-k} g_1^2 + C_{n-k-1}^0 g_k^{n-k-1} g_1 g_2 + C_{n-k-2}^0 g_k^{n-k-2} g_1 g_3 + \ldots +$$
$$+ C_{n-2k+2}^0 g_k^{n-2k+2} g_1 g_{k-1} + C_{n-2k+2}^1 g_k^{n-2k+2} g_1 +$$
$$+ C_{n-2k+1}^1 g_k^{n-2k} g_1^3 + C_{n-2k}^1 g_k^{n-2k-1} g_1^2 g_2 + C_{n-2k-1}^1 g_k^{n-2k-2} g_1^2 g_3 + \ldots +$$

$$+C_{n-3k+3}^{1}g_k^{n-3k+2}g_1^2g_{k-1}+C_{n-3k+3}^{2}g_k^{n-3k+2}g_1^2+$$
$$+C_{n-3k+2}^{2}g_k^{n-3k}g_1^4+C_{n-3k+1}^{2}g_k^{n-3k+1}g_1^3g_2+C_{n-3k}^{2}g_k^{n-3k-2}g_1^3g_3+\ldots+$$
$$+C_{n-4k+4}^{2}g_k^{n-4k+2}g_1^3g_{k-1}+C_{n-4k+4}^{3}g_k^{n-4k+2}g_1^3+\ldots$$

Порівнюючи цей вираз з попереднім видно, що наше припущення є правильним, оскільки, враховуючи припущення, (3) виконується для n.

Це і вимагалося довести.

Властивість, яка дозволяє обчислювати елемент $u_{n+m,k}$ виходячи з елементів $u_{n,k}$, $u_{n-1,k}$, ... , $u_{n-k+1,k}$ доводиться в такій теоремі.

Теорема 2. Для будь-яких цілих додатних n, m та k

$$u_{n+m,k}=v_{m+(k-2),k}\cdot u_{n,k}+g_1\cdot\sum_{i=1}^{k-1}v_{m+(k-2)-i,k}\cdot u_{n-k+i,k}. \tag{5}$$

Доведення.

Доведення будемо вести індукцією по m.

Покажемо, що (5) виконується для m, які дорівнюють $1, 2, 3, \ldots, k$.

$$u_{n+1,k}=v_{k-1,k}u_{n,k}+g_1v_{k-2,k}u_{n-k+1,k}+g_1v_{k-3,k}u_{n-k+2,k}+\ldots+g_1v_{0,k}u_{n-1,k}$$

Враховуючи значення початкових елементів, отримаємо

$$u_{n+1,k}=g_ku_{n,k}+g_1u_{n-k+1,k}$$

Знайдемо тепер $u_{n+2,k}$.

$$u_{n+2,k}=v_{k,k}u_{n,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-k+1,k}+g_1v_{k-2,k}u_{n-k+2,k}+g_1v_{k-3,k}u_{n-k+3,k}+\ldots+$$
$$+g_1v_{1,k}u_{n-1,k}.$$

З (2) $v_{k,k}=g_kv_{k-1,k}+g_1v_{0,k}=g_kv_{k-1,k}$. Тоді

$$u_{n+2,k}=g_kv_{k-1,k}u_{n,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-k+1,k}+g_1v_{k-2,k}u_{n-k+2,k}=$$
$$=v_{k-1,k}(g_ku_{n,k}+g_1u_{n-k+1,k})+g_1u_{n-k+2,k}=g_ku_{n+1,k}+g_1u_{n-k+2,k}.$$

Роблячи таким же чином, знайдемо $u_{n+3,k}$.

$$u_{n+3,k}=v_{k+1,k}u_{n,k}+g_1v_{k,k}u_{n-k+1,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-k+2,k}+g_1v_{k-2,k}u_{n-k+3,k}+$$
$$+g_1v_{k-3,k}u_{n-k+4,k}+\ldots+g_1v_{2,k}u_{n-1,k}=$$
$$=(g_kv_{k,k}+g_1v_{1,k})u_{n,k}+g_1v_{k,k}u_{n-k+1,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-k+2,k}+g_1u_{n-k+3,k}=$$
$$=v_{k,k}(g_ku_{n,k}+g_1u_{n-k+1,k})+g_1v_{k-1,k}u_{n-k+2,k}+g_1u_{n-k+3,k}=$$
$$=v_{k,k}u_{n+1,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-k+2,k}+g_1u_{n-k+3,k}=$$
$$=(g_kv_{k-1,k}+g_1v_{0,k})u_{n+1,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-k+2,k}+g_1u_{n-k+3,k}=$$
$$=v_{k-1,k}(g_ku_{n+1,k}+g_1u_{n-k+2,k})+g_1u_{n-k+3,k}=$$
$$=g_ku_{n+2,k}+g_1u_{n-k+3,k}$$

. . .

$$u_{n+k,k}=v_{2k-2,k}u_{n,k}+g_1v_{2k-3,k}u_{n-k+1,k}+g_1v_{2k-4,k}u_{n-k+2,k}+g_1v_{2k-5,k}u_{n-k+3,k}+\ldots+$$
$$+g_1v_{k,k}u_{n-2,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-1,k}=$$
$$=(g_kv_{2k-3,k}+g_1v_{k-2,k})u_{n,k}+g_1v_{2k-3,k}u_{n-k+1,k}+g_1v_{2k-4,k}u_{n-k+2,k}+$$
$$+g_1v_{2k-5,k}u_{n-k+3,k}+\ldots+g_1v_{k,k}u_{n-2,k}+g_1v_{k-1,k}u_{n-1,k}=$$

$$= v_{2k-3,k}(g_k u_{n,k} + g_1 u_{n-k+1,k}) + g_1 v_{2k-4,k} u_{n-k+2,k} + g_1 v_{2k-5,k} u_{n-k+3,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 v_{k,k} u_{n-2,k} + g_1 v_{k-1,k} u_{n-1,k} =$$
$$= v_{2k-3,k} u_{n+1,k} + g_1 v_{2k-4,k} u_{n-k+2,k} + g_1 v_{2k-5,k} u_{n-k+3,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 v_{k,k} u_{n-2,k} + g_1 v_{k-1,k} u_{n-1,k} =$$
$$= (g_k v_{2k-4,k} + g_1 v_{k-3,k}) u_{n+1,k} + g_1 v_{2k-4,k} u_{n-k+2,k} + g_1 v_{2k-5,k} u_{n-k+3,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 v_{k,k} u_{n-2,k} + g_1 v_{k-1,k} u_{n-1,k} =$$
$$= v_{2k-4,k}(g_k u_{n+1,k} + g_1 u_{n-k+2,k}) + g_1 v_{2k-5,k} u_{n-k+3,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 v_{k,k} u_{n-2,k} + g_1 v_{k-1,k} u_{n-1,k} =$$
$$= v_{2k-4,k} u_{n+2,k} + g_1 v_{2k-5,k} u_{n-k+3,k} + \ldots + g_{1,k} v_{k,k} u_{n-2,k} + g_1 v_{k-1,k} u_{n-1,k} = \ldots =$$
$$= v_{k-1,k} u_{n+k-1,k} + g_1 v_{k-2,k} u_{n,k} =$$
$$= g_k u_{n+k-1,k} + g_1 u_{n,k}.$$

Нехай співвідношення (5) виконується для $m-k$, $m-k+1$, ... , $m-1$. Покажемо, що воно виконується для m.

$$u_{n+m,k} = g_k u_{n+m-1,k} + g_1 u_{n+m-k,k} =$$
$$= g_k v_{m-1+(k-2),k} u_{n,k} + g_1 g_k \sum_{i=1}^{k-1} v_{m-1+(k-2)-i,k} u_{n-k+i,k} +$$
$$+ g_1 v_{m-k+(k-2),k} u_{n,k} + g_1^2 \sum_{i=1}^{k-1} v_{m-k+(k-2)-i,k} u_{n-k+i,k} =$$
$$= g_k v_{m-1+(k-2),k} u_{n,k} + g_1 g_k v_{m-1+(k-2)-1,k} u_{n-k+1,k} +$$
$$+ g_1 g_k v_{m-1+(k-2)-2,k} u_{n-k+2,k} + \ldots + g_1 g_k v_{m-1+(k-2)-(k-1),k} u_{n-1,k} +$$
$$+ g_1 v_{m-k+(k-2),k} u_{n,k} + g_1^2 v_{m-k+(k-2)-1,k} u_{n-k+1,k} +$$
$$+ g_1^2 v_{m-k+(k-2)-2,k} u_{n-k+2,k} + \ldots + g_1^2 v_{m-k+(k-2)-(k-1),k} u_{n-1,k} =$$
$$= (g_k v_{m-1+(k-2),k} + g_1 v_{m-k+(k-2),k}) u_{n,k} +$$
$$+ g_1 (g_k v_{m-1+(k-2)-1,k} + g_1 v_{m-k+(k-2)-1,k}) u_{n-k+1,k} +$$
$$+ g_1 (g_k v_{m-1+(k-2)-2,k} + g_1 v_{m-k+(k-2)-2,k}) u_{n-k+2,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 (g_k v_{m-1+(k-2)-(k-1),k} + g_1 v_{m-k+(k-2)-(k-1),k}) u_{n-1,k} =$$
$$= v_{m+(k-2),k} u_{n,k} + g_1 v_{m+(k-2)-1,k} u_{n-k+1,k} + g_1 v_{m+(k-2)-2,k} u_{n-k+2,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 v_{m+(k-2)-(k-1),k} u_{n-1,k} =$$
$$= v_{m+(k-2),k} u_{n,k} + g_1 \sum_{i=1}^{k-1} v_{m+(k-2)-i,k} u_{n-k+i,k}.$$

Теорема доведена.

Співвідношення (5) показує, що елементи U_k –послідовності обчислюються через елементи двох послідовностей U_k і V_k^+. Покажемо, що елементи послідовності U_k можуть бути також обчислені тільки на основі елементів V_k^+ – послідовності.

Теорема 3. Для будь-яких цілих додатних n та k, таких що $n \geq k$

$$u_{n,k} = g_k \cdot v_{n-1,k} + g_1 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} g_i \cdot v_{n-i-1,k}. \qquad (6)$$

Доведення.

Доведення будемо вести індукцією по n.

Покажемо, що (6) виконується для n, які дорівнюють k, $k+1$, $k+2$, ..., $2k-1$.

$$u_{k,k} = g_k v_{k-1,k} + g_1 g_1 v_{k-2,k} + g_1 g_2 v_{k-3,k} + \ldots + g_1 g_{k-1} v_{0,k} = g_k^2 + g_1^2.$$

$$u_{k+1,k} = g_k v_{k,k} + g_1 g_1 v_{k-1,k} + g_1 g_2 v_{k-2,k} + g_1 g_3 v_{k-3,k} + \ldots + g_1 g_{k-1} v_{1,k} =$$
$$= g_k v_{k,k} + g_1^2 v_{k-1,k} + g_1 g_2 v_{k-2,k}.$$

З (2) $v_{k,k} = g_k v_{k-1,k} + g_1 v_{0,k} = g_k v_{k-1,k}$. Враховуючи це, а також значення початкових елементів, отримаємо

$$u_{k+1,k} = g_k^3 + g_1^2 g_k + g_1 g_2.$$

Роблячи таким же чином, знайдемо $u_{k+2,k}$.

$$u_{k+2,k} = g_k v_{k+1,k} + g_1 g_1 v_{k,k} + g_1 g_2 v_{k-1,k} + g_1 g_3 v_{k-2,k} + g_1 g_4 v_{k-3,k} + \ldots + g_1 g_{k-1} v_{2,k} =$$

$$= g_k v_{k+1,k} + g_1 g_1 v_{k,k} + g_1 g_2 v_{k-1,k} + g_1 g_3 v_{k-2,k} =$$
$$= g_k (g_k v_{k,k} + g_1 v_{1,k}) + g_1 g_1 v_{k,k} + g_1 g_2 g_k + g_1 g_3 =$$
$$= v_{k,k}(g_k^2 + g_1 g_1) + g_1 g_2 g_k + g_1 g_3 =$$
$$= (g_k v_{k-1,k} + g_1 v_{0,k})(g_k^2 + g_1 g_1) + g_1 g_2 g_k + g_1 g_3 =$$
$$= g_k^2 (g_k^2 + g_1 g_1) + g_1 g_2 g_k + g_1 g_3 =$$
$$= g_k^4 + g_1 g_1 g_k^2 + g_1 g_2 g_k + g_1 g_3$$

...

$$u_{2k-1,k} = g_k v_{2k-2,k} + g_1 g_1 v_{2k-3,k} + g_1 g_2 v_{2k-4,k} + g_1 g_3 v_{2k-5,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 g_{k-2} v_{k,k} + g_1 g_{k-1} v_{k-1,k} =$$
$$= g_k (g_k v_{2k-3,k} + g_1 v_{k-2,k}) + g_1 g_1 v_{2k-3,k} + g_1 g_2 v_{2k-4,k} + g_1 g_3 v_{2k-5,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 g_{k-2} v_{k,k} + g_1 g_{k-1} v_{k-1,k} =$$
$$= (g_k^2 + g_1 g_1) v_{2k-3,k} + g_1 g_2 v_{2k-4,k} + g_1 g_3 v_{2k-5,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 g_{k-2} v_{k,k} + g_1 g_{k-1} v_{k-1,k} + g_1 g_k v_{k-2,k} =$$
$$= (g_k^2 + g_1 g_1)(g_k v_{2k-4,k} + g_1 v_{k-3,k}) + g_1 g_2 v_{2k-4,k} + g_1 g_3 v_{2k-5,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 g_{k-2} v_{k,k} + g_1 g_{k-1} v_{k-1,k} + g_1 g_k v_{k-2,k} =$$
$$= (g_k^3 + g_1 g_1 g_k + g_1 g_2) v_{2k-4,k} + g_1 g_3 v_{2k-5,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 g_{k-2} v_{k,k} + g_1 g_{k-1} v_{k-1,k} + g_1 g_k v_{k-2,k} = \ldots =$$
$$= g_k^{k+1} + g_1 g_1 g_k^{k-1} + g_1 g_2 g_k^{k-2} + g_1 g_3 g_k^{k-3} + \ldots + g_1 g_{k-2} g_k^2 + g_1 g_{k-1} g_k + g_1 g_k.$$

Нехай співвідношення (6) виконується для $n-k$, $n-k+1$, ..., $n-1$. Покажемо, що воно виконується для n.

$$u_{n,k} = g_k u_{n-1,k} + g_1 u_{n-k,k} = g_k^2 v_{n-2,k} + g_1 g_k \sum_{i=1}^{k-1} g_i v_{n-i-2,k} +$$

$$+g_1 g_k v_{n-k-1,k}+g_1^2\sum_{i=1}^{k-1}g_i v_{n-k-i-1,k}=$$

$$=g_k^2 v_{n-2,k}+g_1 g_k g_1 v_{n-3,k}+g_1 g_k g_2 v_{n-4,k}+\ldots+$$

$$+g_1 g_k g_{k-2} v_{n-k,k}+g_1 g_k g_{k-1} v_{n-k-1,k}+$$

$$+g_1 g_k v_{n-k+1,k}+g_1^2 g_1 v_{n-k-2,k}+g_1^2 g_2 v_{n-k-3,k}+\ldots+$$

$$+g_1^2 g_{k-2} v_{n-2k+1,k}+g_1^2 g_{k-1} v_{n-2k,k}=$$

$$=g_k(g_k v_{n-2,k}+g_1 v_{n-k-1,k})+g_1 g_1(g_k v_{n-3,k}+g_1 v_{n-k-2,k})+$$

$$+g_1 g_2(g_k v_{n-4,k}+g_1 v_{n-k-3,k})+\ldots+$$

$$+g_1 g_{k-2}(g_k v_{n-k,k}+g_1 v_{n-2k+1,k})+g_1 g_{k-1}(g_k v_{n-k-1,k}+g_1 v_{n-2k,k})=$$

$$=g_k v_{n-1,k}+g_1 g_1 v_{n-2,k}+g_1 g_2 v_{n-3,k}+\ldots+g_1 g_{k-2} v_{n-k+1,k}+g_1 g_{k-1} v_{n-k,k}=$$

$$=g_k v_{n-1,k}+g_1\sum_{i=1}^{k-1}g_i v_{n-i-1,k}.$$

Це і вимагалося довести.

Виходячи з формули (1) вираз для обчислення елементів для спадних n, починаючи з деякого $n=l$, має такий вигляд

$$u_{n,k}=\frac{u_{n+k,k}-g_k u_{n+k-1,k}}{g_1}. \tag{7}$$

Запишемо аналогічну формулу для елементів V_k^+ –послідовності.

$$v_{n,k}=\frac{v_{n+k,k}-g_k\cdot v_{n+k-1,k}}{g_1}. \tag{8}$$

Теорема 4. Для будь-яких цілих додатних n та m таких, що $1<m<n$

$$u_{n-m,2}=(-1)^m\cdot g_1^{-(m-1)}\cdot(v_{m-2,2}\cdot u_{n,2}-v_{m-1,2}\cdot u_{n-1,2}). \tag{9}$$

Доведення.

Доведення будемо вести індукцією по m.

Покажемо, що (9) виконується для $m=2$ і $m=3$.

$$u_{n-2,2}=g_1^{-1}\cdot(v_{0,2}u_{n,2}-v_{1,2}u_{n-1,2})=g_1^{-1}\cdot(u_{n,2}-g_2 u_{n-1,2}).$$

$$u_{n-3,2}=-g_1^{-2}\cdot(v_{1,2}u_{n,2}-v_{2,2}u_{n-1,2})=-g_1^{-2}\cdot(g_2 u_{n,2}-(g_2^2+g_1)\cdot u_{n-1,2})=$$

$$=g_1^{-2}\cdot(-g_2 u_{n,2}+g_2^2 u_{n-1,2}+g_1 u_{n-1,2})=-\frac{g_2}{g_1}\cdot\frac{u_{n,2}-g_2 u_{n-1,2}}{g_1}+\frac{u_{n-1,2}}{g_1}=$$

$$=\frac{u_{n-1,2}-g_2 u_{n-2,2}}{g_1}.$$

Нехай співвідношення (9) виконується для $m+1$, $m+2$. Покажемо, що воно виконується для m.

Згідно формули (1)

$$u_{n-m,2}=g_2 u_{n-m-1,2}+g_1 u_{n-m-2,2}=g_2 u_{n-(m+1),2}+g_1 u_{n-(m+2),2}=$$

$$=(-1)^{m+1}g_1^{-m}g_2(v_{m-1,2}u_{n,2}-v_{m,2}u_{n-1,2})+$$

$$+(-1)^{m+2}g_1^{-m}(v_{m,2}u_{n,2}-v_{m+1,2}u_{n-1,2})=$$

$$= (-1)^m g_1^{-m}(-g_2 v_{m-1,2}u_{n,2} + g_2 v_{m,2}u_{n-1,2} + v_{m,2}u_{n,2} - v_{m+1,2}u_{n-1,2}) =$$
$$= (-1)^m g_1^{m-1}\cdot\left(\frac{v_{m,2} - g_2 v_{m-1,2}}{g_1}u_{n,2} - \frac{v_{m+1,2} - g_2 v_{m,2}}{g_1}u_{n-1,2}\right).$$

Враховуючи формулу (7), отримаємо

$$u_{n-m,2} = (-1)^m g_1^{-(m-1)}\cdot(v_{m-2,2}u_{n,2} - v_{m-1,2}u_{n-1,2}).$$

Теорема доведена.

Введемо в розгляд V_k^- –послідовність, елементи якої обчислюються за формулою (8) для n – від'ємних при початкових значеннях $v_{-1,k} = 0$, $v_{-2,k} = g_1^{-1}$ для $k = 2$; $v_{-1,k} = 0$, $v_{-2,k} = g_1^{-1}$, $v_{-3,k} = v_{-4,k} = ... = v_{-k,k} = 0$ для $k > 2$.

Властивість (9) встановлює зв'язок між елементами послідовності U_k і V_k^+, але це є окремий випадок при $k = 2$. Для будь-яких k послідовності U_k притаманна така властивість.

Теорема 5. Для будь-яких цілих додатних n і m, таких що $1 \le m < n$ та будь-якого цілого додатного k

$$u_{n-m,k} = v_{-m+(k-2),k}\cdot u_{n,k} + g_1\cdot\sum_{i=1}^{k-1} v_{-m+(k-2)-i,k}\cdot u_{n-k+i,k}. \qquad (10)$$

Доведення.

Доведення будемо вести індукцією по m.

Покажемо, що (10) виконується для m, які дорівнюють 1, 2 , 3, . . . , k.

$$u_{n-1,k} = v_{k-3,k}u_{n,k} + g_1 v_{k-4,k}u_{n-k+1,k} + ... + g_1 v_{-1,k}u_{n-2,k} + g_1 v_{-2,k}u_{n-1,k}.$$

Враховуючи значення початкових елементів, отримаємо

$$u_{n-1,k} = g_1 g_1^{-1}u_{n-1,k} = u_{n-1,k}.$$

Знайдемо тепер $u_{n-2,k}$

$$u_{n-2,k} = v_{k-4,k}u_{n,k} + g_1 v_{k-5,k}u_{n-k+1,k} + ... +$$
$$+ g_1 v_{-1,k}u_{n-3,k} + g_1 v_{-2,k}u_{n-2,k} + g_1 v_{-3,k}u_{n-1,k} = g_1 v_{-2,k}u_{n-2,k} = u_{n-2,k}$$

. . .

$$u_{n-k,k} = v_{-2,k}u_{n,k} + g_1 v_{-3,k}u_{n-k+1,k} + ... + g_1 v_{-k,k}u_{n-2,k} + g_1 v_{-k-1,k}u_{n-1,k} =$$
$$= v_{-2,k}u_{n,k} + g_1 v_{-k-1,k}u_{n-1,k} = g_1^{-1}u_{n,k} + g_1(-g_k g_1^{-2})u_{n-1,k} =$$
$$= \frac{u_{n,k} - g_k u_{n-1,k}}{g_1} = u_{n-k,k}.$$

Нехай співвідношення (10) виконується для $m+1$, $m+2$, ... , $m+k$. Покажемо, що воно виконується для m.

$$u_{n-m,k} = g_k u_{n-m-1,k} + g_1 u_{n-m-k,k} =$$
$$= g_k v_{-m-1+(k-2),k}u_{n,k} + g_1 g_k\sum_{i=1}^{k-1} v_{-m-1+(k-2)-i,k}u_{n-k+i,k} +$$
$$+ g_1 v_{-m-k+(k-2),k}u_{n,k} + g_1^2\sum_{i=1}^{k-1} v_{-m-k+(k-2)-i,k}u_{n-k+i,k} =$$

$$= g_k v_{-m-1+(k-2),k} u_{n,k} + g_1 g_k v_{-m-1+(k-2)-1,k} u_{n-k+1,k} +$$
$$+ g_1 g_k v_{-m-1+(k-2)-2,k} u_{n-k+2,k} + \ldots + g_1 g_k v_{-m-1+(k-2)-(k-1),k} u_{n-1,k} +$$
$$+ g_1 v_{-m-k+(k-2),k} u_{n,k} + g_1^2 v_{-m-k+(k-2)-1,k} u_{n-k+1,k} +$$
$$+ g_1^2 v_{-m-k+(k-2)-1,k} u_{n-k+1,k} + \ldots + g_1^2 v_{-m-k-1,k} u_{n-1,k} =$$
$$= (g_k v_{-m-1+(k-2),k} + g_1 v_{-m-k+(k-2),k}) u_{n,k} +$$
$$+ g_1 (g_k v_{-m-1+(k-2)-1,k} + g_1 v_{-m-k+(k-2)-1,k}) u_{n-k+1,k} +$$
$$+ g_1 (g_k v_{-m-1+(k-2)-2,k} + g_1 v_{-m-k+(k-2)-2,k}) u_{n-k+2,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 (g_k v_{-m-1+(k-2)-(k-1),k} + g_1 v_{-m-k+(k-2)-(k-1),k}) u_{n-1,k} =$$
$$= v_{-m+(k-2),k} u_{n,k} + g_1 v_{-m+(k-2)-1,k} u_{n-k+1,k} + g_1 v_{-m+(k-2)-2,k} u_{n-k+2,k} + \ldots +$$
$$+ g_1 v_{-m+(k-2)-(k-1),k} u_{n-1,k} =$$
$$= v_{-m+(k-2),k} u_{n,k} + g_1 \sum_{i=1}^{k-1} v_{-m+(k-2)-i,k} u_{n-k+i,k}.$$

Теорема доведена.

Висновки

1. Запропоновано клас рекурентних U_k –послідовностей, при обчисленні елементів яких використовуються рекурентні співвідношення з коефіцієнтами, що пов'язані з початковими елементами послідовностей і забезпечується мінімальна складність обчислення елементу.

2. Отримано формулу для безпосереднього обчислення елементів, яка показує, що елементи послідовності є поліномом початкових елементів.

3. Вирази (5), (6), (9), (10) дозволяють обчислити певний елемент послідовності виходячи з деяких елементів, не використовуючи послідовності рекурентних обчислень, що значно прискорює процес обчислень.

Література

1. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. – М.: Наука, 1975. – 48 с.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1992. – 192 с.
3. Horadam A.F. A generalized Fibonacci Sequence // Amer. Math. Monthly. – 1961. – Vol.68. – P.455–459.
4. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра: Пер. с англ. – М.: Мир. – 1976. – 400 с.