

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И КОНТРОЛЯ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЛОЧНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ СХЕМАМИ

Фельдман Л.П.

Донецкий национальный технический университет

E-mail: feldman@r5.dgtu.donetsk.ua

Фельдман Л.П. Методи оцінки та контролю похибки вирішення задачі Коши для звичайних дифференційних рівнянь блоковими різничними схемами Стаття містить узагальнення результатів досліджень [1,2,3,5], присвячених паралельним методам чисельного вирішення задачі Коши для системи звичайних дифференційних рівнянь та є продовженням раніше надрукованих робіт [6,7,8,9,10]. У ній приводиться доведення збіжності наближеного рішення для m -крокових k -точечних блокових методів, узагальнюючи раніше надруковані результати.

Введение

Одним из главных вопросов, возникающих при численном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений, является проблема оценки погрешности приближенного решения. Априорная оценка глобальной погрешности разностного метода позволяет судить о сходимости приближенного решения задачи к точному и, следовательно, о его применимости. Оценка локальной погрешности, получаемая на каждом шаге вычислений, позволяет автоматически выбирать шаг интегрирования, обеспечивающего заданную точность приближенного решения.

Статья содержит обобщение результатов исследований [1,2,3,5], посвященных параллельным методам численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и является продолжением ранее опубликованных работ [6,7,8,9,10]. В ней приводится доказательство сходимости приближенного решения для m -шаговых k -точечных блочных методов, что представляет обобщение ранее опубликованных результатов. В [7] приведено доказательство сходимости для одношаговых k -точечных, а в [9] – для многошаговых многоточечных

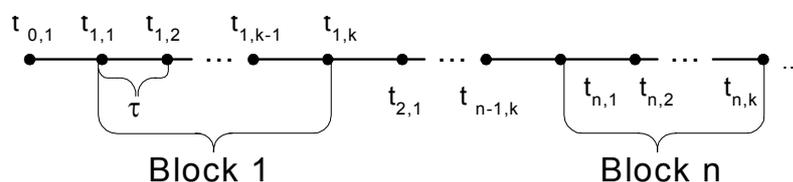
методов при $k=m$. Рассмотрены также и методы оценки локальной погрешности решения блочными разностными схемами и даны практические рекомендации их использования для более широкого набора параллельных разностных схем.

1. Параллельные вычислительные схемы блочных методов

Для упрощения изложения рассмотрим вначале решение задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

блочными методами. По аналогии с последовательными методами численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений различают два типа параллельных методов: одношаговый блочный метод и многошаговый блочный метод. Также как и в последовательных методах, одношаговые блочные методы позволяют получить решение, используя начальные условия задачи. Для начала решения многошаговым блочным методом необходимо найти, каким –либо одношаговым методом значения в соответствующем числе точек начального отрезка. При использовании вычислительной схемы параллельного одношагового блочного метода множество точек равномерной сетки с шагом τ , т.е. $\Omega_\tau = \{t_l = l\tau, l = 0, 1, 2, \dots\}$, разобьем на N блоков, содержащих k точек каждый (рис 1). В каждом блоке введем номер точки $i = \overline{1, k}$ и обозначим через $t_{n,i} = t_{0,1} + [(n-1)k + i]\tau$ точку n блока с номером i , а множество k точек $t_{n,i}$ принадлежащих блоку, через $T_n^{(k)}$, т.е. $t_{n,i} \in T_n^{(k)}, i = \overline{1, k}, n = 1, 2, \dots$ Начальную точку $t_{0,1}$ включим в Блок 0. При численном решении задачи Коши одношаговым блочным методом для каждого следующего блока новые k значений приближенного решения вычисляются одновременно с использованием значения только в



последней точке предшествующего блока.

Рис. 1. Схема разбиения на блоки для одношагового k -точечного метода

Обозначим через $u_{n,i}$ – приближенное значение решения задачи Коши (1) в точке $t_{n,i}$ – обрабатываемого блока. Тогда для одношаговых блочных методов разностные уравнения имеют вид:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + i\tau \left[b_1 f_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} f_{n,j} \right], \quad i = \overline{1, k}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $f_{n,j} = f(t_n + j\tau, u_{n,j})$, шаблон которых приведен на рис. 2.

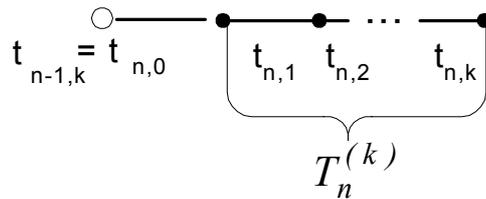
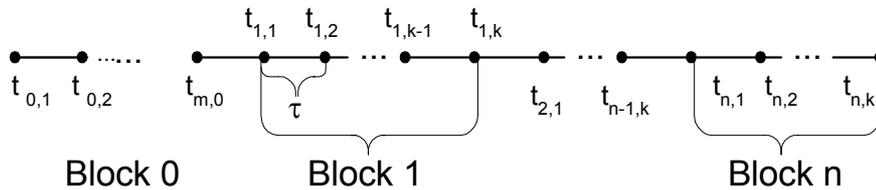


Рис.2. Шаблон одношаговой k -точечной разностной схемы

В случае многошагового блочного метода начальный блок будет содержать точки сетки, в которых заданы начальные значения приближенного решения необходимые для продолжения расчета (рис



3).

Рис. 3. Схема разбиения на блоки для m -шагового k -точечного метода

В общем случае уравнения многошаговых разностных методов для блока из k точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах, с учетом введенных выше обозначений можно записать в виде:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + i\tau \left[\sum_{j=1}^m b_{i,j} f_{n,j-m} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} f_{n,j} \right], \quad i = \overline{1, k}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Формулы (3) определяют m -шаговый k -точечный разностный метод, шаблон которого приведен на рис. 4. В нем множество точек

$$T_n^{(k)} = \{t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,k}\},$$

в которых по формулам (3) определяются приближенные значения решения. Множество $T_{n-1}^{(m)} = \{t_{n,1-m}, t_{n,2-m}, \dots, t_{n,0}\}$, содержит точки,

приближенное значение решения в которых, было вычислено на предыдущем этапе.

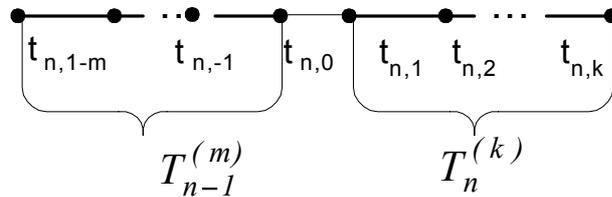


Рис.4. Шаблон m -шаговой k -точечной разностной схемы

Определить коэффициенты a_{ij} и b_{ij} формул (2) и (3) можно интегро-интерполяционным методом. Построим интерполяционный многочлен $L_{m+k-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующим им значениям правой части уравнения (1) $f_{n,j-m} = f(t_{n,j-m}, u_{n,j-m})$, $j = \overline{1, m+k}$. Проинтегрировав его в пределах $(t_{n,0}, t_{n,i})$, $i = \overline{1, k}$

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,i}} L_{m+k-1}(t) dt,$$

получим уравнения (3) для выбранных m и k .

Например, для получения формул трехшагового двухточечного метода, необходимо построить интерполяционный многочлен $L_5(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующих им $f_{n,j-m}$, $m = 3, k = 2, j = \overline{1-m, k}$ и проинтегрировать в соответствующих пределах. В результате получим следующие формулы

$$u_{n,1} = \frac{1}{720} t^6 f_{n,-2} - 74 f_{n,-1} + 456 f_{n,0} + 346 f_{n,1} - 19 f_{n,2} f_{n,0}$$

$$u_{n,2} = -\frac{1}{90} t^6 f_{n,-2} - 4 f_{n,-1} - 24 f_{n,0} - 124 f_{n,1} - 29 f_{n,2} f_{n,0}$$

Формулы для трехшагового двухточечного метода определяют значения приближенного решения неявно, Решение приведенной выше нелинейной системы (3) начинается со значения $n = 1$, при этом необходимо заранее каким-либо иным одношаговым методом вычислить значения u_{01} и u_{02} (см. рис. 3).

2. Погрешность аппроксимации блочных методов

Выражения для невязок m -шагового k -точечного разностного метода (2) на решении $x(t)$ исходного дифференциального уравнения имеют вид

$$r_{n,i} = -\frac{x_{n,i} - x_{n,0}}{i\tau} + \sum_{j=1}^m b_{i,j} x'_{n,j-m} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} x'_{n,j}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (4)$$

где

$$x_{n,i} = x(t_n + i\tau), x_{n-1,m} = x_{n,0}, x'_{n,i} = x'(t_n + i\tau) = f(t_n + i\tau, x_{n,i}), x'_{n-1,m} = x'_{n,0}$$

Разлагая $x(t_n + i\tau)$ и $x'(t_n \pm j\tau)$ в ряды Тейлора в окрестности точки t_n , получим

$$\frac{x_{n,i} - x_{n,0}}{i\tau} = \sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{l!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad i = \overline{1, k},$$

$$x'_{n-1,j} = \sum_{l=1}^p \frac{((j-m)\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad j = \overline{1, m},$$

$$x'_{n,j} = \sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad j = \overline{1, k},$$

Подставляя эти разложения в выражение (4) для невязки, будем иметь

$$r_{n,i} = -\sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{l!} x^{(l)}_{n,0} + \sum_{j=1}^m b_{i,j} \sum_{l=1}^p \frac{((j-m)\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} x'_{n,j} \sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad i = \overline{1, k}. \quad (5)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми производными и изменим порядок суммирования в последнем выражении, тогда получим

$$r_{n,i} = \left(\sum_{j=1}^m b_{i,j} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} - 1 \right) x'_{n,0} + \sum_{l=2}^p \frac{\tau^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} \times \left(\sum_{j=1}^m b_{i,j} (j-m)^{l-1} + \sum_{j=1}^k j^{l-1} a_{i,j} - \frac{i^{l-1}}{l} \right) + O(\tau^p), \quad i = \overline{1, k}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что погрешность аппроксимации имеет порядок p , если выполнены условия

$$\sum_{j=1}^m b_{i,j} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} = 1, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{m-l} b_{i,j} (j-m)^{l-1} + \sum_{j=1}^k j^{l-1} a_{i,j} = \frac{i^{l-1}}{l}, \quad i = \overline{1, k}, l = \overline{2, k+m}.$$

Система уравнений (7) для каждого фиксированного i содержит p уравнений и $k+m$ неизвестных $a_{i,j}$, $j = \overline{1,k}$ и $b_{i,j}$, $i, j = \overline{1,m}$. Положим, чтобы $p = k + m$, тогда из системы (7) при фиксированном i можно будет определить неизвестные коэффициенты $b_{i,j}$, $j = \overline{1,m}$ и $a_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Поступая аналогично для каждого $i = \overline{1,k}$, определим все неизвестные коэффициенты $b_{i,j}$, $j = \overline{1,m}$ и $a_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, k$, которые в дальнейшем будем считать элементами матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} соответственно. Отсюда следует, что наивысший порядок аппроксимации m -шагового k -точечного блочного метода равен $m + k$. Его погрешность в соответствии с (6) определяется формулой

$$r_{n,i} = \left(\frac{\tau^{k+m}}{(k+1)!} x_{n,0}^{(m+k+1)} \left[\sum_{j=1}^k j^{k+m} a_{i,j} + \sum_{j=1}^{k-1} b_{i,j} (j-m)^{k+m} - \frac{i^{k+m}}{2k+1} \right] + O(\tau^{m+k+1}) \right), i = \overline{1,k}. \quad (8)$$

Элементы $b_{i,j}, a_{i,j}$, матриц \mathbf{B} и \mathbf{A} можно найти, решая систему (7) для любых заданных k и m .

3. Сходимость и оценка погрешности многошаговых блочных методов

Обозначим через: $U_n^{(k)} = \{u_{n,i}, i = 1, 2, \dots, k\}$ – вектор значений приближенного решения в точках блока $T_n^{(k)}$;

$F_n^{(k)} = \{f(t_{n,i}, u_{n,i}), i = \overline{1,k}\}$ – вектор, компонента которого равна значению правой части уравнения (1) в точке блока $T_n^{(k)}$ для соответствующего значения приближенного решения;

$U_{n-1}^{(m)} = \{u_{n,j-m}, j = 1, 2, \dots, m\}$ – вектор значений приближенного решения в точках блока $T_{n-1}^{(m)}$;

$F_{n-1}^{(m)} = \{f(t_{n,j-m}, u_{n,j-m}), j = \overline{1,m}\}$ – вектор, компонента $j = \overline{1,m}$ которого равна значению правой части уравнения (1) в соответствующей точке блока

$T_{n-1}^{(m)}$ для соответствующего ей значению приближенного решения (см. рис. 4).

Запишем систему (2) в векторной форме

$$\mathbf{D}^{-1}(U_n^{(k)} - u_{n,0}\mathbf{e}) / \tau = \mathbf{B} F_{n-1}^{(m)} + \mathbf{A} F_n^{(k)}, \quad (9)$$

где $\mathbf{D} = (d_{ii})$ – диагональная матрица с элементами $d_{ii} = i, i = 1, 2, \dots, k$, \mathbf{B} – матрица с элементами $b_{ij}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m}$, \mathbf{A} – матрица с элементами $a_{ij}, i, j = \overline{1, k}$, \mathbf{e} – единичный вектор-столбец.

Обозначим через $X_n^{(k)} = \{x_{n,i} | i = \overline{1, k}\}$ – вектор значений точного решения задачи (1) в точках $t_{n,i}$ блока $T_n^{(k)}$, через $\Phi_n^{(k)} = \{f(t_{n,i}, x_{n,i}) | i = \overline{1, k}\}$ и $\Phi_{n-1}^{(m)} = \{f(t_{n,j-m}, x_{j-m}) | j = \overline{1, m}\}$ – вектора значений правой части уравнения (1) в точках $t_{n,i}$ и $t_{n,j-m}$ и для соответствующих им значениям $x_{n,i}$ и $x_{n,j-m}$ точного решения в этих точках. Получим уравнение, для определения вектора

$$Z_n^{(k)} = U_n^{(k)} - X_n^{(k)} \quad (10)$$

погрешностей в блоке $T_n^{(k)}$. Подставим (10) в левую часть уравнения (9), добавим к правой части и вычтем из нее выражение $\mathbf{B}\Phi_{n-1}^{(m)} + \mathbf{A}\Phi_n^{(k)}$. Тогда уравнение для погрешности примет вид

$$\mathbf{D}^{-1}(Z_n^{(k)} - z_{n,0}\mathbf{e}) / \tau = -\mathbf{D}^{-1}(X_n^{(k)} - x_{n,0}\mathbf{e}) / \tau + \mathbf{B}\Phi_{n-1}^{(m)} + \mathbf{A}\Phi_n^{(k)} + \mathbf{B}(F_{n-1}^{(m)} - \Phi_{n-1}^{(m)}) + \mathbf{A}(F_n^{(k)} - \Phi_n^{(k)}).$$

Входящее в правую часть выражение

$$\mathbf{r}_n = -\mathbf{D}^{-1}(X_n^{(k)} - x_{n,0}\mathbf{e}) / \tau + \mathbf{B}\Phi_{n-1}^{(m)} + \mathbf{A}\Phi_n^{(k)} \quad (11)$$

представляет собой вектор невязок разностных уравнений (9) на точном решении уравнения (1). Поскольку разностные уравнения (9) аппроксимируют исходное уравнение (1) в точках блока с порядком $O(\tau^{k+m})$, то имеет место оценка

$$\|\mathbf{r}_n\| = O(\tau^{k+m}). \quad (12)$$

Оставшиеся члены правой части уравнения для погрешности обозначим через

$$\rho_n = \mathbf{B}(F_{n-1}^{(m)} - \Phi_{n-1}^{(m)}) + \mathbf{A}(F_n^{(k)} - \Phi_n^{(k)}) \quad (13)$$

Тогда уравнение для погрешности запишется короче

$$Z_n^{(k)} = z_{n,0}\mathbf{e} + \tau\mathbf{D}(\mathbf{r}_n + \rho_n). \quad (14)$$

Вектор-функция ρ_n зависит нелинейно от погрешности $Z_n^{(k)}$. Вид этой зависимости определяется функцией $f(t, x)$. В дальнейшем будем предполагать, что $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, т.е.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad (15)$$

для всех t, x_1, x_2 из рассматриваемой области. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа для соответствующих компонент $F_n^{(k)}$ и $\Phi_n^{(k)}$ имеем

$$f(t_{n,i}, u_{n,i}) - f(t_{n,i}, x_{n,i}) = l_{n,i} z_{n,i}, \quad i = \overline{1, k},$$

аналогично для соответствующих компонент $F_{n-1}^{(m)}$ и $\Phi_{n-1}^{(m)}$, где

$$f(t_{n,i-m}, u_{n,i-m}) - f(t_{n,i-m}, x_{n,i-m}) = l_{n,i-m} z_{n,i-m}, \quad i = \overline{1, m}$$

$$l_{n,i} = f_x(t_{n,i}, x_{n,i} + \theta z_{n,i}), \quad 0 < \theta < 1, \quad i = \overline{1, k},$$

$$l_{n,i-m} = f_x(t_{n,i-m}, x_{n,i-m} + \eta z_{n,i-m}), \quad 0 < \eta < 1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Подставляя последние в (13), получим

$$\rho_n = \mathbf{B}\mathbf{D}^{(m)} Z_{n-1}^{(m)} + \mathbf{A}\mathbf{D}^{(k)} Z_n^{(k)},$$

где $\mathbf{D}^{(m)}$ – диагональная матрица с элементами $d_{i,i}^{(m)} = l_{n,i-m}$, $i = \overline{1, m}$ и $\mathbf{D}^{(k)}$

– диагональная матрица с элементами $d_{i,i}^{(k)} = l_{n,i}$, $i = \overline{1, k}$

Для норм матриц в силу (15) справедливы следующие оценки

$$\|\mathbf{D}^{(m)}\| \leq L, \quad \|\mathbf{D}^{(k)}\| \leq L. \quad (16)$$

Заменим ρ_n в уравнении (14) полученным для него выражением, запишем его в виде

$$Z_n^{(k)} = z_{n,0} e + \tau \mathbf{D} r_n + \tau \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{D}^{(m)} Z_{n-1}^{(m)} + \tau \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{D}^{(k)} Z_n^{(k)}.$$

Введем нормы $\|Z_n^{(k)}\| = \max_{1 \leq i \leq k} |z_{n,i}|$ и $\|Z_{n-1}^{(m)}\| = \max_{1 \leq i \leq m} |z_{n,i-m}|$. Далее,

учитывая (12) и (16) получим неравенство

$$\|Z_n^{(k)}\| \leq \mathbf{C}\tau^{k+m+1} + (1 + k\tau L \|\mathbf{B}\|) \|Z_{n-1}^{(m)}\| + \tau k L \|\mathbf{A}\| \|Z_n^{(k)}\|,$$

которое преобразуем к виду

$$(1 - \tau k L \|\mathbf{A}\|) \|Z_n^{(k)}\| \leq \mathbf{C}\tau^{k+m+1} + (1 + k\tau L \|\mathbf{B}\|) \|Z_{n-1}^{(m)}\|$$

Если на τ наложить ограничение

$$\tau < \tau_0 = \frac{1}{kL \|\mathbf{A}\|}, \quad (17)$$

то оценка, связывающая нормы погрешностей в точках соседних блоков $T_n^{(k)}$ и $T_{n-1}^{(m)}$, примет вид

$$\|Z_n^{(k)}\| \leq \{ \mathbf{C}\tau^{k+m+1} + (1 + kL\tau \|\mathbf{B}\|) \|Z_{n-1}^{(m)}\| \} / (1 - \tau k L \|\mathbf{A}\|), \quad (18)$$

т.к. в силу условия (17) имеет место $(1 - \tau k L \|\mathbf{A}\|) > 0$.

Рассмотрим следующие два случая:

1. Пусть $m \leq k$. В этом случае $T_{n-1}^{(m)} \subseteq T_{n-1}^{(k)}$ (см. рис. 5),

следовательно

$\|Z_{n-1}^{(m)}\| \leq \|Z_{n-1}^{(k)}\|$, и неравенство (18), учитывая последнюю оценку, примет

вид

$$\|Z_n^{(k)}\| \leq \{ \mathbf{C}\tau^{k+m+1} + (1 + kL\tau \|\mathbf{B}\|) \|Z_{n-1}^{(k)}\| \} / (1 - \tau k L \|\mathbf{A}\|)$$

Подставляя последовательно в последнее неравенство выражения погрешностей для блоков $n-1, n-2, \dots, 1$, получим

$$\|Z_n^{(k)}\| \leq \left\{ C\tau^{k+m+l} \left[1 + \frac{1+k\tau L \|B\|}{1-\tau kL \|A\|} + \left(\frac{1+k\tau L \|B\|}{1-\tau kL \|A\|} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1+k\tau L \|B\|}{1-\tau kL \|A\|} \right)^{n-1} \right] + \left(\frac{1+k\tau L \|B\|}{1-\tau kL \|A\|} \right)^n \|Z_0^{(m)}\| \right\} / (1-\tau kL \|A\|),$$

где $\|Z_0^{(m)}\| = \text{Max}_{1 \leq i \leq m} |z_{0,i}|$ – норма погрешности приближенного решения, полученного каким-либо способом на начальном участке интегрирования для первых m узлов. Упростим последнее выражение

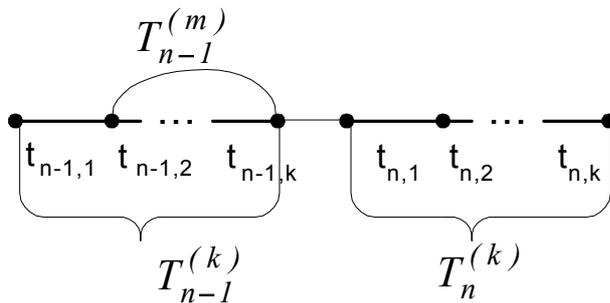


Рис. 6. Схема блоков m -шагового k -точечного метода для $m < k$

$$\begin{aligned} \|Z_n^{(k)}\| &\leq C\tau^{k+m} \frac{\left(\frac{1+k\tau L \|B\|}{1-\tau kL \|A\|} \right)^n - 1}{kL(\|B\| + \|A\|)} + \left(\frac{1+k\tau L \|B\|}{1-\tau kL \|A\|} \right)^n \|Z_0^{(m)}\| \\ &\leq C\tau^{k+m} \frac{e^{\tau k n L (\|B\| + \|A\|)} - 1}{kL(\|B\| + \|A\|)} + \frac{e^{\tau k n L (\|B\| + \|A\|)}}{1-\tau kL \|A\|} \|Z_0^{(m)}\| \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо для любого $0 < n \leq N$; из этого следует:

$$\|Z_n^{(k)}\| \leq C\tau^{k+m} \frac{e^{kTL(\|B\| + \|A\|)}}{kL(\|B\| + \|A\|)} + \frac{e^{kTL(\|B\| + \|A\|)}}{1-\tau kL \|A\|} \|Z_0^{(m)}\|. \quad (19)$$

2. Пусть $m > k$. В этом случае $T_{n-1}^{(m)} \subset \{T_{n-1}^{(k)} \cup T_{n-2}^{(m)}\}$ (см. рис. 6), следовательно

$$\|Z_{n-1}^{(m)}\| \leq \text{Max} \{ \|Z_{n-1}^{(k)}\|, \|Z_{n-2}^{(m)}\| \}. \quad (20)$$

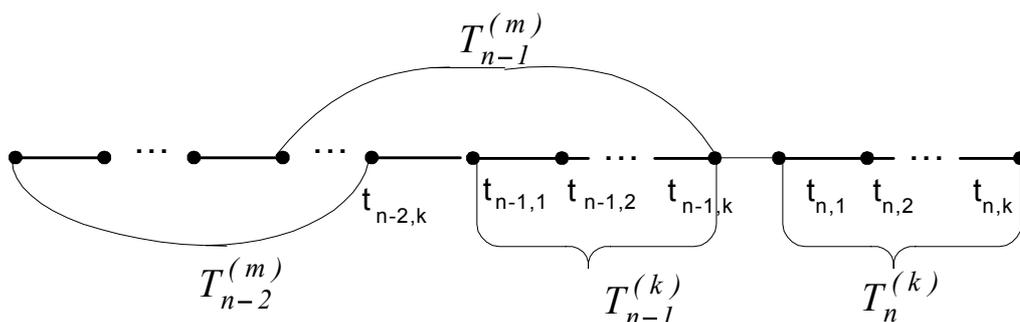


Рис. 6. Схема блоков m -шагового k -точечного метода для $m > k$

Запишем неравенство (18) для $\|Z_{n-1}^{(k)}\|$

$$\|Z_{n-1}^{(k)}\| \leq \{C\tau^{k+m+1} + (1 + kL\tau\|B\|)\|Z_{n-2}^{(m)}\|\} / (1 - \tau kL\|A\|),$$

и подставим в (20)

$$\|Z_{n-1}^{(m)}\| \leq \text{Max}\{[C\tau^{k+m+1} + (1 + kL\tau\|B\|)\|Z_{n-2}^{(m)}\|] / (1 - \tau kL\|A\|), \|Z_{n-2}^{(m)}\|\}$$

Поскольку $0 < 1 - \tau kL\|A\| < 1$, то

$$\|Z_{n-1}^{(m)}\| \leq [C\tau^{k+m+1} + (1 + kL\tau\|B\|)\|Z_{n-2}^{(m)}\|] / (1 - \tau kL\|A\|). \quad (21)$$

Подставляя последовательно в (18) выражения (21) погрешностей $\|Z_{n-1}^{(m)}\|$ для блоков $n-1, n-2, \dots, 1$, получим так же, как и для случая 1, оценку (19)

Таким образом, если правая часть уравнения (1) $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу с константой L и r_n – невязка m -шагового k -точечного блочного метода (2), определенная согласно (11) с оценкой (12), то при

$$\tau < \tau_0 = \frac{1}{kL\|A\|} \text{ и } \tau kn \leq T$$

для погрешности метода имеет место оценка (19).

Следствие. Если разностное уравнение (2) аппроксимирует исходное уравнение (1) и $\|Z_0\| = \theta$, то решение разностной задачи (2) сходится при $\tau \rightarrow 0$ к решению исходной задачи (1), причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации (12).

4. Алгоритм решения разностных уравнений многошаговым блочным методом

Итерационные формулы параллельного решения системы разностных уравнений многошагового многоточечного метода (2) для произвольного блока n получим, используя (9):

$$u_n^{s+1} = u_n e + \tau DB v'_{n-1} + \tau DA (u'_n)^s, \quad s = \overline{1, k}, \quad (22)$$

где s – номер итерации. По формуле (22) пересчитываются компоненты вектора приближенного решения u_n^{s+1} , принадлежащие блоку n . При этом компоненты вектора $v'_{n-1,i} = F_{n-1,i} = f(t_{n-1,i}, u_{n-1,i}), i = \overline{1, m}$, определенные в узлах предшествующего блока, сохраняют свои значения при этих вычислениях, а компоненты вектора $(u'_n)^s = (F_{n,i})^s = f(t_{n,i}, (u_{n,i})^s), i = \overline{1, k}$ вычисляются вновь на каждой итерации. Чтобы начать решение m -шаговым разностным методом, необходимо определить каким-либо одношаговым разностным методом значения приближенного решения $u_{0,i}$ в первых $m-1$ точках, примыкающих к начальной точке t_0 отрезка интегрирования. Таким образом будут определены значения компонент $v'_{0,i} = F_{0,i} = f(t_{0,i}, u_{0,i}), i = \overline{1, m}$ вектора v'_0 . Теперь следует задать исходное приближение для компонент $u_{1,i}^0, i = \overline{1, k}$ вектора u_1^0 , значения которых могут быть, например, найдены по m -шаговым формулам Адамса-Башфорта. В общем случае m -шаговые формулы Адамса-Башфорта для значений приближенного решения в узлах k -точечного блока на первой итерации в векторной форме могут быть записаны в виде

$$u_n^1 = u_n e + \tau B_1 v'_{n-1}. \quad (23)$$

Можно показать, что выполнение k шагов вычислений по формуле (22) обеспечит получение приближенного решения с локальной ошибкой порядка $O(\tau^{m+k+1})$.

Приведем результаты решения следующей задачи Коши

$$x' = -10(t-1)x, \quad x(0) = 1, \quad (24)$$

трехшаговым четырехточечным методом с шагом $\tau = 0.017$

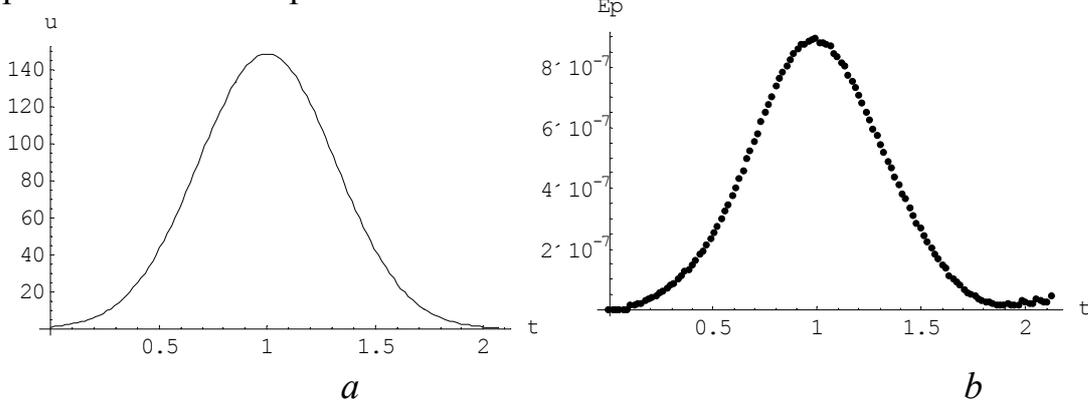


Рис 7. Графики приближенного решения уравнения (24) трехшаговым четырехточечным методом a и глобальной погрешности b .

Поскольку точное решение задачи Коши известно, то сможем найти глобальную погрешность в каждой точке.

5. Методы с контролем на шаге

Для оценки локальной погрешности при решении одношаговым многоточечным методом используем следующий подход. Решаются две задачи на одной сетке с одним и тем же шагом τ .

первая – одношаговым k -точечным методом;

вторая – одношаговым $(k+1)$ -точечным методом.

Второе решение необходимо для оценки локальной погрешности, поэтому основным является k -точечный метод. Используются значения приближенных решений в совпадающих k узлах основного блока. Лишняя $k+1$ точка является начальным приближением в расчетах решения в следующем блоке. Локальная погрешность приближенного решения одношаговым k -точечным методом в i -ом узле блока определяется формулой

$$u_{n,i}^{(k)} - x(t_{n,i}) \approx \varphi^{(k+2)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{k+2}, \quad i = \overline{1, k}$$

и для $(k+1)$ -точечного метода локальная погрешность в том же узле определяется формулой

$$u_{n,i}^{(k+1)} - x(t_{n,i}) \approx \varphi^{(k+3)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{k+3}, \quad i = \varepsilon_{n,i}^{(s)}.$$

Вычитая из верхнего соотношения нижнее, получим представление главного члена погрешности k -точечного метода на шаге в виде

$$A \tag{25}$$

который может быть использован для оценки локальной погрешности.

Для иллюстрации приведем оценки локальной ошибки, полученные по результатам решения задачи (24) с шагом $\tau = 0.017$, одношаговыми трехточечным (основное решение) и четырехшаговым методами (корректирующее решение). Оценка модуля пошаговой погрешности, полученная как разность решений одношаговыми трех- и четырехточечным блочными методами, и действительная локальная погрешности отличаются на величину порядка τ^5 , что обеспечивает надежность используемой оценки.

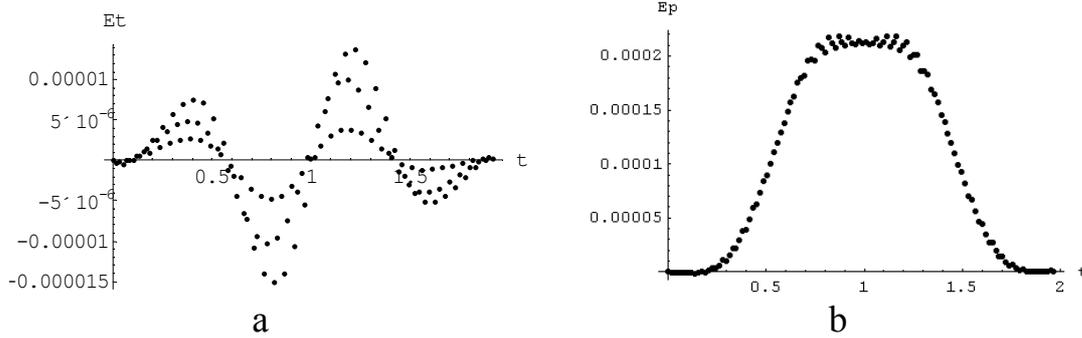


Рис.8. Графики а- оценки локальной погрешности Et и б- глобальной погрешности Ep при решении задачи (24) одношаговым трехточечным методом

Из сравнения графиков, представленных на рис. 8, следует, что оценка локальной погрешности приближенного решения уравнения (24) трехшаговым четырехточечным методом меньше (в 15 раз) соответствующей накопленной погрешности. Это полностью согласуется с теоретическими оценками.

Для оценки локальной погрешности при решении многошаговым многоточечным методом используется аналогичный подход. Решаются две задачи на одной сетке с одним и тем же шагом τ . первая – m -шаговым k -точечным методом; вторая – $(m+1)$ -шаговым k -точечным методом. Второе решение используется для оценки локальной погрешности, поэтому основным является m -шаговый k -точечный метод. Оцениваются значения приближенных решений в совпадающих k узлах основного блока. Локальная погрешность приближенного решения m -шаговым k -точечным методом в i -ом узле блока определяется формулой

$$\gamma_{n,i} = u_{n,i}^{(k,m)} - x(t_{n,i}) \approx \varphi_i^{(k+m+1)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{k+m+1}, i = \overline{1, k}, \quad (26)$$

а для $(m+1)$ -шагового k -точечного метода локальная погрешность в том же узле определяется формулой

$$u_{n,i}^{(k,m+1)} - x(t_{n,i}) \approx \varphi_i^{(k+m+2)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{k+m+2}, i = \overline{1, k}. \quad (27)$$

Вычитая из (26) соотношение (27), получим представление главного члена погрешности одношагового k -точечного метода на шаге в виде

$$u_{n,i}^{(k,m)} - u_{n,i}^{(k,m+1)} \approx \varphi_i^{(k+m+1)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{k+m+1}, i = \overline{1, k}.$$

Таким образом, для главного члена погрешности получаем оценку

$$\gamma_{n,i} \approx u_{n,i}^{(k,m)} - u_{n,i}^{(k,m+1)}, i = \overline{1, k}. \quad (28)$$

Приведем оценку локальной погрешности γ приближенного решения двухшаговым четырехточечным методом как разность соответствующих значений решений, полученных двухшаговым и трехшаговым четырехточечными методами.

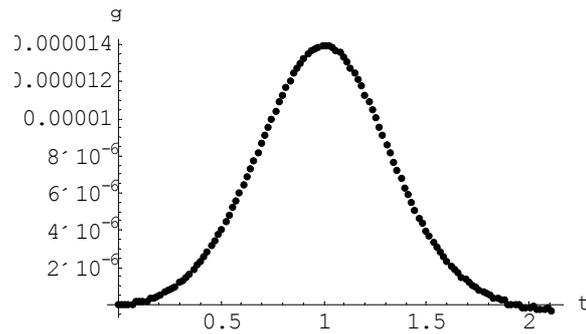


Рис. 9. График оценки локальной погрешности при решении уравнения (24) двухшаговым четырехточечным методом.

В рассматриваемом случае оценка локальной погрешности приближенного решения двухшаговым четырехточечным методом практически совпадает со значениями накопленной погрешности. Таким образом, получается завышенная оценка локальной погрешности. Это можно объяснить тем, что решение трехшаговым четырехточечным методом с машинной точностью совпадает с точным решением задачи (24).

6. Заключение. Оценка эффективности блочных алгоритмов

При численном решении задачи Коши для сравнительной характеристики методов можно рассматривать различные показатели. В случае произвольной правой части уравнения о трудоемкости метода естественно судить по числу обращений для вычисления значений правой части уравнения на каждый узел сетки. Для оценки эффективности одношаговых блочных методов найдем отношение времени выполнения алгоритма Рунге-Кутты на однопроцессорной ЭВМ ко времени выполнения одношагового блочного алгоритма соответствующего порядка на параллельной ВС. Определим время выполнения алгоритма Рунге-Кутты $k+1$ порядка точности на одном процессоре. Обозначим через t_f – время вычисления значения функции $f(t,x)$, t_{ad} , t_{mul} – время выполнения операции сложения и умножения соответственно. Время последовательного вычисления приближенных значений решения с точностью $O(\tau^{k+1})$ во всех k узлах блока составит

$$T_s = (k + 1)^2 t_f + k^2 (t_{ad} + t_{mul}).$$

Для параллельного выполнения вычислений по формулам (3) закрепим за каждым узлом блока процессор. При его реализации на k процессорах можно одновременно вычислять значения $F_{n,i,s}$, а затем также одновременно получить по формулам (3) значения $u_{n,i,s}$ для каждого фиксированного s . Объединим процессоры в кольцо, чтобы

иметь возможность одновременной передачи данных соседним процессорам. Обозначим через t_{ia} – время передачи числа соседнему процессору. Время параллельного вычисления приближенных значений решения с той же точностью для всех узлов блока составит

$$T_p = kt_f + k^2(t_{ad} + t_{mu}) + k(k-1)t_{ia}.$$

Ускорение параллельного одношагового k -точечного алгоритма можно будет теперь вычислить по формуле

$$W(k) = T_s / T_p.$$

Если учитывать только время вычислений правой части уравнения, т.к. времена выполнения арифметических операций и обмена значительно меньше времени вычисления правой части, то ускорение k -точечного параллельного алгоритма можно считать приближенно равным

$$W(k)_{pot} = (k + 1)^2 / k.$$

Для оценки ускорения m -шагового k -точечного блочного метода сравним время его выполнения на мультипроцессорной системе со временем выполнения алгоритма m -шагового метода Адамса-Башфорта на однопроцессорной ЭВМ. Метод Адамса-Башфорта можно рассматривать как многошаговый одноточечный блочный метод. Последовательное k -кратное применение формул Адамса-Башфорта позволяет вычислить приближенное решение в тех же k узлах блока, в которых параллельно за k итераций может быть вычислено решение m -шаговым k -точечным блочным методом. В этом случае время вычисления будет приблизительно одинаково. Точность приближенного решения, полученного m -шаговым k -точечным блочным методом, имеет порядок $O(\tau^{m+k})$, а точность приближенного решения, полученного по m шаговой формуле Адамса-Башфорта, имеет порядок $O(\tau^{m+1})$. Поэтому для получения решения с одинаковой точностью для метода Адамса-Башфорта надо выбрать шаг сетки

мельче в $\frac{1}{\tau^k}$ раз, чем шаг для m -шагового k -точечного метода. Здесь M – число узлов сетки на отрезке решения задачи методом Адамса-Башфорта.

Таким образом, ускорение параллельного m -шагового k -точечного алгоритма равно

$$W(m, k) \approx M^{\frac{k-1}{m+k}}.$$

Аналогично могут быть получены оценки эффективности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений параллельными блочными методами. Так, например, для наиболее употребительной формулы Адамса-Башфорта с $m = 4$ получим

$$W(4,4) \approx M^{\frac{3}{8}}.$$

Если на отрезке интегрирования взято сто узлов $M = 100$, то $W(4,4) = 5.62$.

Литература

1. Worland P.V. Parallel method for the numerical solution of ordinary differential equations. IEEE Trans. Comp. C-2, 10 (1976) 1045-8.
2. Дж. Холл, Дж. Уатт. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. - 312с. 3. Системы параллельной обработки. Под ред. Ивенса Д. – М.: Мир, 1985. – 416с
3. Самарский А.А. Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука. 1989
4. Молчанов И.Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений. АН УССР, Инст. Кибернетики им.В.М. Глушкова. Киев: Наукова думка. 1990, -128с
5. Фельдман Л.П. Параллельные интерполяционные алгоритмы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD компьютере. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем, выпуск 10:- Донецк: ДонГТУ, 1999, с. 20-25.
6. Фельдман Л.П. Сходимость и оценка погрешности параллельных одношаговых блочных методов моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Информатика, Кибернетика та обчислювальна техніка, выпуск 15:- Донецк: -ДонГТУ, 2000, с. 34-39.
7. L.P. Feldmann Implementierung und Effizienzanalyse von parallelen blockartigen Simulationsalgorithmen für dynamische Systeme mit konzentrierten Parametern. In: Möller, D.P.F. (Hrsg.): Tagungsband 14. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Hamburg, September 2000, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium 2000, S. 241-246.
8. Фельдман Л.П., Дмитриева .О.А. Разработка и обоснование параллельных блочных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD– структурах. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем, выпуск 29:- Донецк: ДонГТУ, 2001, с. 70-79.
9. L.P. Feldman, O.A. Dmitrieva, S. Gerber. Abbildung der blockartigen Algorithmen auf Parallelrechnerarchitekture. In:

Tavangarian,D., Grützner,R. (Hrsg.): Tagungs-band 15. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Rostock, September 2002, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium 2002, S.359-364.

Поступила в редакцию 11 января 2004 года