

УДК 622.834.1

ГАВРИЛЕНКО Ю.М., ПЕТРУШИН О.Г. (Донецький національний технічний університет)

## ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗРУШЕННЯ МАСИВУ ГІРСЬКИХ ПОРІД І ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ У ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ

*У статті розглянуті основні етапи розробки просторової математичної моделі процесу зрушення земної поверхні і гірських порід при підземній розробці пологих вугільних шарів методом скінченних елементів. Обґрунтовано вибір моделі середовища, деформаційних характеристик основних структурних елементів масиву, методу рішення матриці жорсткості системи і виконаний порівняльний аналіз даних моделювання з даними натурних маркшейдерських спостережень, що показав задовільну збіжність результатів.*

**Вступ.** Нормативні методи розрахунку зрушень і деформацій земної поверхні й гірських порід [1,2], дозволяють прогнозувати їхні величини й характер розподілу в межах всієї мульди зрушення на підставі даних головних перетинів, припускаючи, що очисна виробітка має прямокутну форму й орієнтована паралельно елементам залягання вугільного пласта. У реальних умовах ці вимоги виконуються дуже рідко. Разом з тим, зрушення й деформації земної поверхні при підземній розробці вугілля є інтегральною характеристикою всіх процесів, що відбуваються у масиві гірських порід, якій підроблюється, що спричиняє серйозні відмінності в їхньому характері й величинах навіть при однаковій глибині й формі очисної виробітки, але при різних фізико-механічних властивостях вміщуючих порід. Особливості розподілу зрушень і деформацій при неправильній формі виробітки в літературі представлені незначно. Особливо складними й викликаючими великий інтерес для вивчення є процеси деформування в умовах порушеного залягання (розривні тектонічні порушення, складки). Це обумовлює необхідність детальних досліджень для різних гірничо-геологічних умов всієї зони впливу лави.

На сучасному етапі розвитку теорії зрушення масиву гірських порід і земної поверхні найбільш перспективним методом вивчення процесу зрушення є математичне моделювання. Враховуючи бурхливий розвиток комп'ютерної техніки і інформаційних технологій, воно стає усе більше ефективним і дозволяє вирішити найбільш складні задачі теорії й практики зрушення земної поверхні. Методи математичного моделювання дозволяють за короткий час проаналізувати велику кількість варіантів можливих гірничо-геологічних умов відпрацьовування вугільних шарів і виявити основні якісні й кількісні закономірності. Одним з найпоширеніших методів моделювання є метод скінченних елементів (МСЕ). Основна концепція МСЕ [7, 8, 9,10] полягає у тому, що шукану безперервну величину (переміщення точок тіла, що деформується) апроксимують шматковим набором найпростіших функцій. За допомогою такої процедури інтегрування диференціальних рівнянь аналітичної постановки задачі зводиться до вирішення системи лінійних рівнянь [9, 10]. Кількісні значення невідомої величини відшуковуються в обмеженому числі вузлів області. У межах елементів значення невідомої функції і її похідних визначаються вже апроксимуючими функціями і їхніми похідними. Для просторового моделювання МСЕ застосовувався дуже рідко, в основному для рішення невеликих задач. Це обумовлено складністю зберігання й рішення великих систем рівнянь. Однак розвиток комп'ютерної техніки останнім часом дозволяє перебороти цю пробле-

му.

Незважаючи на те, що при моделюванні різних завдань механіки гірських порід, основний підхід і математичний апарат МСЕ не змінюється, при рішенні задач теорії зрушення існує ряд особливостей, обумовлених специфікою досліджуваних об'єктів. Дана робота має своєю метою розглянути основні етапи й особливості розробки моделі МСЕ при дослідженні й аналізі зрушень і деформацій земної поверхні у просторовій постановці.

**Основні особливості застосування МСЕ.** Основною відмінністю задач теорії зрушення є необхідність опису всього масиву гірських порід від вугільного шару до денної поверхні, що вбирає до себе всю зону впливу очисної виробітки. При цьому повинні бути виділені основні структурні елементи, що мають різні деформаційні характеристики: зона наносів і мезозойських відкладень, основний масив, вугільний шар, вироблений простір і зону порушених порід. Ці вимоги спричиняють ряд проблем, головні з яких можуть бути сформульовані в наступному:

- вибір моделі середовищ і співвідношення деформаційних характеристик основних структурних елементів масиву, що вміщує вугільний пласт;
- зберігання й рішення великої системи лінійних рівнянь;
- опис розрахункової схеми й уведення її в комп'ютер;
- опис форми виробленого простору і її просторової орієнтації;
- моделювання процесу видобутку вугілля;
- інтерпретація й аналіз отриманих даних.

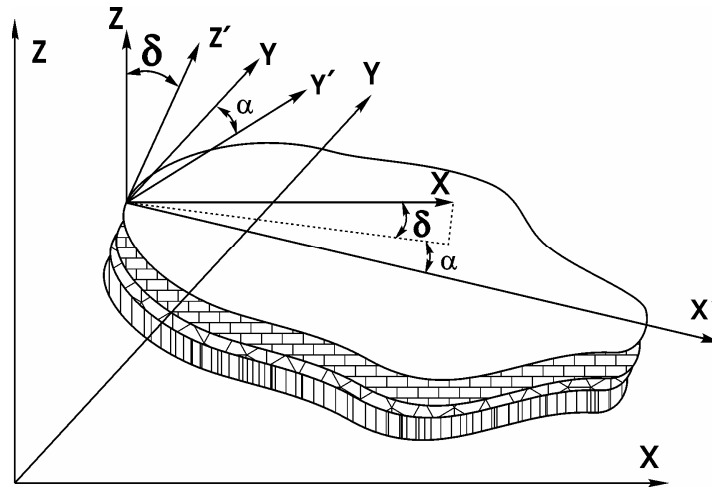
**Моделі середовищ.** Ступінь наближення результатів моделювання при рішенні завдань гірничої геомеханіки й зрушення гірських порід до реального характеру деформування залежить, насамперед, від правильності уяви про процеси, що відбуваються у вуглепородному масиві. У зв'язку із цим, особливу увагу варто приділити вибору моделі середовища, що описує деформаційні характеристики основних структурних елементів області дослідження.

Масив гірських порід більшості вугільних родовищ приблизно на 80% представлений шарами потужністю близько 2 м. Шаруватість масиву, що вміщує вугільний пласт, викликає неоднорідність властивостей порід і їх здатність до розшаровування по найменш міцних контактах.

Шари можна розглядати як пружні тіла й характеризувати їхніми пружними характеристиками: модулем Юнга  $E$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ , що дозволяє моделювати процес зрушення шляхом вирішення пружної задачі. Найпоширенішими варіантами моделей середовища є: ізотропне середовище; шарувате анізотропне середовище, що складається з окремих пружних шарів і трансверсально-ізотропне середовище.

Особливим шаром вуглепородного масиву, що в істотній мірі впливає на деформації земної поверхні, є наноси. Їх можна розглядати як глинисті породи, що допускають більш значні в порівнянні з породами карбону розтягуючі напруження і консолідацію в зоні стискаючих напружень. З огляду на досвід маркшейдерських спостережень за зрушеннями земної поверхні й те, що кути зрушення в наносах однакові по будь-якому напрямку, для опису зони наносів доцільно використати ізотропне середовище.

Найбільш повною є шарувата модель. Кожний шар характеризується своїм модулем пружності  $E_i$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu_i$  і потужністю  $m_i$ . У зв'язку з більшою кількістю шарів у реальному масиві, відсутністю повної й надійної інформації про його структуру й деформаційні характеристики дана модель може бути використана тільки в окремих випадках.



Мал. 1. Трансверсально-ізотропна модель середовища

Для опису масиву, що вміщує вугільний пласт, доцільно використати трансверсально-ізотропну модель (мал. 1). Таке середовище припускає систему паралельних тріщин або слабких прошарків, розташованих на однаковій відстані друг від друга, яку можна розглядати як середню потужність шарів. Тріщини нахилені до обрїю під середнім кутом падіння шарів  $\delta$  і мають нормальні й дотичні жорсткості  $K_n$  і  $K_s$ . Порода між тріщинами вважається ізотропною й лінійно-пружною. Напрямок осей анізотропії є постійним для всього масиву й збігається з напрямком простягання й падіння шарів. Таке середовище моделюється наступними параметрами: модулем пружності  $E_1$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu_1$  у напрямку шаруватості й модулем пружності  $E_2$ , модулем зсуву  $G_2$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu_2$  у напрямку перпендикулярному нашаруванню.

Дослідження, виконані в роботах [4,5], показали, що дане середовище, з модулем зсуву в перпендикулярному нашаруванню напрямку рівним 5%÷15% від модуля зсуву ізотропного масиву, дає найбільші збіги зрушень і деформацій земної поверхні за результатами моделювання з фактичними даними натурних спостережень.

Коефіцієнт Пуассона масиву гірських порід, як правило, невідомий, але тому що його величина несуттєво позначається на результатах аналітичних розрахунків [19], то він може прийматися в межах 0.2÷0.3. Згідно даних роботи [5] вплив модуля пружності  $E_2$  незначний й для спрощення розрахунків доцільно приймати  $E_1=E_2$  і  $\nu_1 = \nu_2$ . Деформаційні характеристики вугільного шару також не роблять істотного впливу на величини й характер розподілу зрушень і деформацій і можуть бути прийняті рівними іншому масиву.

Породи карбону масиву найчастіше представлені різними алевролітами, аргілітами, піщаниками й вапняками [20]. Розмаїтість гірських порід у відношенні їхніх механічних властивостей значно перевищує чисельність найменувань їх літотипів. Оскільки навіть для одного різновиду гірських порід її властивості можуть істотно змінюватися в межах того самого родовища й шахтного поля, то дані різних каталогів і табличних зведень варто розглядати як попередній і оцінний матеріал. Таким чином, ми не маємо всю повноту інформації й не маємо можливості провести точний облік фактичних деформаційних характеристик різних шарів. Разом з тим, для одержання якісної й досить близької до кількісної картини зрушення в умовах математичного моделювання досить визначити середній порядок значень для якихось середніх умов підробітку.

За даними робіт [19, 20, 21] модуль пружності основних породних шарів Донбасу перебуває в межах від  $1 \cdot 10^9$  до  $0.8 \cdot 10^{11}$  Па. У роботах [5,6] при моделюванні процесу зрушення для опису масиву гірських порід використовувалася трансверсально-

ізотропна модель середовища з модулем Юнга  $E = 1 \cdot 10^9 \div 1 \cdot 10^{10}$  Па, при цьому середня глибина очисних робіт становила приблизно 500  $\div$  600 метрів. Для шару наносів можна прийняти модуль Юнга  $E = 1 \cdot 10^6$  Па й коефіцієнт поперечних деформацій  $\nu = 0.4$ .

Важливим аспектом при моделюванні зрушень земної поверхні є представлення зони тектонічного порушення в масиві. Різними дослідниками були запропоновані наступні шляхи рішення:

- площини ковзання в гірському масиві імітуються стрижневими елементами типу хитних опор [16].

- зруйновані контакти типу дзеркал ковзання рекомендується моделювати в розрахункових схемах введенням у них тонких прошарків товщиною до 0.01 м [15]. При наявності напружень розтягання в напрямку, перпендикулярному нашаруванню по контакту можливе відшарування, тоді елементам прошарків задаються малі значення модуля пружності й коефіцієнт Пуассона, що дорівнює нулю. При стиску контакту можливе проковзування одного шару щодо іншого. У цьому випадку рекомендується задавати матеріалам прошарок зі спеціальними пружними характеристиками, що обчислюються.

- введенням у розрахункові схеми спеціальних контакт-елементів [17].

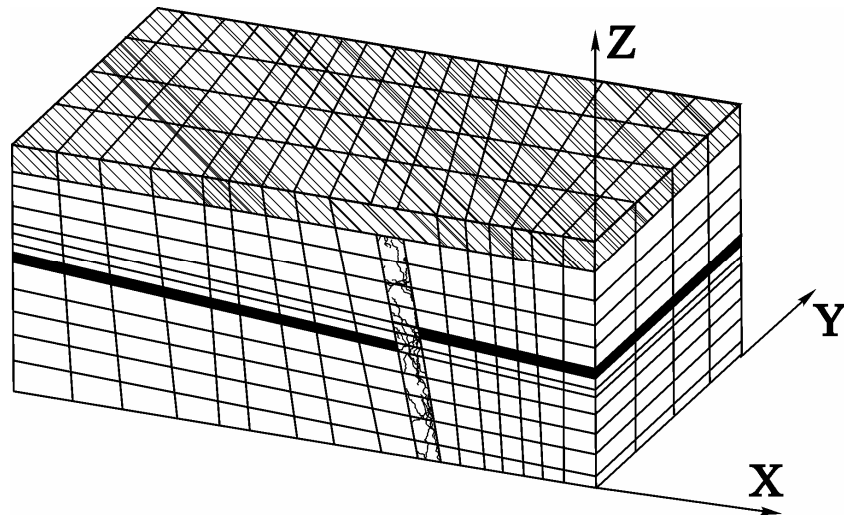
- моделювання контактів і тріщин елементами звичайної форми зі зниженою міцністю [8, 15].

- спеціальними нелінійними процедурами, заснованими на аналізі напруженого стану контакту, що реалізуються подвійною нумерацією вузлів, розташованих на контакті [8, 15].

- тектонічні порушення моделюються звичайними елементами зі зниженими властивостями [8, 18].

Аналіз вищенаведених робіт дозволяє зробити вивід, що введення в розрахункову схему розривів здійснюється двома шляхами: зоною зі зниженими характеристиками й тріщинами без заповнювачів. При моделюванні зрушень і деформацій земної поверхні можливо аналізувати тільки середні й потужні тектонічні порушення, тому для опису порушеної зони підходить тільки спосіб зі зниженням міцності.

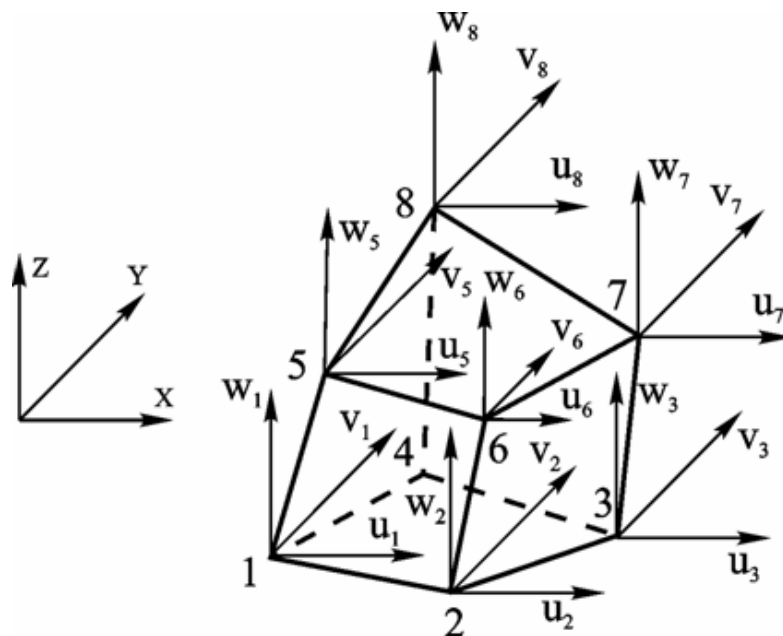
Згідно даних роботи [15] у масивах з порушеною структурою коефіцієнт структурного ослаблення в 5  $\div$  10 разів менше, ніж у масивах з нормальною січною тріщинуватістю. А. Б. Фадєєв також відзначає, що “породи з порушеною структурою (зони дроблення, деформовані породи в зонах зрушення від підземних робіт і т.п.) по суті мають залишкову міцність”. Таким чином, у міру наближення до порушення міцність порід зменшується. Урахувати анізотропію властивостей порід у зоні, що прилягає до порушення, викликано тектонічними тріщинами дуже складно, тому що число систем тріщин може бути різним, їхнє положення й інтенсивність у різних породних шарах не збігаються. Разом з тим тріщини, паралельні порушенню, присутні завжди. Тому для моделювання порушеної зони можливо використати трансверсально-ізотропне середовище (напрямок осей анізотропії уздовж і перпендикулярно розриву, тому що головна система тріщин паралельна зміщувачу) зі зниженим щодо основного масиву на один (у більшості випадків) або два порядки модулем пружності.



Мал. 2. Загальний вид об'ємної розрахункової схеми

**Математичний апарат.** У тривимірній геомеханічній задачі МСЕ виділяється довільна частина масиву (мал. 2). Кожна точка в масиві має три ступені волі уздовж осей  $OX$ ,  $OY$  і  $OZ$ , а, у цілому, безліч точок масиву дає нескінченне число можливих переміщень. Тому, відповідно до основної концепції МСЕ, масив дослідження розділяється на кінцеве число елементів, що мають форму неправильного гексаедру (мал. 3).

Окремі елементи взаємодіють між собою тільки у вузлах. Переміщення будь-якої точки усередині елемента визначаються переміщеннями його вузлових точок через апроксимуючий поліном. Величини впливу переміщень кожного вузла на переміщення внутрішніх точок елемента виражаються функціями форми вузлових точок, які отримані на основі вихідного апроксимуючого полінома.



Мал. 3. Скінченний елемент і можливі переміщення його вузлових крапок  $u_i$  – переміщення уздовж осі  $X$ ;  $v_i$  – переміщення уздовж осі  $Y$ ;  $w_i$  – переміщення уздовж осі  $Z$

Для кожного елемента формується матриця жорсткості, що враховує функції форми й пружні характеристики матеріалу, до якого він належить. Як прообраз неправильного гексаедру використовується куб, у системі локальних координат  $\xi, \eta, \zeta$  з початком у центрі куба. Переміщення вузлових точок елемента розраховуються за формулами [7, 8, 9, 10]:

$$\begin{aligned} u_i &= N_1 \cdot u_1 + \dots + N_8 \cdot u_8 \\ v_i &= N_1 \cdot v_1 + \dots + N_8 \cdot v_8 \\ w_i &= N_1 \cdot w_1 + \dots + N_8 \cdot w_8 \end{aligned} \quad (1)$$

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i) \quad (2)$$

$$\xi_i = (-1)^i; \eta_i = (-1)^{\text{int} \frac{i+1}{2}}; \zeta_i = (-1)^{\text{int} \frac{i+3}{4}} \quad (3)$$

де  $u_i, v_i, w_i$  – переміщення  $i$ -ої точки уздовж осей OX, OY, OZ відповідно;  $N_i$  – функції форми  $i$ -ого вузла гексаедру;  $\xi, \eta, \zeta$  – координати точок у системі координат прообразу.

Диференціюючи переміщення точок (1) по координатах X, Y, Z, одержуємо відносні деформації в межах елемента. При цьому похідні функцій форми по координатах X, Y, Z пов'язані з похідними по координатах прообразу матрицею Якобі [7, 8, 9, 10]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} \delta_{1X} \\ \delta_{1Y} \\ \delta_{1Z} \\ \vdots \\ \delta_{8X} \\ \delta_{8Y} \\ \delta_{8Z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{1x} & 0 & 0 & N'_{2x} & 0 & \dots & N'_{8x} & 0 & 0 \\ 0 & N'_{1y} & 0 & 0 & N'_{2y} & \dots & 0 & N'_{8y} & 0 \\ 0 & 0 & N'_{1z} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N'_{8z} \\ N'_{1y} & N'_{1x} & 0 & N'_{2y} & N'_{2x} & \dots & N'_{8y} & N'_{8x} & 0 \\ 0 & N'_{1z} & N'_{1y} & 0 & N'_{2z} & \dots & 0 & N'_{8z} & N'_{8y} \\ N'_{1z} & 0 & N'_{1x} & N'_{2z} & 0 & \dots & N'_{8z} & 0 & N'_{8x} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} X'_\xi & Y'_\xi & Z'_\xi \\ X'_\eta & Y'_\eta & Z'_\eta \\ X'_\zeta & Y'_\zeta & Z'_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_{1\xi} & N'_{2\xi} & \dots & N'_{8\xi} \\ N'_{1\eta} & N'_{2\eta} & \dots & N'_{8\eta} \\ N'_{1\zeta} & N'_{2\zeta} & \dots & N'_{8\zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_8 & Y_8 & Z_8 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} N'_{ix} \\ N'_{iy} \\ N'_{iz} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} N'_{i\xi} \\ N'_{i\eta} \\ N'_{i\zeta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
N'_{i\xi} &= \frac{1}{8} \cdot \xi_i \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i) \\
N'_{i\eta} &= \frac{1}{8} \cdot \eta_i \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \zeta \cdot \zeta_i) \\
N'_{i\zeta} &= \frac{1}{8} \cdot \zeta_i \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i)
\end{aligned} \tag{8}$$

де  $[B]$  – матриця функцій форм вузлових точок;  $[\delta]$  – матриця переміщень вузлових точок;  $[J]$  – матриця Якобі;  $N'_i$  – похідна функції форми  $i$ -ої точки.

Для пружних середовищ напруження пов'язані з деформаціями законом Гука [9]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} \end{bmatrix} = [D] \cdot [\varepsilon] = [D] \cdot [B] \cdot [\delta] \tag{9}$$

де  $[D]$  – матриця деформаційних характеристик елемента.

Розподілена по обсязі елемента сила ваги зводиться до вузлових сил з урахуванням функцій форм, які ще називаються функціями впливу вузлів. Дорівнюючи роботу вузлових сил і роботу внутрішніх напружень при нескінченно малому переміщенні вузлових точок, одержуємо:

$$[F] = [K] \cdot [\delta] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot [\delta] \tag{10}$$

де  $[K]$  – матриця жорсткості елемента.

Обчислення потрійного інтеграла замінюється обчисленням значення вираження, що стоїть під інтегралом, у вісьмох крапках інтегрування по квадратурі Гауса-Лежандра й множенням цих значень на частку обсягу елемента, що доводиться на дану точку інтегрування (ваговий коефіцієнт), що у цьому випадку дорівнює одиниці:

$$[K] = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 |J_{mnk}| \cdot [B_{mnk}]^T \cdot [D_{mnk}] \cdot [B_{mnk}] \tag{11}$$

Зведення розподілених сил до вузлових, здійснюється по формулі:

$$F_i = \gamma_i \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 N_{i,mnk} |J_{mnk}| \tag{12}$$

де  $N_{i,mnk}$  – значення функції  $i$ -ого вузла в черговій точці інтегрування;  $\gamma_i$  – питома (на одиниці об'єму) масова сила, що діє уздовж даного напрямку осі координат.

Сукупність матриць жорсткості елементів дає матрицю жорсткості всього масиву дослідження:

$$\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{1Z} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ \vdots \\ F_{nz} \end{bmatrix} = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot [\delta] = [K_S] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

де  $n$  - кількість вузлових точок,  $[F]$  – матриця вузлових сил,  $[B]$  – матриця функцій форм елементів,  $[D]$  – матриця пружності елементів,  $[\delta]$  – матриця вузлових переміщень,  $[K_S]$  – матриця жорсткості системи.

Тоді для трансверсально-ізотропного середовища матриця пружних характеристик буде мати вигляд [14]:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_3 & 0 & 0 & 0 \\ D_3 & D_3 & D_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \quad (14)$$

де

$$D_1 = \frac{E_1 \cdot (E_1 \cdot \nu_2^2 - E_2)}{(2 \cdot \nu_2^2 \cdot E_1 - E_2 + \nu_1^2 \cdot E_2 + 2 \cdot \nu_1 \cdot \nu_2^2 \cdot E_1)};$$

$$D_2 = \frac{-E_1 \cdot (E_1 \cdot \nu_2^2 + \nu_1 \cdot E_2)}{(2 \cdot \nu_2^2 \cdot E_1 - E_2 + \nu_1^2 \cdot E_2 + 2 \cdot \nu_1 \cdot \nu_2^2 \cdot E_1)}$$

$$D_3 = \frac{-E_2 \cdot \nu_2 \cdot E_1}{(\nu_1 \cdot E_2 + 2 \cdot \nu_2^2 \cdot E_1 - E_2)}; \quad D_4 = \frac{E_2^2 \cdot (\nu_1 - 1)}{(\nu_1 \cdot E_2 + 2 \cdot \nu_2^2 \cdot E_1 - E_2)}; \quad D_5 = \frac{E_1}{2 \cdot (\nu_1 + 1)}; \quad D_6 = G_2$$

Але ця формула дійсна тільки тоді, коли напрямок осей розрахункової системи координат збігається з напрямком осей координат шару, тобто шар горизонтальний. У протилежному випадку виникає ситуація, представлена на мал. 1: осі  $OX'$  і  $OY'$  повернені навколо осі  $OZ$  на дирекційний кут простягання шарів  $\alpha$ , а осі  $OX'$  і  $OY'$  повернені на кут падіння шарів  $\delta$  навколо осі  $OY$ . У цьому випадку матрицю деформаційних характеристик необхідно привести в систему координат розрахунку, використовуючи тензор перетворення координат. Згідно [12, 13] тензор перетворення координат, визначається косинусами кутів між осями:



$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 x'x & \cos^2 x'y & \cos^2 x'z & 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 y'x & \cos^2 y'y & \cos^2 y'z & 0 & 0 & 0 \\ \cos^2 z'x & \cos^2 z'y & \cos^2 z'z & 0 & 0 & 0 \\ \cos x'x \cdot \cos y'x & \cos x'y \cdot \cos y'y & \cos x'z \cdot \cos y'z & 0 & 0 & 0 \\ \cos y'x \cdot \cos z'x & \cos y'y \cdot \cos z'y & \cos y'z \cdot \cos z'z & 0 & 0 & 0 \\ \cos z'x \cdot \cos x'x & \cos z'y \cdot \cos x'y & \cos z'z \cdot \cos x'z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \quad (15)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \cdot \cos x'x \cdot \cos x'y & 2 \cdot \cos x'y \cdot \cos x'z & 2 \cdot \cos x'x \cdot \cos x'z \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot \cos y'x \cdot \cos y'y & 2 \cdot \cos y'y \cdot \cos y'z & 2 \cdot \cos y'x \cdot \cos y'z \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot \cos z'x \cdot \cos z'y & 2 \cdot \cos z'y \cdot \cos z'z & 2 \cdot \cos z'x \cdot \cos z'z \\ 0 & 0 & 0 & \cos x'x \cdot \cos y'y + \cos x'y \cdot \cos y'x & \cos x'y \cdot \cos y'z + \cos x'z \cdot \cos y'y & \cos x'x \cdot \cos y'z + \cos x'z \cdot \cos y'x \\ 0 & 0 & 0 & \cos y'x \cdot \cos z'y + \cos y'y \cdot \cos z'x & \cos y'y \cdot \cos z'z + \cos y'z \cdot \cos z'y & \cos y'x \cdot \cos z'z + \cos y'z \cdot \cos z'x \\ 0 & 0 & 0 & \cos z'x \cdot \cos x'y + \cos z'y \cdot \cos x'x & \cos z'y \cdot \cos x'z + \cos z'z \cdot \cos x'y & \cos z'x \cdot \cos x'z + \cos z'z \cdot \cos x'x \end{bmatrix}$$

Відповідні косинуси кутів між осями можуть бути отримані шляхом проектування базису координатної системи шару на осі системи координат, у якій виконується розрахунок.

**Зберігання й вирішення системи рівнянь.** Система рівнянь (13) має  $3 \cdot n$  невідомих і  $3 \cdot n$  рівнянь. Матриця жорсткості системи є симетричною й має стрічкову структуру, ширина стрічки якої визначається максимальною різницею номерів вузлових точок, що належать одному елементу.

У практиці моделювання МСЕ добре зарекомендували себе й часто використовуються кілька способів вирішення систем лінійних рівнянь. Порівняння цих способів по ряду визначальних ознак наведено в табл. 1.

**Табл. 1.** Порівняння способів вирішення систем лінійних рівнянь

Спосіб вирішення	Тип способу	Обсяг обчислень			Зберігання матриці	Ступінь нагромадження погрешностей
		*	√	/		
Холецкого	Прямий	$n^2 \cdot \left(\frac{n}{6} + 1\right)$	$n$	$2 \cdot n$	$n \times n$	Низька
Холецкого	Прямий	$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (m + 1) \cdot (m + 6)$	$n$	–	$n \times m$	Низька
Сполучених градієнтів	Ітераційний	$5 \cdot n^3 + 30 \cdot n^2$	$1$	$5 \cdot n^2$	$n \times n$	Висока
Гауса	Прямий	$n \cdot (n - 1)$	–	$n^2$	$n \times \frac{(n+1)}{2}$	Середня
Гауса-Зейделя	Ітераційний	$5 \cdot n^4$	–	$5 \cdot n^3$	$n \times n$	Висока
Гауса	Прямий фронтальний	$\frac{n^2}{m} \cdot (n - 1)$	–	$\frac{n^3}{m}$	$n \times m$	Середня

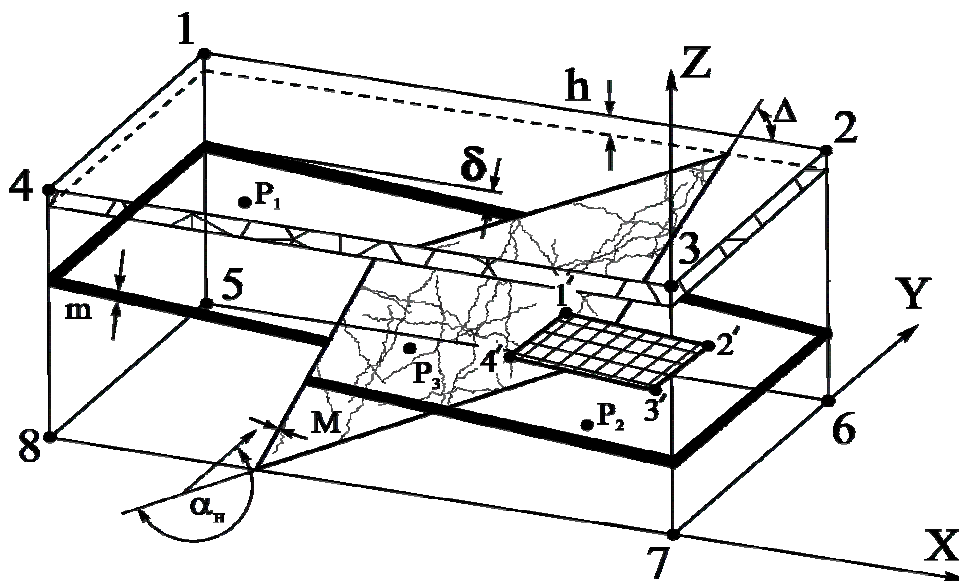
Для зберігання матриці жорсткості системи потрібно багато оперативної й дискової пам'яті. Так, для невеликої розрахункової схеми на 3000 вузлових точок, формується система лінійних рівнянь обсягом в 620 МБ. Зберігання й вирішення такої систе-

ми можливо тільки із застосуванням спеціальних методів.

Аналізуючи дані табл. 1, і з огляду на те, що МЖС є симетричною, позитивно визначеною стрічковою матрицею, то для її рішення доцільно застосовувати трикутне розкладання по способу Холецкого (квадратного кореня) [11]. При цьому в пам'яті можна зберігати тільки нижню трикутну матрицю. Цей спосіб є швидким, економічним і дає точні результати.

У випадку, якщо в пам'яті неможливо розмістити нижню трикутну матрицю, то для вирішення системи застосовується модифікований фронтальний метод Гауса [11]. Основною ідеєю фронтального методу є одночасне складання рівнянь і виключення змінних. У пам'яті зберігається максимально можлива частина системи рівнянь, число рівнянь не повинне бути менше ширини матриці. Як тільки коефіцієнти рівняння повністю зібрані з матриць жорсткості елементів, тоді відповідне невідоме може бути виключено, тому повна МЖС не формується. На місці виключеного рівняння починається формування чергового рівняння. У пам'яті зберігається тільки верхня трикутна частина квадратної матриці, що містить рівняння, використовувані в цей момент. Ці рівняння й утворюють фронт, а число невідомих у фронті називається шириною фронту. За один прохід процесу "складання-виключення" можна знайти число невідомих рівне ширині фронту. При наступному проході ці невідомі вважаються обчисленими й використовуються для одержання попереднього фронту невідомих. Даний спосіб вимагає більших тимчасових витрат, але дозволяє вирішити велику систему рівнянь.

**Формування розрахункової схеми.** При програмній реалізації просторової моделі масиву найбільші труднощі викликають створення розрахункової схеми, її опис і уведення в комп'ютер. Для автоматизованого рішення зазначених завдань був розроблений наступний алгоритм.



Мал. 4. Вихідні дані для побудови розрахункової схеми

Обчислення проводяться в системі координат XYZ, де вісь X спрямована убік падіння шарів, вісь Y - по простяганню, а вісь Z - вертикально нагору (мал. 4).

Вихідними даними для створення розрахункової схеми є:

- координати вузлових точок масиву досліджень ( $X_1 \dots X_8, Y_1 \dots Y_8, Z_1 \dots Z_8$ ), що вбирає до себе очисну виробітку і зону її впливу. Умовно прийняте, що напрямок (1-2) паралельний осі абсцис, а напрямок (4-1) паралельний осі ординат;
- координати будь-якої точки висячого  $P_1(X, Y, Z)$  і лежачого крил  $P_2(X, Y, Z)$ ,

що належить поверхні покрівлі вугільного шару;

- кут падіння вугільного шару  $\delta$ ;
- потужність вугільного шару  $m$ ;
- координати проєкцій кутових точок лави ( $1', 2', 3', 4' \dots$ ) на горизонтальну площину;

площину;

- потужність зони наносів  $h$ ;
- координати будь-якої точки  $P_3(X, Y, Z)$ , що належить зміщувачу розривного тектонічного порушення (середина порушеної зони);
- потужність порушеної зони  $M$ , кут простягання  $\alpha_n$  і падіння  $\Delta$  зміщувача;
- деформаційні характеристики окремих структурних елементів масиву.

З метою забезпечення автоматизованої побудови розрахункової схеми був розроблений алгоритм, що дозволяє сформувати систему вузлових точок шляхом перетинання трьох систем площин:

- системи вертикальних площин, що паралельні осі абсцис.
- системи вертикальних площин, що паралельні осі ординат.
- системи площин, що визначають розподіл масиву на шари, які приблизно паралельні площини шару.

У зоні впливу очисної виробітки частота площин всіх трьох систем зростає. Площини третьої системи при пологому заляганні шарів поступово змінюють кут свого нахилу від кута падіння  $\delta$  у покрівлі й ґрунті шару, стаючи горизонтальними на нижній границі схеми й на границі корінних порід і наносів (мал. 2). Для одержання розрахункової схеми при наявності розривного тектонічного порушення необхідно внести зміни в напрямок системи площин, що паралельні осі абсцис або ординат, залежно від того, з якої з осей зміщувач утворює менший кут. Площини, що визначають границі порушеної зони будуються паралельно зміщувачу. А інші рівномірно змінюють кут свого розвороту від кута простягання й падіння останнього до кута відповідної осі координат і вертикального положення в напрямку до границь масиву досліджень, тобто використовується той же принцип, що й для системи площин, що визначають нашарування порід.

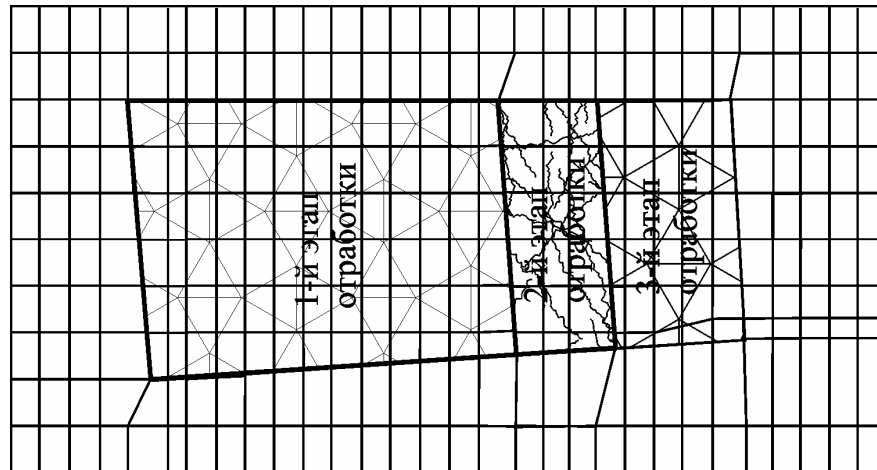
Послідовне перетинання формуючих площин дозволяє одержати координати вузлових точок. Тому що нумерація вузлів елемента визначає ширину стрічки матриці жорсткості системи, то точки нумеруються уздовж грані масиву, площа якої є найменшою.

**Геометричне моделювання очисної виробітки.** Очисна виробітка укладається у регулярну сітку прямокутників (мал. 5), сторони яких паралельні осям абсцис і ординат відповідно. Розміри сторін визначаються оператором для найкращого опису конфігурації, розташування й пересування виробітки. Вузлові точки сітки, що імітує шар з виробіткою, можуть бути переміщені за допомогою маніпулятора миша в будь-якому напрямку, описуючи будь-яку форму очисної виробітки. Потім координати точок у загальній розрахунковій схемі програмно коректуються з урахуванням форми лави. Тут же визначається, які з елементів підлягають виїмці й на якому кроці відпрацьовування. Число контурних точок лави в принципі не обмежено.

**Моделювання процесу відпрацьовування.** Для граней масиву дослідження необхідно задати граничні умови: обмежити масив твердим каркасом. Для бічних  $X$  і  $Y$  граней задаються нульові переміщення уздовж осей  $X$  і  $Y$  відповідно, а для нижньої грані - нульові переміщення уздовж осі  $Z$ .

Визначення зрушень і деформацій виконується в кілька кроків. На нульовому кроці визначаються переміщення вузлових точок і напруження в елементах під дією власної ваги масиву. Цей стан відповідає напруженому стану недоторканого масиву. На першому й наступному кроках з розрахункової схеми видаляються елементи, що моделюють очисну виробітку, шляхом присвоєння їм певних знижених характеристик [5,

15], при яких дотримується умова непроникнення порід покрівлі в породу ґрунту шару й забезпечується ущільнення елемента практично на величину, близьку до виймається потужності вугільного шару. Різниця відповідних переміщень вузлових точок будь-якого кроку відпрацьовування й нульового дає зрушення масиву досліджень, викликані очисною виробіткою. Використовуючи переміщення вузлових точок можна перейти до деформацій і напружень елементів.



Мал. 5. Завдання форми лави й пересування вибою

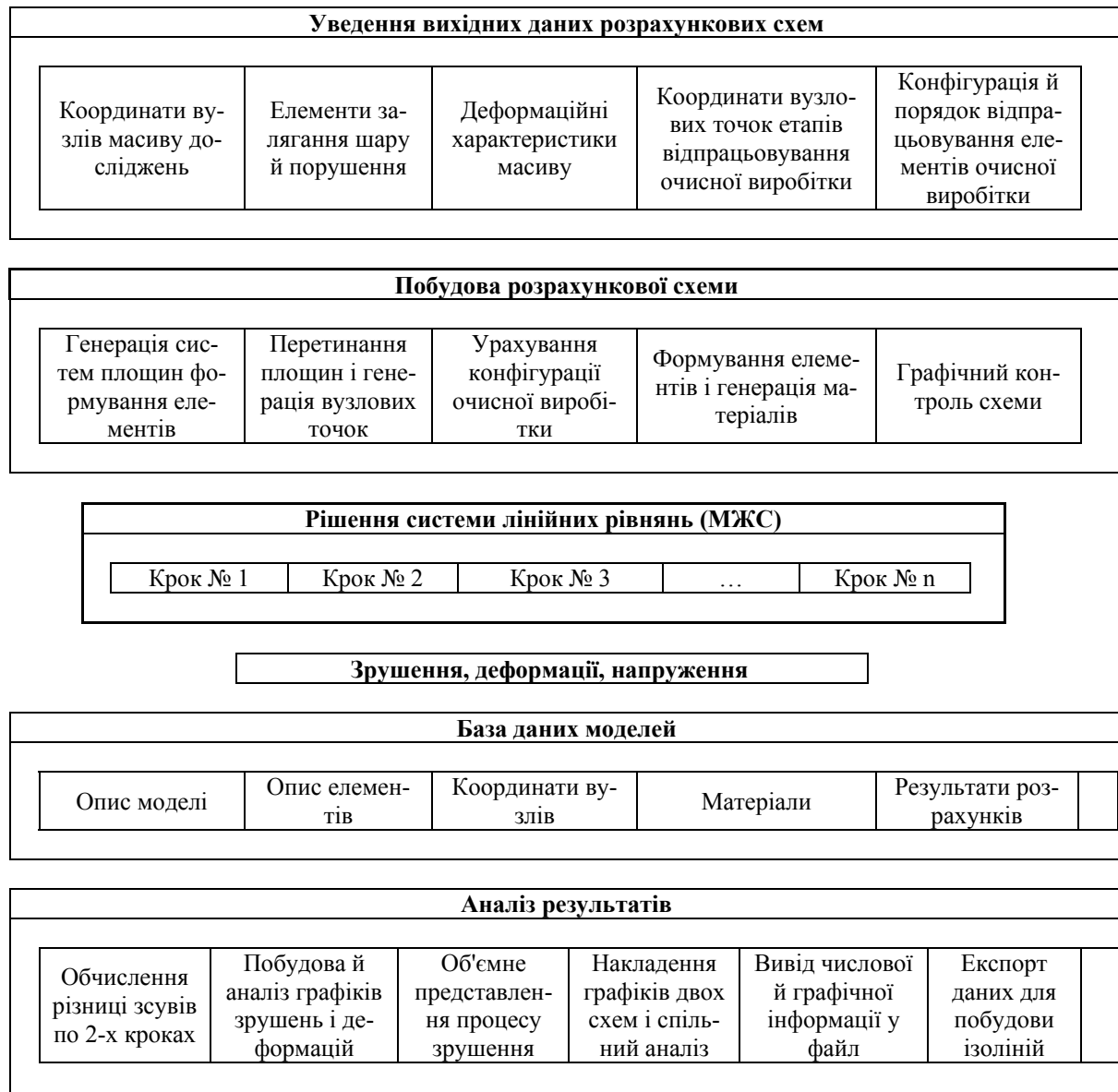
**Програмна реалізація.** Для реалізації математичного моделювання процесів зрушення методом скінченних елементів була написана програма в середовищі програмування Delphi на базі операційної системи Windows. Програма містить у собі:

- модуль підготовки вихідних даних;
- модуль формування розрахункової схеми;
- модуль формування МЖС і вирішення системи рівнянь;
- модуль аналізу отриманих результатів.

Загальна логічна структура програми представлена на мал. 6. У результаті вирішення матриці жорсткості системи обчислюються абсолютні переміщення точок уздовж осей координатної системи. У такому виді отримані дані не можуть бути використані для дослідження розвитку процесу зрушення. Тому в модулі аналізу результатів програмою передбачений ряд функцій, що дозволяють оцінити характер деформування масиву гірських порід і земної поверхні. Зокрема, для кожного етапу очисних робіт обчислюються величини й будуються графіки зрушень і деформацій по напрямках перетинів формуючих площин, по головних перетинах мульди зрушення деформації визначаються для всієї площини розрізу. Існує можливість накладення відповідних графіків різних схем. Ця функція застосовується при порівняльному аналізі зрушень і деформацій порушеного й непорушеного масиву. Подання розрахункової схеми в аксонометричній проекції для кожного кроку відпрацьовування дозволяє контролювати стан моделі на будь-якому етапі. Всі графічні й числові дані можуть бути збережені на диску або роздруковані. Також передбачена можливість експортування осідань земної поверхні у файл для побудови ізоліній мульди зрушення у програмі Surfer.

**Апробація моделі.** Для оцінки ступеня наближення моделі до реальних умов було проведено порівняння результатів розрахунку з існуючими методиками прогнозування зрушень і деформацій і даними натурних маркшейдерських спостережень. На жаль, за час багаторічних маркшейдерських спостережень за деформаціями земної поверхні існувало всього 1 ÷ 2 майданних спостережних станцій, що було обумовлено ви-

сокою трудомісткістю проведення подібного виду робіт. Тому аналіз базувався насамперед на порівнянні із графіками зрушень і деформацій у головних перетинах мульди зрушення, отриманими за методикою «Правил охорони ...» [1] і по програмі плоскої задачі МСЕ, вірогідність і надійність якої була доведена в роботах [4, 5].

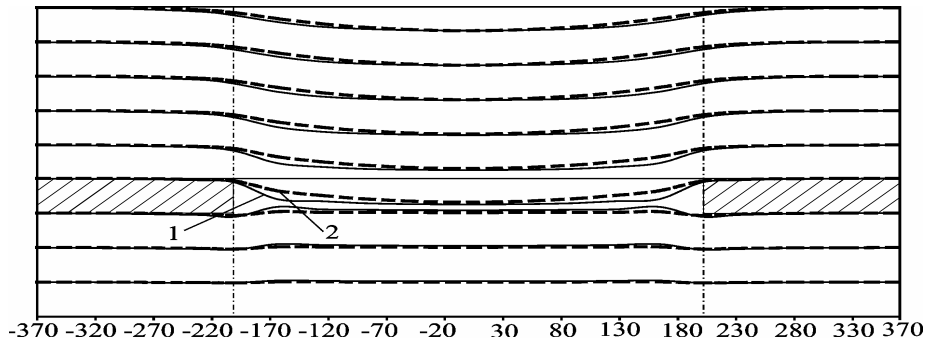


**Мал. 6.** Структура програми для моделювання методом кінцевих елементів процесу зрушення гірських порід і земної поверхні

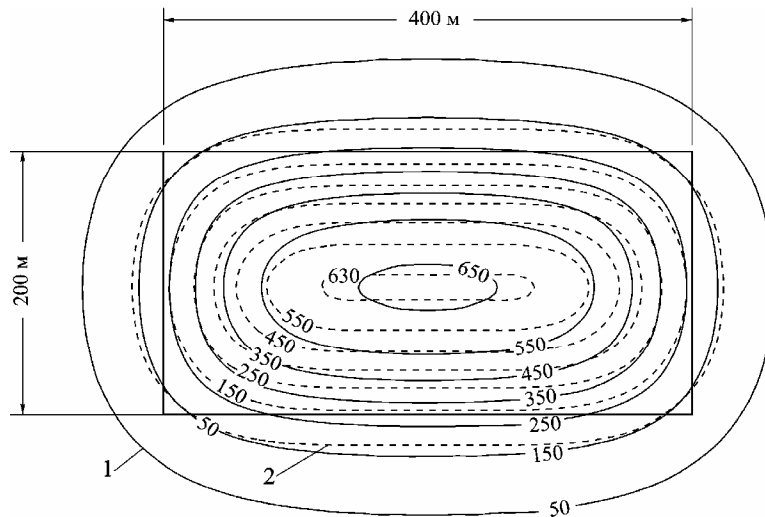
Загальна картина розвитку процесу зрушення при моделюванні наведена на мал. 7. На мал. 8 показано порівняння ізоліній осідань, отриманих за результатами об'ємної задачі й методики “Правил охорони ...” [1], а на мал. 9 - 10. представлено порівняння графіків осідань у головних перетинах мульди зрушення.

Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок про те, що якісна картина процесу зрушення відповідає існуючим представленням про характер розподілу зрушень і деформацій. Хоча мульда зрушення, отримана за результатами тривимірного моделювання, розтягнута щодо мульди, побудованої за методикою “Правил охорони ...”, функції розподілу, обчислені за даними об'ємної задачі на базі нормованих кривих

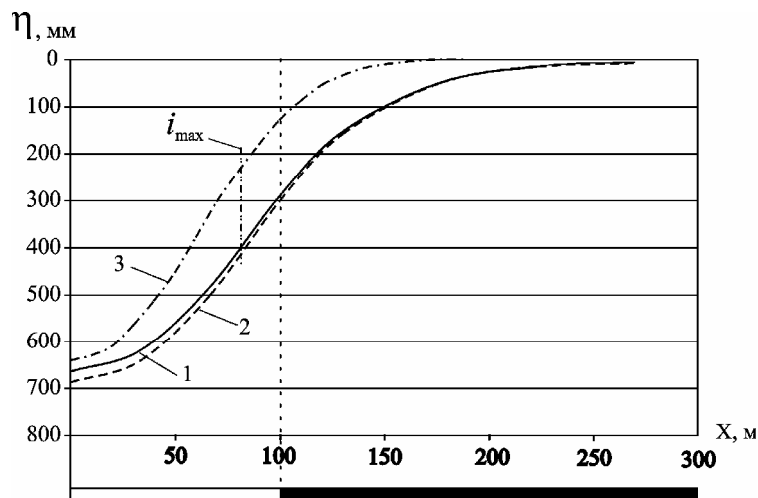
осідань, нахилів і горизонтальних зрушень і деформацій, наведених до довжини напів-мульди, і нормативні функції розподілу [1] практично збігаються (див. мал. 11–13).



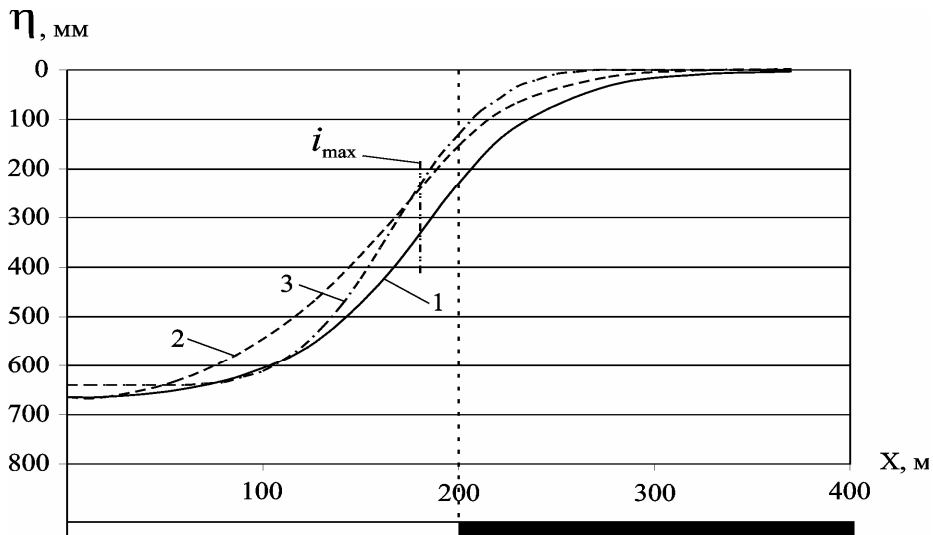
**Мал. 7.** Загальна картина зрушення в головному перетині мульди зрушення по довгій стороні очисної виробітки: 1 - за даними об'ємної задачі; 2 - за даними плоскої задачі



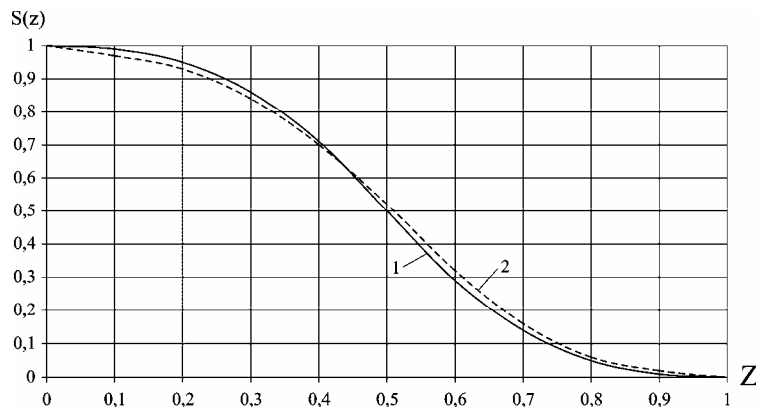
**Мал. 8.** Ізолінії осідань земної поверхні: 1 - за даними об'ємного моделювання; 2 - за методикою “Правил охорони ...”



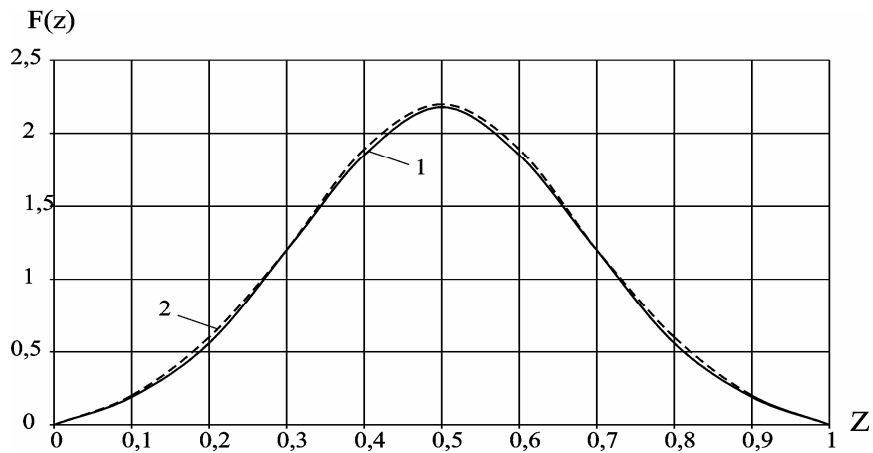
**Мал. 9.** Графіки осідань земної поверхні в головному перетині мульди зрушення по короткій стороні очисної виробітки: 1 - за даними об'ємної задачі; 2 - за даними плоскої задачі; 3 - за методикою «Правил охорони ...»



**Мал. 10** – Графіки осідань земної поверхні в головному перетині мульди зрушення по довгій стороні очисної виробітки: 1 - за даними об'ємної задачі; 2 - за даними плоскої задачі; 3 - за методикою “Правил охорони ...”

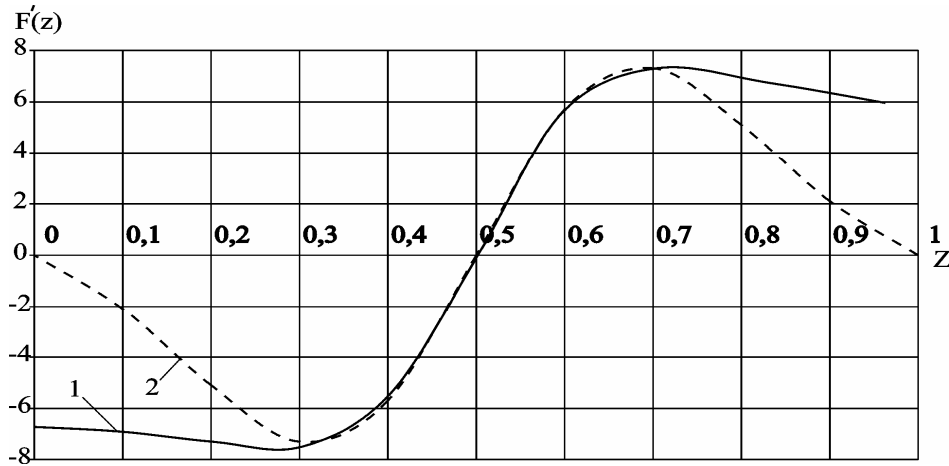


**Мал. 11.** Функція розподілу осідань: 1 - за даними об'ємної задачі; 2 - по даним “Правил охорони ...”



**Мал. 12.** Функція розподілу нахилів: 1 - за даними об'ємної задачі; 2 - по даним “Правил охорони ...”

Функція розподілу  $F'(z)$  у крайових частинах напівмульди значно відрізняється від нормативної кривої (мал. 13). Це викликано недоліками моделі й прийнятими граничними умовами. Але центральна частина й точки екстремумів функції відповідають існуючим уявленням про характер розподілу горизонтальних деформацій, що дає можливість використовувати одержувані якісні характеристики для прогнозування розвитку процесу зрушення.



**Мал. 13** – Функція розподілу горизонтальних деформацій: 1 - за даними об'ємної задачі; 2 - по даним “Правил охорони ...” .

За отриманими результатами зрушень і деформацій були визначені основні параметри процесу зрушення (у дужках дані параметри по нормативах “Правил охорони ...” [1]):

- максимальне осідання  $\eta_{\max} = 663$  мм (640 мм);
- максимальні нахили  $i_{\max} = 5.8$  мм/м (6,6 мм/м);
- максимальні горизонтальні зрушення  $\xi_{\max} = 57$  мм (211 мм);
- максимальні горизонтальні деформації  $\varepsilon_{\max} = 0.38$  мм/м (4,1 мм/м);
- граничні кути  $\gamma_0 = \beta_0 = \delta_0 = 62,5^\circ$  ( $70^\circ$ );
- кути повних осідань  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 57^\circ$  ( $55^\circ$ );
- кут максимального осідання  $\theta = 90^\circ$  ( $90^\circ$ );
- відстань від точки перегину кривій осідань до проекції границі виробітки становить приблизно  $0.09 \cdot H$  (мал. 9 ÷ 10);
- при керуванні гірським тиском шляхом повного обвалення, по контуру очисної виробітки спостерігається зависання порід покрівлі за рахунок того, що основна частина навантаження сприймається опорними ціликами. Довжина зони зависання за результатами моделювання склала приблизно 35 м.

Таким чином, кількісні значення осідань і нахилів за результатами об'ємного моделювання незначно відрізняються від прогнозованих по інших методиках – не більше 5% ÷ 15%. Горизонтальні зрушення й деформації практично не залежать від деформаційних характеристик вугільного шару й масиву й становлять 10% ÷ 20% від очікуваних по “Правилах охорони ...” [1]... Малі значення горизонтальних зрушень у масиві, не відповідні натурним спостереженням на поверхні, отримані були також на шаруватих моделях з еквівалентних матеріалів [22] і на плоских моделях МСЕ [5, 12]. Введення в розрахункову схему шару наносів приводить до істотного збільшення горизонтальних деформацій (у два - три рази) при незначній зміні осідань і нахилів.



Також було проведено зіставлення даних математичного моделювання й натурних маркшейдерських спостережень, проведених Медянцевим і Чепенко [3] на шахті Родинська тресту “Красноармейскуголь”.

Розрахунок проводився для наступних гірничо-геологічних умов:

- середня глибина розробки -220 м;
- шар ДО<sub>5</sub> (Родинський), потужність  $m = 1.09$  м, кут падіння  $\delta = 10^\circ$ ;
- розміри очисної виробітки 420x180 м;
- потужність наносів - 40 м.

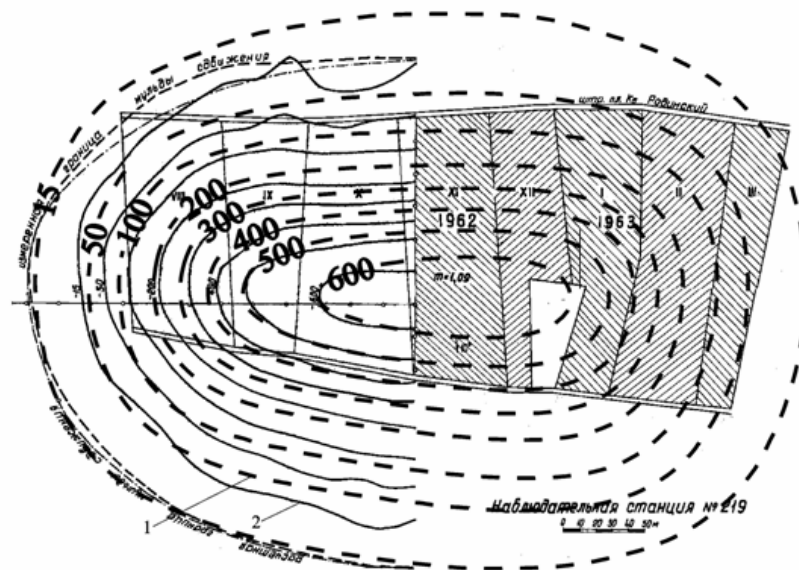
Основна відмінність даної схеми від попередньої полягає у тому, що вугільний пласт є пологопадаючим і присутня досить потужна для Донбасу зона наносів.

При моделюванні були прийняті наступні деформаційні характеристики:

- масиву й вугільного шару:  $E_1, E_2 = 1 \cdot 10^9$ , Па;  $\nu_1, \nu_2 = 0,2$ ;  $G_2 = 4,2 \cdot 10^7$ , Па;
- наносів (ізотропний масив):  $E = 1 \cdot 10^6$ , Па;  $\nu = 0,4$ .

Порівняння наведених до довжини напівмульди ізоліній осідань для цього випадку, представлене на мал. 14, показує задовільну збіжність отриманих результатів у якісному й кількісному відношенні.

Максимальні значення осідань збігаються, а відхилення ізоліній у плані в зоні інтенсивних осідань (до 200 мм) від фактичного положення не перевищує 5 м, що в середньому становить погрішність близько 15%. У крайових частинах мульди ізолінії розходяться на більш значні відстані, але з огляду на малі величини осідань цим можна знехтувати.



**Мал. 14.** Ізолінії осідань земної поверхні: 1 - за результатами об'ємного моделювання; 2 - по даним натурних маркшейдерських спостережень.

За результатами роботи можна зробити наступні висновки:

- розроблено технологію прогнозу просторових зрушень і деформацій земної поверхні, що враховує геологічну будову товщі (наявність розривних тектонічних порушень), форму лави і її орієнтацію щодо елементів залягання шару;
- розроблено діючу комп'ютерну технологію просторового математичного моделювання процесів зрушення й деформацій земної поверхні МСЕ для пологих вугільних шарів, довільної форми й орієнтації очисної виробітки;

- представлення масиву порід, що вміщують, у вигляді трансверсально-ізотропного середовища з малим модулем зсуву, що становить 10% ÷ 15% від модуля зсуву ізотропного масиву, дає гарну збіжність (у межах 15%) результатів моделювання з методикою “Правил охорони ...” [1], плоскою задачею МСЕ й даними натурних маркшейдерських спостережень.

- отримана модель зрушення може бути використана для дослідження й аналізу характеру розподілу зрушень і деформацій масиву гірських порід і земної поверхні при підробітку розривних тектонічних порушень пологими вугільними шарами.

### Бібліографічний список

1. **Правила охраны** сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на угольных месторождениях. – М.: Недра, 1981, 288 с.
2. **Временные** технические условия по охране сооружений и природных объектов от влияния горных разработок. УкрНИМИ, 1995 г.
3. **Медянецв А.Н., Чепенко Л.П.** Распределение сдвижений и деформаций земной поверхности по площади мульды сдвижения вне ее главных сечений // Труды по вопросам горного давления, сдвижения горных пород и методики маркшейдерских работ. Сборник № 55. – Л.: ВНИМИ, 1965, - с.54–66.
4. **Гавриленко Ю.Н.** Математическое моделирование сдвижения горных пород и земной поверхности в слоистом массиве методом конечных элементов // Известия Донецкого горного института. – 1997. - №1. – С.87 – 93.
5. **Гавриленко Ю.Н.** Автореферат: Научные основы прогнозирования сдвижений земной поверхности при разработке угольных пластов в условиях нарушенного залегания пород. – Донецк, 1997.
6. **Zhiwang Fan.** Grundlage und Modellierung der Boundary-Elemente-Methode fuer die Anwendung in der Bergschadenkunde. Das Markscheidewessen 105 № 2, Verlag Glueckauf GmbH, Essen, 1988, -S. 179 – 185.
7. **Зенкевич О., Чанг И.** Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974, 240 с.
8. **Фадеев А.Б.** Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987, 221 с.
9. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975, 539 с.
10. **Амусин Б.З., Фадеев А.Б.** Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. – М.: Недра, 1975, 192 с.
11. **Уилкинсон, Райнш.** Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976, 389 с.
12. **Бенерджи П., Баттерфилд Р.** Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984, 494 с.
13. **Studienunterlagen “ Bodenmechanik und Grundbau ”** von U.Smaltezyk und anders. Ausgabe 1988.
14. **Лехницкий СГ.** Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977, 415 с.
15. **Комиссаров С.Н.** Управление массивом горных пород вокруг очистных выработок. – М.: Недра. – 1983.- С. 237.
16. **Кратч Г.** Сдвижение горных пород и защита подрабатываемых сооружений. – М.: Недра. – 1978. – С. 494.
17. **Ножин А.Ф., Зотеев В.Г.** Расчет напряженно-деформированного состояния трещиноватого массива вокруг горных выработок. – ФТПРПИ. – № 5. –1978. – С. 9 – 14.
18. **Работа Э.Н., Кадыров А.Г.** Влияние разрывных нарушений на напряженное состояние массива горных пород. // Геологические и геофизические методы и средства прогнозирования горно-геологических условий ведения горных работ на угольных месторождениях. Сб. науч. тр. –Л.: ВНИМИ. – 1986. – С. 28 – 32.
19. **Кузнецов Г.Н. Ардашев К.А., Филатов А.Н** Методы и средства решения задач горной геомеханики. – М.: Недра, 1987. – 248 с.
20. **Мельников Н.В., Ржевский В.В., Протодьяконов М.М.** Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. – М.: Недра, 1975. – 279 с.
21. **Ржевский В.В.** Физико-технические параметры горных пород. – М.: Наука, 1975. – 212 с.
22. **Земисев В.Н.** Расчеты деформаций горного массива. – М.: Недра, 1973. – 144 с.