

## **ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ И СКОРОСТИ ГИДРОСМЕСИ НА КОЛЕБАНИЕ ПОДЪЕМНОЙ ТРУБЫ ЭРЛИФТА**

Малеев В.Б., докт. техн. наук, проф., Малыгин С.С.,  
Скорынин Н.И., канд-ты техн. наук, доц, Малеев А.В., инж.,  
Донецкий национальный технический университет

*Получены дифференциальные уравнения, описывающие форму и частоту главных колебаний подъемного трубопровода глубоководных эрлифтных установок для откачки воды из затопленных шахт и подводной добычи полезных ископаемых со дна морей и океанов*

**Проблема и ее связь с научными или практическими задачами.** Наличие внутри подъемной трубы транспортируемой пульпы, плотность которой при промышленной добыче полезных ископаемых со дна природных водоемов может оказаться соизмеримой (и даже выше) с плотностью материала самой трубы, оказывает заметное влияние на частотный спектр колебаний. Постоянное поступление энергии от нагнетателя (компрессора) через смеситель делает неконсервативной механическую систему подъемная труба – пульпа. Первое следствие неконсервативности – это возможность потери устойчивости равновесия даже такой естественной формы, которой является прямая. Особенно это важно для эрлифтных установок, устанавливаемых в стволах при «мокрой» консервации закрываемых угольных шахт. В качестве подъемной трубы таких установок обычно используются водоотливные ставы демонтируемых насосных водоотливных установок.

**Анализ исследований и публикаций.** В работе (1) получена критическая скорость жидкого потока  $V_{кр}$ , при которой становится невозможной прямолинейная форма однородной трубы, шарнирно закрепленной на концах.

$$V_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho_{жс} F_{жс}}} \quad (1)$$

Здесь  $\rho_{жс}$  - плотность пульпы, кг/м<sup>3</sup>;  $F_{жс}$  – площадь поперечного сечения, занятого пульпой, м<sup>2</sup>;  $l$  – длина трубы, м;  $EJ_y$  – изгибная жесткость труба, Нм<sup>2</sup>.

При изменении граничных условий на концах, в частности при защемленном верхнем и свободном нижнем, исходная статическая прямолинейная форма равновесия – единственная (при отсутствии внешних нагрузок). Изучение поперечных движений около этого положения значительно сложнее, чем при получении формулы (1). Полное решение вопроса дает анализ двух безразмерных параметров:

$$\beta = V \sqrt{\frac{m_{\text{жс}} l^2}{EJ}} \quad \text{и} \quad \chi = \sqrt{\frac{m_{\text{жс}}}{m_m + m_{\text{жс}}}} \quad (2)$$

где  $m_{\text{жс}}$  – погонная (распределенная) плотность пульпы, кг/м;  $m_m$  – погонная плотность трубы, кг/м;

В обозначениях формулы (1) формулу (2) можно представить в виде

$$\beta_{\text{кр}} = V_{\text{кр}} \sqrt{\frac{m_{\text{жс}} l^2}{EJ}} = \pi \approx 3,14 \quad (3)$$

Независимо от явного значения параметра  $\chi$  (он, конечно, неявно содержится в составе параметра  $\beta$ ).

**Постановка задачи.** Целью настоящей статьи является определение частоты главных колебаний трубопровода при установившемся движении пульпы, динамических усилий в подъемной трубе.

**Изложение материала и результаты.** В варианте со свободным концом представление поведения безразмерной круговой частоты поперечных колебаний  $\Omega$  ( $\omega$  – «размерная» циклическая частота в общепринятом смысле)

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{(m_m + m_{\text{жс}}) l}{EJ}}$$

выполненное путем решения дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, приведено на рисунке 1 (приведены две нижние частоты).

Увеличение  $\Omega_1$  (нижний тон) с увеличением скорости пульпы  $\beta$  и последующее уменьшение ее до нуля не сопровождается неограниченным нарастанием отклонений, т.е. 1-я форма свободных колебаний динамически устойчива. На этой частоте возбуждающее действие потока компенсируется им же самим за счет демпфирующего действия кориолисовых сил, возникающих при повороте элемента трубы и соответствующего ему элемента пульпы.

Особенности начинаются со 2-й и более высоких гармоник. Так  $\Omega_2$  уменьшается, причем с нарастанием, по мере увеличения скорости

потока  $\beta$ . Более того, для каждого значения относительной плотности  $\chi$  существует свое критическое значение  $\beta_{кр}$ , превышение которого сопровождается неограниченным нарастанием отклонений (внешние сопротивления не учтены), т.е. неконсервативная система теряет устойчивость. Числовые значения критической скорости в зависимости от значения  $\chi$ , приведенные в таблице 1 позволяют, например, в сравнении с формулой (3) заключить, что заземленный свободно свисающий эрлифтный трубопровод в режиме свободных поперечных колебаний допускает критическую скорость, превышающую не менее чем на 30% ее же в шарнирно закрепленной на обоих концах трубе.

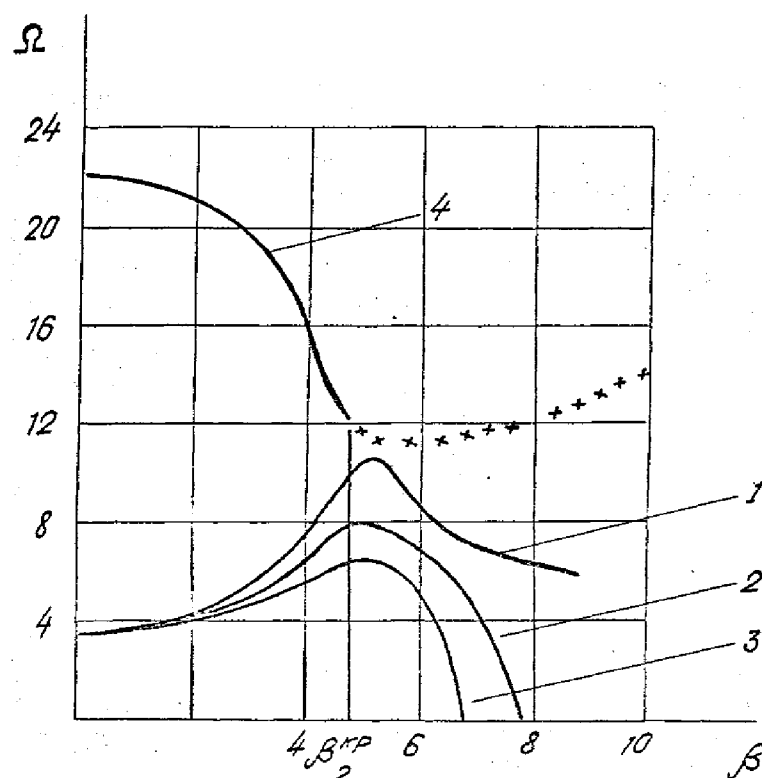


Рисунок 1 - Зависимости безразмерной круговой частоты поперечных колебаний  $\Omega$  от безразмерного параметра  $\beta$ , 1,2,3 - нижняя частота  $\Omega_1$  при  $\chi = 0,1; 0,2; 0,3$  соответственно; 4 - верхняя частота  $\Omega_2$ , при  $\chi = 0,1$

Таблица 1 – Критические скорости в зависимости от распределенной плотности пульпы.

$\chi$	0,1	0,2	0,3
$\beta_{кр}$	4,31	4,47	4,58
$\Omega_1^{кр}$	8,26	6,74	6,19
$\Omega_2^{кр}$	13,90	13,55	14,06

Дальнейшее уточнение постановки задачи имеет, как минимум два практически важных направления. Во-первых, длинный эрлифт имеет ступенчатое переменное сечение, плотность пульпы от входного (всасывающего) сечения до смесителя приблизительно постоянна, стремительно уменьшается при дальнейшем подъеме за счет аэрирования и резкого возрастания скорости. Во-вторых, в реальных условиях исходная форма может быть заметно деформирована внешней средой, что может привести не только к количественным отличиям от сказанного выше, но к качественным, например, появлению критических значений скорости  $\beta_{кр}$  в 1-й форме колебаний.

Дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний прямого трубопровода с протекающей в нем жидкостью имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (m_m + m_{жс}) - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} V m_{жс} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} V^2 m_{жс}$$

Где, с учетом сказанного выше,  $m_m$ ,  $m_{жс}$ ,  $J$ ,  $V$  следует считать заданными функциями по крайней мере координаты  $x$  (при установившемся движении пульпы).

Переход к безразмерным величинам [2]

$$U = \frac{y}{l}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \tau = At; \quad A = \left( \frac{EJ_0}{m_{m0} + m_{жс0}} \right)^{1/2} \quad (4)$$

В качестве неизменных эталонных величин в последней формуле последовательности можно выбрать момент инерции  $J_0 = J_{вх}$  и погонные плотности  $m_{m0} = m_{мвх}$ ,  $m_{жс0} = m_{жсвх}$  во входном сечении подъемной трубы. Приемлемы значения этих же величин на уровне смесителя (со стороны подающей трубы).

Учитывая вытекающие из (4) следствия

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} = A \frac{d}{d\tau},$$

Получаем дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами в безразмерной форме

$$\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} + a_1(U) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + 2a_2(U) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} V m_{жс} + a_3(U) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0$$

где  $a_1(U) = \sqrt{\frac{m_m + m_{жс}}{EJ}} A$ ;  $a_2(U) = \frac{V}{l} \frac{m_{жс} l^4}{EJ} A$ ;  $a_3(U) = \frac{V^2}{l^2} \frac{m_{жс} l^4}{EJ} A$

Численное интегрирование с помощью ЭВМ на интервале  $0 \leq \xi \leq 1.0$  при коэффициентах, не зависящих от времени  $\tau$  (установившееся движение пульпы) определяет формы и частоты главных колебаний. Особое внимание при анализе следует уделить действительным частям комплексных корней фундаментальной матрицы решений: изменение знака этой части с отрицательного на положительный соответствует критической скорости течения пульпы в эрлифте.

Подъемная труба эрлифта как неконсервативная механическая система с распределенными параметрами подвержена широкому спектру возмущающих воздействий. Наиболее существенные из них – это кинематическое возбуждение точки подвеса за счет движения несущего плавсредства; подводные течения и волны; колебания скорости и давления пульпы по высоте трубопровода и во времени. Наложение всех этих видов возмущения вызывает сложную картину напряжений в сечениях трубопровода. Задачу можно несколько упростить, приняв линейную модель со свойственным ей принципом суперпозиции решений, т.е. возможности наложения усилий и напряжений, вызванных различными возмущающими факторами.

Рассматриваются вынужденные колебания протяжного вертикального трубопровода, соединяющего фиксированную точку на дне водоема и место сброса пульпы на плавсредстве (шаровой шарнир). Разбиением трубы на участки одинаковой длины и заменой его невесомой нитью и с «бусинками» можно описать поперечные колебания матричным уравнением

$$\{M\}\ddot{U} + \{B\}\dot{U} + \{C\}U = \{F\} \quad (6)$$

где коэффициентами при  $\ddot{U}, \dot{U}, U$  в правой части стоят соответственно матрицы массы, сопротивления, жесткости и силы. Элементами матрицы являются массы «блинов» вырезанных двумя поперечными сечениями и приведенных к узлам. Матрица изгибных жесткостей имеет компоненты, пропорциональные  $EJ/l^3$ .

Матрица линейных сопротивлений пропорциональна матрице геометрических жесткостей  $G$  элементы которой, в свою очередь, пропорциональны максимальному осевому натяжению и обратно пропорциональны длине

$$\{B\} = \mu_0 \{G\}$$

Здесь  $\mu_0 = \text{const}$ , которую можно определять полуэмпирическим путем как

$$\mu_0 = \frac{0,04}{P_1}$$

где  $P_1$  - нижняя циклическая собственная частота колебаний трубопровода.

Для формирования вынуждающей силы вводится скорость частицы воды, омывающей трубу, в зависимости от глубины и времени

$$V(\xi, t) = V_0(\xi) + W(\xi, t)$$

где  $V_0(\xi)$  - эпюра распределения скорости течения по высоте (глубине);  $W(\xi, t)$  - скорость волн на той же глубине.

Очевидно можно принять:

$$W(\xi, t) = W_0(z) \sin p \cdot t$$

Тогда получим распределенную на единицу длины трубопровода силу гидродинамического давления.

Сосредоточив все перечисленные выше элементы в узлах выбранной модели, численным интегрированием дифференциального уравнения (6) получаем изгибающие напряжения в указанных сечениях (приняты безразмерные координаты  $\tilde{z} = z/l$ ).

В таблице 2 представлены некоторые характеристики распределения изгибных напряжений в трубе эрлифта по высоте  $\tilde{z}$ .

Таблица 2 - Распределение изгибных напряжений по длине трубы.

Относительная координата $\tilde{z} = Z/L$	Относительное напряжение изгиба	
	$\tau/\tau_0 = 1$	$\tau/\tau_0 = 4$
0,0	0,00	0,00
0,2	0,66	0,91
0,4	0,45	0,49
0,6	0,51	0,57
0,8	0,73	0,58
1,0	0,00	0,00

Относительное продольное усилие  $N_0$  в верхнем сечении принималось равным  $N_0/mg = 1,1$ , т.е. порядка 10% от собственного веса эрлифтного става. Эталонной принята волна высотой 5 м (между верхним и нижним пиками) с периодом 5 с. Расчеты устойчиво сви-

детельствуют, что наибольшие при колебаниях изгибные напряжения локализуются в сечениях, равноудаленных от закрепленных концов на расстояниях, равных 11-13% длины всего эрлифта. Кроме того, чувствительность напряжений  $\sigma_U$  гораздо большая к изменению продольного натяжения, чем к изменению периода волны (и, значит, ее длины).

В достаточно обширных на сегодняшний день исследованиях динамики трубопровода глубоководного эрлифта преобладает расчетная модель в виде ассиметричной нити круглого поперечного сечения. Вместе с тем реальные и проектируемые эрлифтные установки включают в себя как локальные, так и распределенные на большой длине элементы (смесители, воздухопровод, силовой кабель и др.), не улучшающие гидродинамическую картину обтекания. Их влияние на формы колебаний, частоты, распределение напряжений, пространственную ориентацию различных участков, как самого трубопровода, так и самих «возмутителей» нельзя обходить вниманием.

На элемент стержня некруглого сечения действуют со стороны наружного потока жидкости главный вектор и главный момент сил давления. Если исключить из рассмотрения продольную (осевую) составляющую главного вектора  $\bar{R} \cdot \bar{l}$  ( $l_1$  - орт касательной к осевой линии, соединяющей центры тяжести сечений), то перпендикулярная ей составляющая  $(R_2 \bar{l}_2 + R_3 \bar{l}_3)$  в случае неколлинеарности проекций на поперечное сечение  $\Pi$   $\bar{V}_c$  – скорости центра тяжести сечения и  $\bar{V}_\infty$  – скорости набегающего потока, раскладывается на силу лобового сопротивления  $\bar{R}_l$  и подъемную силу (рисунок 2). Так как экспериментальные исследования (и теория размеренностей) показывают, что гидродинамические силы пропорциональны скорости потока к единице длины трубного става, т.е. имеющие размерность  $\text{Нм}^{-1}$ ) должны иметь вид

$$|\bar{R}_l| = C_l(\alpha_a) R_{ло}(V_{\pi r}^2); \quad |\bar{R}_n| = C_n(\alpha_a) R_{но}(V_{\pi r}^2)$$

где  $C_l; C_n$  – коэффициенты, определяемые экспериментально;  $\alpha_a$  - угол атаки;  $R_{ло}; R_{но}$  - для круглого стержня вычисляются по формуле:

$$R_{ло} = R_{но} = 0,5 \rho_{ж} D V_{\pi r}^2$$

где  $D$  – диаметр стержня;  $V_{\pi r}^2$  - нормальная составляющая относительной скорости.

Пользуясь теоремами косинуса и синуса можно получить (рисунок 2) формулы для вычисления угла атаки относительной скорости  $\bar{V}_r$  и угла атаки  $\alpha_a$ , если договориться для общности, поворачивать против хода стрелки часов, если смотреть навстречу ей, скорость набегающего потока  $\bar{V}_\infty$  на угол атаки  $\alpha_a$  до совмещения со скоростью  $\bar{V}_r$  и на угол  $\beta$  до совмещения с направлением, противоположным  $\bar{V}_c$ .

$$V_r = \sqrt{V_c^2 + V_\infty^2 + 2V_cV_\infty \cos \beta}$$

$$\frac{V_r}{\sin \beta} = \frac{V_c}{\sin \alpha_a} = \frac{V_\infty}{\sin(\beta - \alpha_a)}$$

Откуда

$$\alpha_a = \beta - \arcsin\left(\frac{V_\infty}{V_r} \sin \beta\right)$$

Нормальная составляющая относительной скорости равна

$$V_{\pi r} = V_r \sin(\beta - \alpha_a) = V_\infty \sin \beta$$

При несимметричной картине обтекания профиля неизбежно появление главного момента гидродинамических сил относительно оси, равного сумме моментов элементарных сил давления на контур сечения

$$M_c = \oint m_c(\bar{q} dS)$$

где  $dS$  – элементарный отрезок контура.

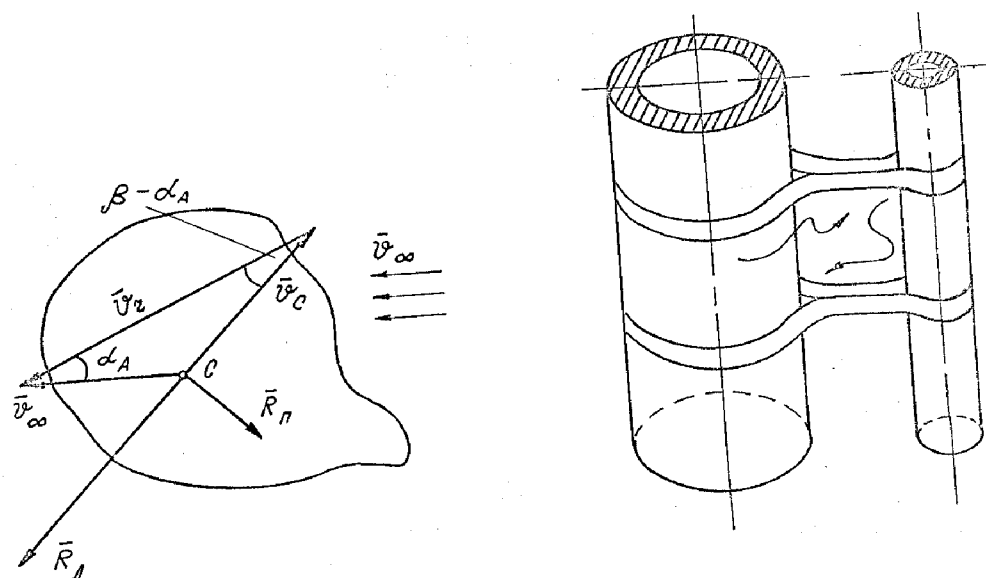


Рисунок 2 - Схема силового воздействия наружного потока жидкости на элемент става глубоководного эрлифта



Распределение сил давления по контуру сечения существенно зависит от режима обтекания, характеризуемого числом Рейнольдса

$$Re = \frac{V_{\infty} D_{\text{экв}}}{\nu}$$

( $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости).

При движении стержня относительно жидкой среды в последней формуле нужно заменить  $V_{\infty}$  на  $V_{kp}$ . Увеличение  $\bar{V}_r$  при определенных значениях  $Re = Re_{kp1}$  (для идеального круглого цилиндра  $Re_{kp1} \approx 150$ ) порождает вихревую дорожку кармана, а при  $Re > 300 = Re_{kp2}$  приводит к пульсационному срыву этих вихрей. Появляются периодические сила  $\bar{F}_k$  и момент  $M_k$ , возбуждающие комбинированные поперечно-крутильные колебания стержня.

При идеально круглом профиле трубы  $M_k = 0$ , а совпадает с  $\bar{R}_n$ . Если же профиль плохо обтекаем, то  $M_k \neq 0$ , что вызовет осевое закручивание эрлифтного става. К тому же  $\bar{F}_k$  не обязательно совпадает с направлением  $\bar{R}_n$ , так что повороты сечения относительно направления  $V_{\infty}$  (и одновременно относительно  $\bar{V}_{rД}$ ) вызовут неупорядоченный срыв вихрей, как следствие, не поддающуюся строгому математическому описанию пульсацию силы и момента Кармана.

В этом случае развившееся упругие крутильные колебания относительно орта  $l_1$  вносят дополнительные возмущения в структуру обтекания, понуждая детерминистскому подходу предпочесть стохастический (вероятностный). Полагая в выражениях

$$F_k = C_k R_{ko} (V_{nr}^2); M_k = C_k^M M_{ko} (V_{nr}^2)$$

гидродинамические коэффициенты сопротивления случайными функциями угла поворота  $\varphi_1$  сечения эрлифта вокруг орта  $l_1$  естественного базиса  $\{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3\}$  раскладываем их в виде обобщенного интеграла Фурье:

$$C_k^i(\varphi_1) = C_0^i + \int_{-\infty}^{+\infty} C_k^i(\omega) l^{i\omega\varphi_1} d\omega, \quad i = (0, M)$$

где  $\omega$  – действительная частота. Можно получить спектральную плотность этих коэффициентов  $S(\omega)$  в составе соотношения

$$\langle C_k^{i*}(\omega) C_k^i(\omega) \rangle = S^i(\omega) \delta(\omega - \omega^1)$$

где угловые скобки обозначают операцию вероятностного осреднения (математическое ожидание) и  $\delta$  – дельта функция Дирака.

Так как угол  $\varphi^1$  – функция времени  $t$ , то гидродинамические коэффициенты можно представить и так:

$$C_K = C_{KO} + \tilde{C}_K(t) \quad \text{и} \quad C_K^M = C_{KO}^M + \tilde{C}_K^M(t)$$

где –  $\tilde{C}_K, \tilde{C}_K^M$  средний случайный разброс, обусловленный указанными выше причинами. Последние ограничены по модулю; оценка верхней границы определяется теоретико-экспериментальным анализом ориентации конкретного профиля по отношению к направлению  $\bar{V}_\infty$  (или  $\bar{V}_r$ ). Подстановка в линейное (матричное) дифференциальное уравнение движения става.

$$\{M\}\ddot{q} + \{B\}\dot{q} + \{C\}q = \frac{1}{2}\{C_K\}\rho V d_{эKB} \cos \omega t$$

здесь  $q$  – векторная обобщенная координата, содержащая компонентами как поперечное смещение  $x$ , так и угловое –  $\varphi_1$ , позволяет разложить последнее на два (векторных же). Исследование того из них, которое описывает зависимость случайных отклонений, накладывающихся на детерминированный усредненный процесс, дает возможность количественно оценить максимально возможные амплитуды колебаний, вызванные случайным, ограниченным сверху, разбросом гидродинамических коэффициентов сопротивления.

**Выводы и направления дальнейших исследований.** При установившемся движении пульпы решение дифференциального уравнения с переменными коэффициентами определяет формы и частоты главных колебаний подъемного трубопровода. Изменение знака действительной части комплексного корня фундаментальной матрицы решения с отрицательного на положительный соответствует критической скорости течения газожидкостной смеси в эрлифте.

В дальнейших исследованиях следует уделить внимание определению максимально возможных амплитуд колебаний подъемного трубопровода при различных значениях гидродинамических коэффициентов сопротивлений.

Список источников.

1. Федосеев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М. Наука, 1973, 400 с.
2. Меркик Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М. Наука, 1980, 240 с.