УДК 624.04(075.8)

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАК СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Шевченко Ф.Л.
(ДонНТУ, г. Донецк, Украина)

Введение

Известно, что динамический расчет, стержневых систем с распределенными параметрами на продольные колебания сводится к решению волнового уравнения. Для этого нужно найти собственные функции, которые при наличии распределенных и сосредоточенных масс будут ортогональными с весом. Нахождение весовых функций и квадрата нормы собственных функций представляет трудоемкую задачу, как из математических соображений, так и вычислительных, что связано с плохой сходимостью рядов Фурье.

По этой причине на практике широко используются приближенные расчеты, основанные на замене действительной системы с распределенными параметрами условной невесомой системой с одной приведенной массой. Однако, точность таких приближенных способов зависит от удачного выбора деформированной оси стержня при колебаниях.

Основная часть

В настоящей статье предлагается упрощенное решение динамических задач, когда приведенная масса весомого стержня находится непосредственным сравнением частоты основного тона колебаний системы с распределенными параметрами с частотой колебаний условной одномассовой системы.

Рассмотрим решение задачи о продольных колебаниях методами математической физики, т.е. на основании решения волнового уравнения

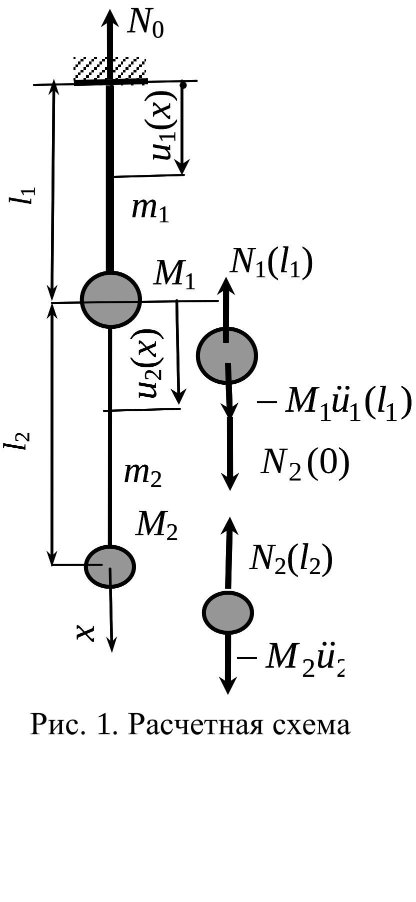

Рис. 1. Расчетная схема

$$\ddot{u}(x,t) - c^2 u''(x,t) = 0\,, \quad c = \sqrt{\frac{EF}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\gamma}}\,, \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ – продольные перемещения поперечных сечений стержня с жесткостью на растяжение-сжатие EF, погонной массой m и плотностью γ (рис. 1).

Решение волнового уравнения (1) методом Фурье $u(x,t) = \sum u(x)T(t)$ сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, одно из которых определяет гармонический закон продольных колебаний с собственными частотами

$$\omega = k\sqrt{\frac{EF}{m}} \qquad (2)$$

и сдвигом фазы μ

$$T(t) = C\sin(\omega t + \mu)\,. \qquad (3)$$

Второе уравнение

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0\,, \qquad k = \omega / c$$

определяет собственные формы колебаний и его решение может быть представлено в начальных параметрах u_0 и N_0 [1]

$$u(x) = u_0 \cos kx + \frac{N_0}{kEF} \sin kx\,. \tag{4}$$

Начальные параметры u_0 и N_0 (перемещение и усилие в начале координат) находятся из граничных условий и могут быть выражены через один параметр D_n. Тогда уравнение движения сечений будет представлено в собственных функциях $X_n(x)$

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n X_n(x) \sin(\omega_n t + \mu_n)\,. \tag{5}$$

Собственные функции однородного стержня при любых условиях закрепления удовлетворяют условию ортогональности [2]

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0\,, \tag{6}$$

а при наличии сосредоточенных масс M_i и при ступенчато-переменном сечении стержня условие ортогональности (6) принимает вид [3]

$$\int_0^l m X_n(x) X_m(x) dx + \sum M_i X_n(x_i) X_m(x_i) = 0\,. \tag{7}$$

Свойства собственных функций $X(x)$ стержневой системы определяются равенством [2]

$$\left(k_n^2 - k_m^2\right) \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \left(X_n(x) X'_m(x) - X_m(x) X'_n(x)\right)\Big|_0^l\,, \tag{8}$$

а для системы стержней переменного сечения с учетом продольных усилий $N = EFX'$ зависимость (8) принимает вид [4]

$$\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right) \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \sum \frac{EF_i}{m_1} \left(X_n(x) X'_m(x) - X_m(x) X'_n(x)\right)\Bigg|_0^l\,. \tag{9}$$

Отсюда с учетом весовых функций $\rho(x)$ можно получить формулу для вычисления квадрата нормы собственных функций

$$\Delta_n^2 = \int_0^l \rho(x) X^2(x) dx .$$

Такое точное решение задачи методами математической физики на собственные и вынужденные колебания систем с распределенными параметрами оказывается весьма громоздким и неудобным для практического пользования.

Поэтому рассмотрим упрощенный динамический расчет, основанный на замене системы с распределенными параметрами одномассовой невесомой системой.

Суть этого упрощения основана на равенстве частоты основного тона собственных колебаний системы с распределенными параметрами и частоты колебаний эквивалентной невесомой системы с одной степенью свободы. Предполагается, что частота основного тона колебаний системы с распределенными параметрами заранее известна или вычисляется из граничных условий заданной системы [5].

Однако в случае стержневых систем ступенчато-переменного сечения частотные уравнения в литературных источниках встречаются весьма редко. Но некоторые задачи можно найти в справочнике [2].

Напомним, как получить частотное уравнение для двухступенчатого стержня с распределенными и сосредоточенными массами (см. рис. 1).

Для верхнего участка с учетом защемления уравнение перемещения сечений (4) и уравнение продольных усилий принимают вид:

$$u_1(x) = \frac{N_0}{k_1 EF_1} \sin k_1 x , \qquad N_1(x) = N_0 \cos k_1 x . \tag{10}$$

В конце этого участка от сосредоточенной массы M_1 возникает сила инерции

$$P_1 = -M_1 \ddot{u}_1(l_1) = M_1 \omega^2 u_1(l_1) = M_1 \frac{k_1^2 EF_1}{m_1} \cdot \frac{N_0}{k_1 EF_1} \sin k_1 x = N_0 \xi_1 \lambda_1 \sin \lambda_1 , \tag{11}$$

где обозначено $\xi_1 = \dfrac{M_1}{m_1 l_1}$, $\lambda_1 = k_1 l_1$.

В начале координат второго участка возникают начальные параметры $u_2(0)$ и $N_2(0)$, которые определяются из уравнений первого участка (10), (11):

$$u_2(0) = u_1(l_1) = \frac{N_0}{k_1 EF_1} \sin \lambda_1 , \quad N_2(0) = N_1(l_1) - P_1 = N_0 \left(\cos \lambda_1 - \xi_1 \lambda_1 \sin \lambda_1 \right). \tag{12}$$

С учетом этих начальных параметров и равенства волновых чисел $k = \omega \sqrt{\dfrac{m}{EF}} = \omega \sqrt{\dfrac{\gamma}{E}}$, расчетные уравнения второго участка принимают вид:

$$u_2(x)=\frac{N_0}{k_1EF_1}\sin\lambda_1\cos k_2x+\frac{N_0}{k_2EF_2}\left(\cos\lambda_1-\xi_1\lambda_1\sin\lambda_1\right)\sin k_2x\,,$$

$$N_2(x)=-N_0\frac{k_2EF_2}{k_1EF_1}\sin\lambda_1\sin k_2x+N_0\left(\cos\lambda_1-\xi_1\lambda_1\sin\lambda_1\right)\cos k_2x\,.$$

Сила инерции массы M_2

$$P_2=-M_2\ddot{u}_2(l_2)=M_2\frac{k_2^2EF_2}{m_2}u_2(l_2)=M_2\frac{k_2^2EF_2}{m_2}\frac{N_0}{k_1EF_1}*$$
$$*\left[\sin\lambda_1\cos\lambda_2+\frac{F_1}{F_2}\frac{k_1}{k_2}\left(\cos\lambda_1-\xi_1\lambda_1\sin\lambda_1\right)\sin\lambda_2\right].$$

Из условия динамического равновесия нижней массы $N_2(l_2)=P_2$ получаем частотное уравнение

$$-\frac{F_2}{F_1}\sin\lambda_1\sin\lambda_2x+\left(\cos\lambda_1-\xi_1\lambda_1\sin\lambda_1\right)\cos\lambda_2=$$
$$=\xi_2\lambda_2\frac{F_2}{F_1}\sin\lambda_1\cos\lambda_2+\xi_2\lambda_2(\cos\lambda_1-\xi_1\lambda_1\sin\lambda_1)\sin\lambda_2$$

или

$$\mathrm{tg}\lambda_2=\frac{\cos\lambda_1-\xi_1\lambda_1\sin\lambda_1-\frac{F_2}{F_1}\xi_2\lambda_2\sin\lambda_1}{\frac{F_2}{F_1}\sin\lambda_1+\xi_2\lambda_2\left(\cos\lambda_1-\xi_1\lambda_1\sin\lambda_1\right)}=\frac{1-\xi_1\lambda_1\mathrm{tg}\lambda_1-\frac{F_2}{F_1}\xi_2\lambda_2\mathrm{tg}\lambda_1}{\frac{F_2}{F_1}\mathrm{tg}\lambda_1+\xi_2\lambda_2\left(1-\xi_1\lambda_1\mathrm{tg}\lambda_1\right)}\,. \tag{13}$$

Теперь можно рассмотреть конкретные случаи замены стержневой системы с распределенными параметрами и сосредоточенными массами одномассовой системой (см. рис. 1).

Пусть
$$l_1=l_2=l/2\,,\;\; M_1=m_1l_1=2m\frac{l}{2}\,,$$
$$\left(\xi_1=1\right),\;\; M_2=m_2l_2=m\frac{l}{2}\,,\;\; (\xi_2=1)\,,$$
$$F_1=2F_2=2F\,,\;\; M=M_1+M_2=\frac{3}{2}ml\,.$$

Прежде всего, рассмотрим стержень ступенчато-переменного сечения с распределенными массами m_1 и m_2 без сосредоточенных масс (рис. 2).

Точное решение такой задачи по вычислению частоты первого тона собственных колебаний сводится к трансцендентному уравнению [2]

$$\mathrm{tg}\lambda_1\cdot\mathrm{tg}\lambda_2=\frac{F_1}{F_2}\,, \tag{14}$$

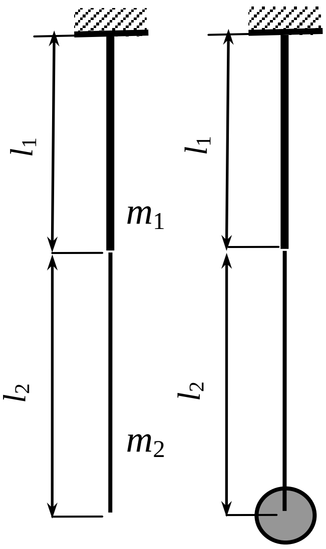

Рис. 2. Расчетная схема упрощенного расчета ступенчатого стержня без сосредоточенных масс

которое следует из общего решения (13) при $\xi_1 = \xi_2 = 0$. т.е. $\mathrm{tg}^2\lambda_1 = 2$, так как $\lambda_1 = \lambda_2$.

Отсюда находим первый корень $\lambda_1 = k_1 l_1 = k\dfrac{l}{2} = 0{,}9553$. Следовательно, частота первого тона колебаний

$$\omega_1 = 2\frac{0{,}9553}{l}\sqrt{\frac{EF_1}{m_1}} = \frac{1{,}9106}{l}\sqrt{\frac{EF_1}{m_1}}. \qquad (15)$$

Заменим эту систему с распределенными параметрами невесомым двухступенчатым стержнем с одной приведенной массой $M_{ïð} = M\xi = \dfrac{3}{2}ml\xi_ï$ на конце стержня, где единичное перемещение $\delta_{11} = \dfrac{l}{2EF_1} + \dfrac{l}{2EF_2} = \dfrac{3}{4}\dfrac{l}{EF}$.

Из условия равенства частот этих двух систем $\dfrac{\lambda}{l}\sqrt{\dfrac{EF_1}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{1}{\delta_{11}M_{ïð}}}$, т.е. из условия $\dfrac{2\lambda_1}{l}\sqrt{\dfrac{EF}{m}} = \sqrt{\dfrac{4EF\cdot 2}{3l\cdot 3ml\xi_ï}}$, находим коэффициент приведения масс

$$\xi_ï = \frac{8}{9\cdot 4\cdot \lambda_1^2} = 0{,}2435. \qquad (16)$$

Теперь рассмотрим колебания ступенчатого весомого стержня с одной сосредоточенной массой $M_1 = m_1 l_1 = ml$ (рис. 3).

Так как $\delta_{11} = \dfrac{l_1}{EF_1} = \dfrac{l}{2\cdot E\cdot 2F}$, а $\delta_{22} = \dfrac{l_1}{EF_1} + \dfrac{l_2}{EF_2} = \dfrac{3l}{4EF}$, то из условия равенства частот невесомого стержня с массой M_1, приложенной в точке 1 и стержня с приведенной массой $M_{пр}$, приложенной в точке 2, найдем, что приведенная в точку 2 масса составляет одну треть от массы M_1.

С учетом приведенной массы от собственного веса стержня (16) получаем суммарную приведенную массу

$$M_{ïð} = \frac{1}{3}ml + 0{,}2435\cdot\frac{3}{2}ml = 0{,}69858ml.$$

Приближенное значение частоты колебаний эквивалентной системы

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{22}M_{ïð}}} = \sqrt{\frac{4EF}{3l\cdot 0{,}6986ml}} = \frac{1{,}3815}{l}\sqrt{\frac{EF}{m}}.$$

Для вычисления точного значения частоты основного тона колебаний рассматриваемой системы, в уравнение (13) нужно положить $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, что приведет к частотному уравнению

$$\operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{1 - \xi_1\lambda_1 \cdot \operatorname{tg}\lambda_1}{\frac{F_2}{F_1}\operatorname{tg}\lambda_1} = 2\frac{1 - \lambda_1 \cdot \operatorname{tg}\lambda_1}{\operatorname{tg}\lambda_1}.$$

Отсюда находим $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{kl}{2} = 0{,}7156$, а частота первого тона колебаний $\omega = \frac{2\lambda}{l}\sqrt{\frac{EF}{m}} = \frac{1{,}4312}{l}\sqrt{\frac{EF}{m}}$, что больше приближенного значения на 3,47%.

В следующем примере к нижнему концу весомому ступенчатого стержня приложим массу $M_2 = m_2 l_2 = m\frac{l}{2}$.

Суммарная приведенная масса равна

$$M_{\ddot{\imath}\eth} = 0{,}5ml + 0{,}2435 \cdot 1{,}5ml = 0{,}8652ml$$

и приближенное значение частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{22}M_{\ddot{\imath}\eth}}} = \sqrt{\frac{4EF}{3l \cdot 0{,}8652ml}} = \frac{1{,}2413}{l}\sqrt{\frac{EF}{m}}.$$

В точном решении в (13) положим $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 1$, получим частотное уравнение

$$\operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{1 - \frac{F_2}{F_1}\xi_2\lambda_2\operatorname{tg}\lambda_1}{\frac{F_2}{F_1}\operatorname{tg}\lambda_1 + \xi_2\lambda_2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\lambda_2\operatorname{tg}\lambda_1}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2 - \lambda_2\operatorname{tg}\lambda_1}{\operatorname{tg}\lambda_1 + 2\lambda_2}.$$

Отсюда с учетом $\lambda_1 = \lambda_2$ находим $\lambda = 0{,}6421$ и точное значение частоты основного тона колебаний

$$\omega = \frac{2\lambda}{l}\sqrt{\frac{EF_2}{m_2}} = \frac{1{,}2842}{l}\sqrt{\frac{EF}{m}},$$

что на 3,345% отличается от приближенного значения.

Наконец, рассмотрим весомый ступенчатый стержень с двумя сосредоточенными массами $M_1 = m_1 l_1$ и $M_2 = m_2 l_2$. Из (13) при $\xi_1 = \xi_2 = 1$ получим

$$\operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{1 - \xi_1\lambda_1\operatorname{tg}\lambda_1 - \frac{F_2}{F_1}\xi_2\lambda_2\operatorname{tg}\lambda_1}{\frac{F_2}{F_1}\operatorname{tg}\lambda_1 + \xi_2\lambda_2(1 - \xi_1\lambda_1\operatorname{tg}\lambda_1)} = \frac{1 - \frac{3}{2}\lambda_1\operatorname{tg}\lambda_1}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\lambda_1 + \lambda_2(1 - \lambda_1\operatorname{tg}\lambda_1)} = \frac{2 - 3\lambda_1\operatorname{tg}\lambda_1}{\operatorname{tg}\lambda_1 + 2\lambda_1(1 - \lambda_1\operatorname{tg}\lambda_1)}.$$

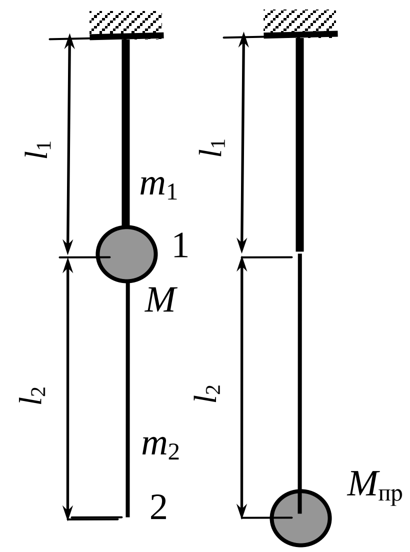

Рис. 3. Расчетная схема упрощенного расчета ступенчатого стержня с одной сосредоточенной массой M_1

Отсюда находим первое значение собственных чисел $\lambda = \frac{kl}{2} = 0{,}5742$ и частоту основного тона колебаний

$$\omega = \frac{1{,}1484}{l}\sqrt{\frac{EF}{m}}\,.$$

Для приближенного решения к невесомому ступенчатому стержню нужно приложить приведенную массу

$$M_{\text{пр}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 0{,}3652\right)ml = 1{,}1985ml\,,$$

что определяет приближенное значение частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{22}M_{\text{пр}}}} = \sqrt{\frac{4EF}{3l \cdot 1{,}1985ml}} = 1{,}055\sqrt{\frac{EF}{m}}\,,$$

что на 8,13% меньше точного значения.

Выводы

После вычисления частоты основного тона собственных колебаний легко решить задачу на вынужденные колебания от гармонической силы $P\sin\theta t$ или на ударное загружение. При этом результаты приближенного расчета будут несколько завышены, что обеспечит дополнительный запас прочности.

Так можно избежать весьма кропотливых точных расчетов, связанных с определением весомых функций, квадрата нормы собственных функций и суммирования рядов Фурье.

Список литературы: 1. Шевченко Ф.Л. Будівельна механіка. Спеціальний курс. Динаміка пружних стержньових систем. Донецьк: РИА ДонНТУ, 2000. – 292 с. **2.** Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. д-ра техн. наук И.А. Биргера и чл.-корр. АН Латвийской ССР Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1988. – 567 с. **3.** Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с. **4.** Улитин Г.М. К теории колебаний стержневых систем ступенчато-переменной жесткости //Полтава: ПлтНТУ, 2005. – 279-283. **5.** Шевченко Ф.Л. Упрощенный динамический расчет стержневых систем с распределенными параметрами.// Український міжвідомчий науково-технічний збірник. Автоматизація виробничих процесів та приладобудування. Вип. 40. – Львів, 2006. – С. 286-396.

СПРОЩЕНИЙ РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЬОВИХ СИСТЕМ СТУПІНЧАСТО-ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ НА ПОЗДОВЖНІ КОЛИВАННЯ ЯК СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Шевченко Ф.Л.

Розглядається спрощений розрахунок стержньових систем ступінчасто-змінного перерізу на поздовжні коливання як систем з розподіленими параметрами.

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАК СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Шевченко Ф.Л.

Рассматривается упрощенный расчет стержневых систем ступенчато-переменного сечения на продольные колебания как систем с распределенными параметрами.

THE SIMPLIFIED CALCULATION OF ROD SYSTEMS OF STEP-VARIABLE SECTION ON LONGITUDINAL FLUCTUATIONS AS SYSTEMS WITH THE DISTRIBUTED PARAMETERS

Shevchenko F.L.

The simplified calculation of rod systems of is step-variable section on longitudinal fluctuations as systems with the distributed parameters.

Рецензент: д.т.н., проф. Оніщенко В.П.