

Вейвлетне перетворення

1. Вейвлети та їхні властивості

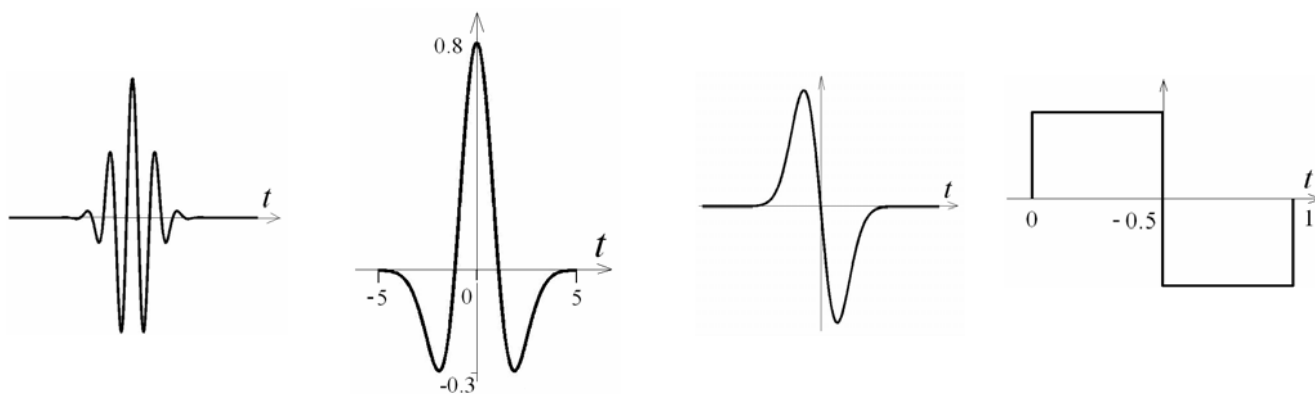
У загальному випадку, довільний сигнал може бути представлений у вигляді зваженої суми добутків деяких функцій і коефіцієнтів, тобто

$$s(t) = \sum_k C_k \cdot \Psi_k(t),$$

де Ψ_k - функція перетворення, C_k - коефіцієнти.

Наприклад, перетворення Фур'є розкладає довільний сигнал на елементарні гармонійні коливання із різними частотами, а у виразах використовується одна експонентна функція або дві дійсних - синус та косинус.

При вейвлетному перетворенні для аналізу сигналів використовуються спеціальні функції – *вейвлети*. Вейвлет (*wavelet* - коротка хвиля) – це узагальнена назва функцій певної форми, які створюються на основі спеціальних базисних функцій (материнських вейвлетів), які визначають їхній вид і властивості (рис. 1).



$$\Psi(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$$

$$\Psi(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} \right) (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Psi(t) = 1 \quad t \in [0, 0.5[$$

$$\Psi(t) = -1 \quad t \in [0.5, 1[$$

$$\Psi(t) = 0 \quad t \notin [0, 1[$$

а) Морле

б) Мексиканський
капелюх

в) Асиметричний

г) Хаар

Рис. 1 Приклади вейвлет-функцій

Властивості вейвлетів:

- локалізація в часі,
- нульове значення інтеграла,
- зрушення в часі,
- масштабованість,
- обмежений частотний спектр (вейвлет Хаара - виключення).

Вейвлет описується вираженням:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi_0 \left(\frac{t-b}{s} \right),$$

де Ψ_0 - базисний вейвлет, параметр b задає зрушення, а s – масштаб ($s > 0$).

Параметр зрушення задає крок переміщення вейвлета по часовій осі. Вихідне значення параметра зрушення - нульове.

Масштабування припускає розширення або стиск вейвлета. У базовому вейвлету значення параметра масштабування дорівнює одиниці ($s=1$). Зі збільшенням масштабу ($s>1$) вейвлет розширюється, а зі зменшенням ($s<1$) – стискується. Зі зміною масштабу також змінюється й амплітуда вейвлета.

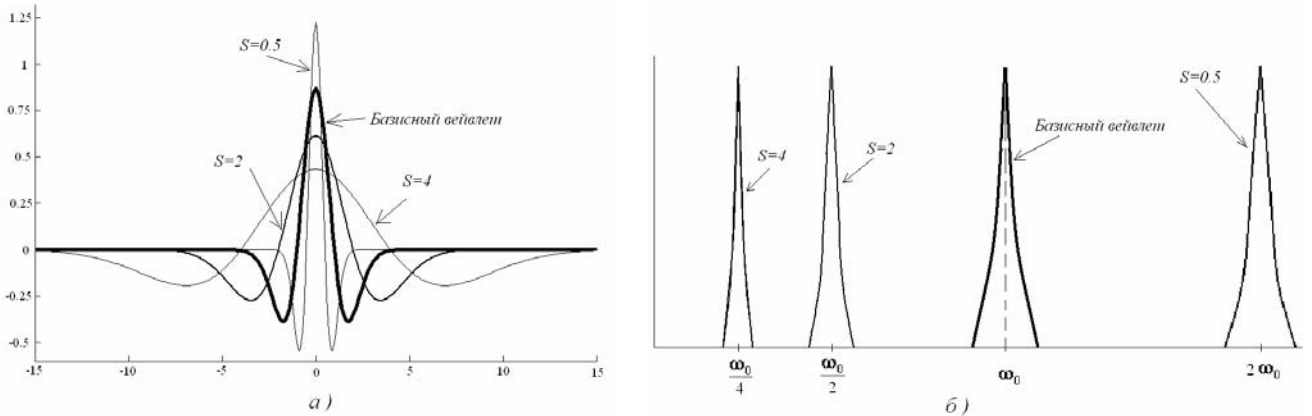


Рис.2 Масштабування вейвлета

Оскільки вейвлети є функціями часу, то вони мають частотне подання або Фур'є-образ $\tilde{\psi}(\omega)$ (рис.2б). Вейвлет має нульове значення інтеграла й, отже, $\tilde{\psi}(0) = 0$, а Фур'є-образ зміщений по осі часу та розташований у деякої ненульової частоти, яка називається середньою (центральною) частотою вейвлета. При зменшенні масштабу вейвлет у просторі звужується, а його середня частота підвищується й спектр переміщується в область більше високих частот і розширюється (рис.3). При збільшенні масштабу аргумент функції зменшується, що означає зменшення частоти вейвлета. Таким чином, масштаб можна розглядати як параметр, зворотний частоті.

У загальному випадку середня частота вейвлета визначається ітераційними методами.

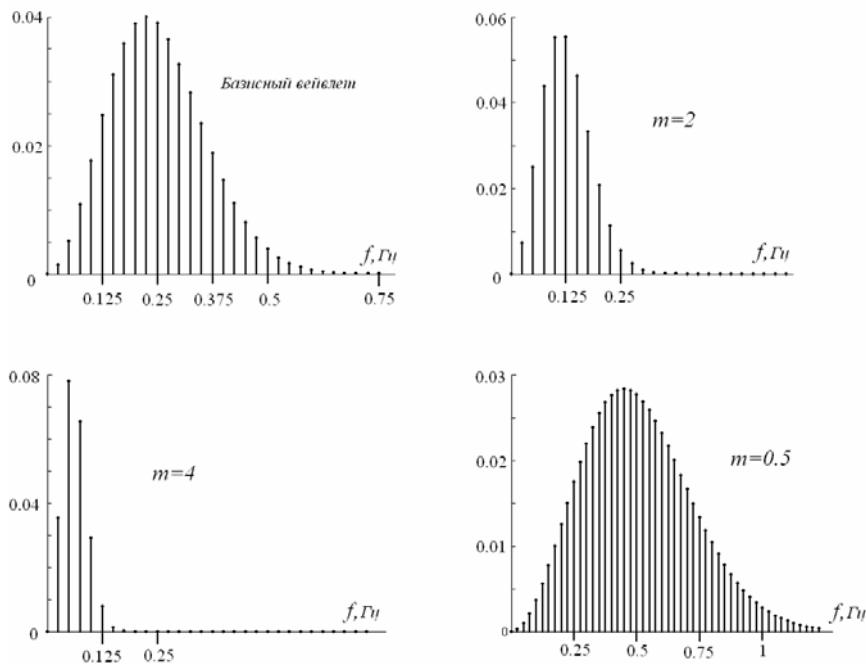


Рис.3 Частотний спектр вейвлета при різних масштабах

2. Безперервне вейвлетне перетворення (CWT)

Безперервне вейвлетне перетворення (БВП) відповідає наступному вираженню:

$$CWT_x^\Psi(b, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int x(t) \cdot \Psi_0\left(\frac{t-b}{s}\right) dt,$$

де $x(t)$ - сигнал.

Результатом БВП є набір числових значень CWT , що залежать від масштабу та зрушення. Коефіцієнти БВП визначають *ступінь подоби* (схожості) застосовуваного вейвлета та аналізованого сигналу.

Методика розрахунку коефіцієнтів БВП аналогічна розрахунку кореляції. Розрахунок починається з малого масштабу, що відповідає самому стислому вейвлету, і триває у бік великого. Перед початком розрахунку встановлюється крок зрушення, що, як правило, не дорівнює нормалізованому кроку зрушення b_0 , рівному одиниці.

Вейвлет міститься в початок і перемножується із сигналом, інтегрується, а результат множиться на $1/\sqrt{s}$ для нормалізації. Потім вейвлет зрушується на встановлений крок і процедура повторюється доти, поки вейвлет не досягне кінця сигналу, тобто аналогічно розрахунку кореляції. У результаті формується рядок значень у масиві коефіцієнтів БВП для зазначеного масштабу. Потім значення масштабу збільшується й процедура повторюється. При зміненому масштабі знову формуються рядок на масштабно-тимчасовій площині.

При графічному поданні результатів розрахунку БВП масштаб вказується на вертикальній осі, а зрушення - на горизонтальній (рис.4). По графічному поданню можна судити про кореляцію аналізованого сигналу та вейвлета за певних умов розрахунку.

Аналогія - географічні карти різних масштабів.

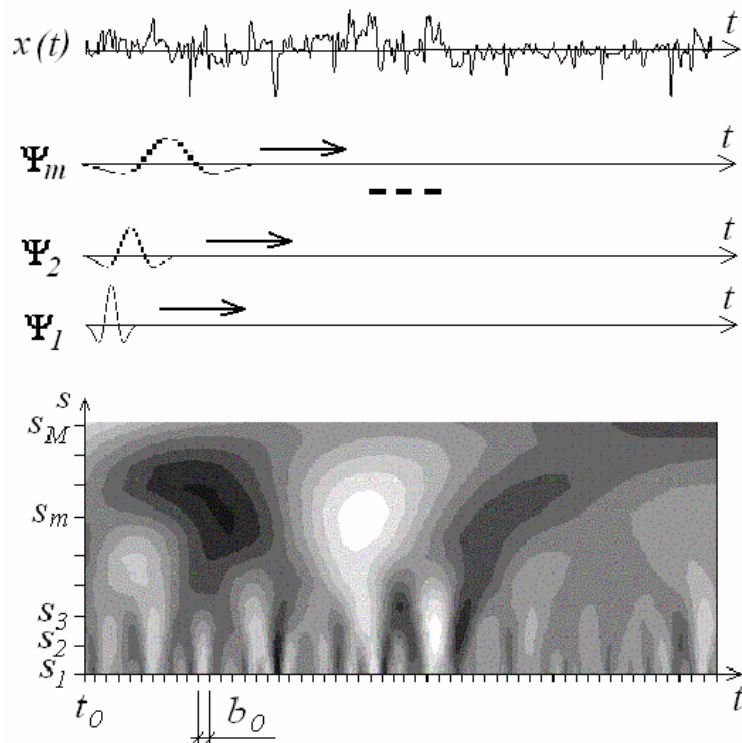


Рис.4 Приклад вейвлет-перетворення

Якщо при поточному масштабі в сигналі присутні частоти, то кореляція вейвлета із сигналом в інтервалі присутності частоти сформує відносно велике значення. У протилежному випадку результат малий або дорівнює нулю.

Таким чином, частота не є безпосередньо результатом БВП. Але оскільки вейвлет є сигналом зі своїм частотним набором, то частотні характеристики аналізованого сигналу розраховуються за допомогою масштабування в ході БВП. Результат БВП указує розподіл у часі частотних компонентів сигналу. Тому графічне зображення результату БВП називається *частотно-тимчасовим спектром*.

Застосування БВП - медична діагностика, астрофізика, локація.

Особливістю вейвлетного аналізу є можливість використання сімейства базисних функцій, що реалізують через параметри вейвлетів різні варіанти співвідношення невизначеності Гейзенберга. Зі збільшенням масштабу вейвлет розширюється, його частота зменшується, а рядок формується при одночасно зміненому розмірі вікна та значенні частоти (на відміну від віконного перетворення Фур'є). На додаток до зміни масштабу припустима зміна кроку.

На рис.5 показаний у тривимірному варіанті результат БВП нестационарного сигналу із частотами 30, 20, 10 і 5 Гц.

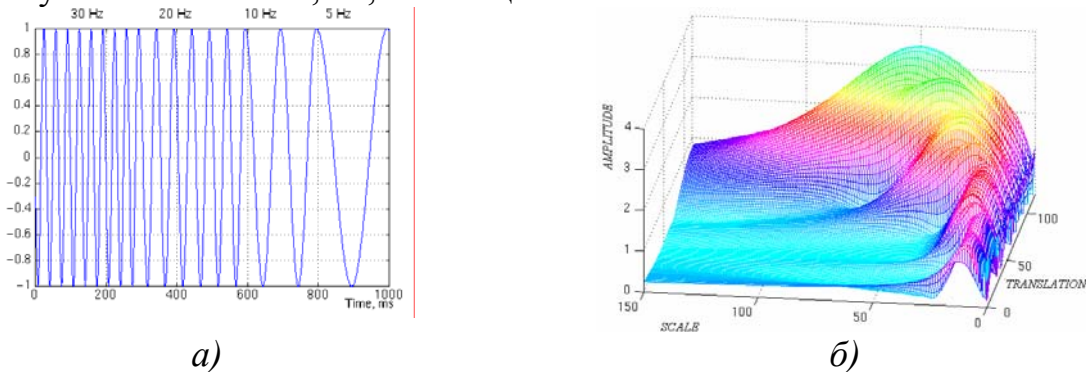


Рис.5. Приклад сигналу і його вейвлетного перетворення

Осі графіка нормалізовані. 100 точок осі зрушень відповідають 100 однаковим зрушенням із кроком 10мс, тобто всього 1000мс, а 150 точок осі масштабу - смузді частот 40Гц. Числа на осях є номерами відліків. Малі масштаби відповідають високим частотам. Верхня частота сигналу дорівнює 30Гц і вона з'являється на найменших масштабах при номері зрушення від 0 до 30 (з нормалізованим кроком 1), що відповідає наявності цієї частоти в сигналі від 0 до 300мс. На інтервалі номерів зрушень від 30 до 60 (інтервал часу від 300мс до 600мс) і наступному наборі масштабів проявляється частота 20Гц. Найнижча частота сигналу 5Гц з'являється наприкінці осі зрушень (від 80 до 100) і на ще більших масштабах.

Якщо ж стосовно цього сигналу виконати перетворення Фур'є, то сформований частотний спектр більшою мірою буде відповідати сигналу, що представляє собою суму частот, які є присутні на всьому інтервалі існування сигналу.

3. Дискретизація обчислень при вейвлет-перетворенні

Реалізація БВП неминує припускати дискретизацію обчислень. Найпростіший варіант - рівномірний розподіл частотно-тимчасової площини. Але при цьому кількість коефіцієнтів є надлишковою.

Перетворення на масштабі s_1 із кроком b_1 , що формує N_1 значень, відповідає частоті дискретизації $f_1=1/b_1$. БВП на масштабі s_2 із кроком b_2 , що формує N_2 значень, відповідає частоті дискретизації $f_2=1/b_2$. Але з погляду відтворення сигналу, тобто відповідно до теореми Найквіста, кількість відліків N_2 допускається менше N_1 , тому що масштаб s_2 більше s_1 . Безпосередньо, кількість відліків залежить від кроку. Таким чином, співвідношення між кроком і масштабом наступне: $b_2=b_1(s_2/s_1)$, тобто зі збільшенням масштабу крок дискретизації теж збільшується, а кількість обчислень і відліків зменшується.

У випадку відсутності необхідності відтворення сигналу БВП може виконуватися з будь-якою частотою дискретизації.

Таким чином, вейвлет-перетворення припускає дискретизацію значень масштабу та кроку в такий спосіб: $s_m=s_0^m$ і $b=ks_m b_0$. Змінна m у такому трактуванні називається *масштабним коефіцієнтом*. Практично масштаб дискретизується за логарифмічним законом, а потім відповідно до масштабу встановлюється крок (частота) дискретизації. Зміна кроку дискретизації пов'язане з кількістю відліків, необхідних для достовірного подання сигналу. Якщо виходити із припущення, що при БВП завжди задовольняється умова Найквіста, то відповідно збільшенню кроку дискретизації можна зменшувати кількість коефіцієнтів БВП, тобто збільшувати параметр зрушення.

Підстава логарифма може бути довільна, але звичайно дорівнює 2. Отже, значення БВП обчислюють на масштабах 1, 2, 4, 8, 16 і т.д. Відповідно до цього дискретизується часова вісь, тобто зі зміною масштабу у два рази частота дискретизації знижується вдвічі та формується вдвічі менше відліків.

При дискретних значеннях масштабу і кроку функція, що деталізує, може бути представлена в такий спосіб:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi_0\left(\frac{t-b}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{s_0^m}} \Psi_0\left(\frac{t-ks_0^m b_0}{s_0^m}\right) = \frac{1}{\sqrt{s_0^m}} \Psi_0(s_0^{-m}t - kb_0),$$

де k і m - цілі числа, b_0 - мінімальний крок дискретизації безперервного сигналу (не дорівнює нулю і може бути довільним), s_0 - підстава масштабу (більше одиниці). Звичайно приймається $s_0 = 2$, $b_0 = 1$. Тоді вираження приймає вид:

$$\Psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi_0(2^{-m}t - k)$$

Результати вейвлет-перетворення можуть бути використані для відтворення сигналів. При відтворенні вихідний масштаб (при $m=0$) відповідає самому низькочастотному вейвлету, а вираження приймає вид:

$$\Psi_{m,k}(t) = \sqrt{2^m} \Psi(2^m t - k)$$

Для вейвлета Хаара це відповідає змінам, які показано на рис.7 (зміни амплітуди не показані).

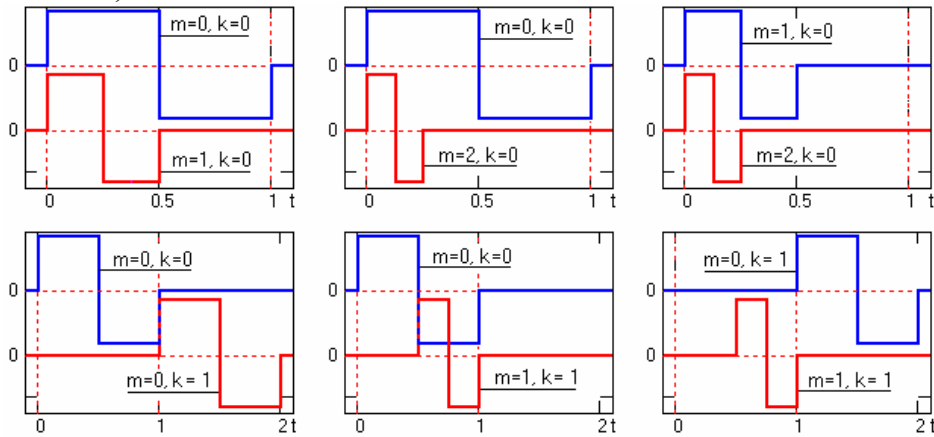


Рис.7 Вейвлети Хаара

4. Основи кратномасштабного аналізу

Теорія, на положеннях якої базується дискретне вейвлетне перетворення, називається *кратномасштабним аналізом* (КМА). Відповідно до теорії КМА сигнал представляється у вигляді сукупності його послідовних наближень (рекурсії).

Наприклад, є сигнал, представлений вісьма значеннями. На наступному, більше грубому, рівні подання сигнал представлений чотирма значеннями. При цьому перетворення припускає розрахунок напівсуми парних компонентів. Коефіцієнти, що деталізують, представляють половину від приростів рівня щодо середнього значення: $(9-7)/2=1$ і $(3-5)/2=-1$.

Процес перетворення:

Значення сигналу (коефіцієнти апроксимації c_j)	Додаткові дані (коефіцієнти деталізації d_j)	Рівень перетворення (рівень апроксимації) j
9 9 8 6 5 1 2 8		0 (вихідний сигнал)
9 7 3 5	0 1 2 -3	1
8 4	1 -1	2
6	2	3

Для відтворення сигналу досить зберігати його грубе значення на деякому рівні перетворення і додаткові дані, наприклад, [6, 2, 1, -1, 0, 1, 2, -3] або [8, 4, 1, -1, 0, 1, 2, -3]. Значення додаткових даних свідомо менше значень відліків вихідного сигналу. Тому багатьма коефіцієнтами можна зневажити, і, отже, розмір закодованого сигналу значно менше вихідного.

Відповідно до теорії КМА таке перетворення називається розкладанням на *апроксимуючі* та коефіцієнти, що деталізують (рис.8а). Результати розкладання залежать від *апроксимуючої функції* $\varphi_j(t)$ (функції масштабу), *функції, що деталізує* $\psi_j(t)$, та числа кроків перетворення (рівнів апроксимації), що задається параметром J (у прикладі $J=3$, номер рівня $j=1 \dots J$)... Оскільки довжина сигналу на кожному кроці зменшується, то існує межа числа кроків розкладання J .

При відтворенні сигнал представляється множиною послідовних наближень. На кожному рівні апроксимації значення сигналу залежить від апроксимуючих, коефіцієнтів, що деталізують, і функцій відтворення (рис.8б).

На вірогідність відтворення впливають:

- округлення, тобто погрішність обчислень коефіцієнтів при розкладанні,
- квантування, тобто рівень обнуління коефіцієнтів, що деталізують,
- кількість кроків відтворення (у якості остаточного може бути прийнятий один із проміжних результатів апроксимації).

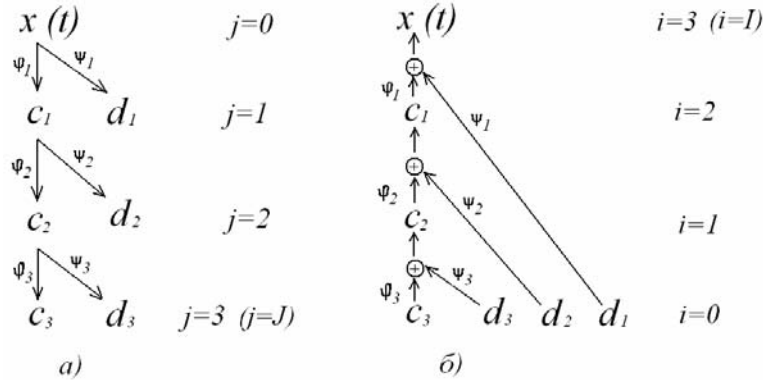


Рис.8 Перетворення сигналу відповідно до теорії КМА

Кількість коефіцієнтів залежить від рівнів розкладання (рис.9а).

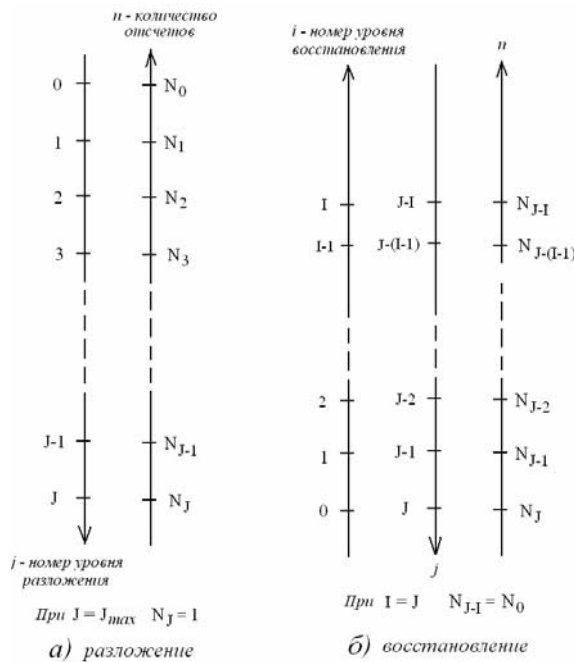


Рис.9 Параметри перетворення відповідно до теорії КМА

При розкладанні коефіцієнти розраховуються відповідно до виражень:

$$c_{j,k} = \sum_k c_{j-1,k} \Phi_{j,k}, \quad d_{j,k} = \sum_k c_{j-1,k} \Psi_{j,k}, \quad \text{де } k - \text{ номер відліку.}$$

Вихідний сигнал відтворюється за допомогою розрахунку апроксимуючих коефіцієнтів і є межею наближення $x(t) = \lim_{i \rightarrow J} x_i(t)$:

$$x_i(t) = c_{j,k} = \sum_k c_{j+1,k} \Phi_{j+1,k}(t) + \sum_k d_{j+1,k} \cdot \Psi_{j+1,k}(t), \quad \text{де } j = J-i.$$

Таким чином, сигнал можна визначити як результат підсумовування значень сигналу на деякому довільному (можливо попередньому або початковому) рівні апроксимації та коефіцієнтів, що деталізують, від цього довільного рівня до поточного, що відповідає ітераційній формулі:

$$x_i(t) = x_{i-1}(t) + \Delta x_{i-1} \quad \text{або}$$

$$x_i(t) = x_0(t) + \sum_{i=0}^{J-i} \Delta x_i = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k} + \sum_{i=J}^{J-i} \sum_k d_{i,k} \cdot \psi_{i,k}(t),$$

де $x_0(t)$ – подання сигналу на максимальному рівні розкладання ($j=J$), тобто нульовому рівні відтворення ($i=0$), що припускає використання базисного варіанта апроксимуючої функції.

Відповідно до теорії КМА розкладання і відтворення засновані на використанні спеціальних коефіцієнтів, що вказують на співвідношення між апроксимуючою та функцією, що деталізує, і перетворення, що встановлюють закономірність. Доведено, що при прямому і зворотному перетворенні можливо достовірно розкладання і відтворення сигналу, якщо для цілих n існують коефіцієнти $\{h_n\}$ і $\{g_n\}$, при яких виконуються умови виражень масштабного співвідношення:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n),$$

де n - номер коефіцієнта.

Для вейвлета Хаара умови виконуються при значеннях: $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$, $g_0 = 1/\sqrt{2}$, $g_1 = -1/\sqrt{2}$. При цьому:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t - 0) \right] + \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t - 1) \right] = \phi(2t) + \phi(2t - 1)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t - 0) \right] + \sqrt{2} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \phi(2t - 1) \right] = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$$

Із цих виражень може бути отримана форма функцій, які масштабує і деталізує (вона ж вейвлет), (рис.10):

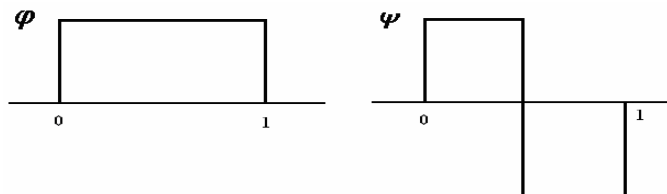


Рис.10 Вейвлет-пакет Хаара

Для вейвлета Добеши умови виконуються при значеннях:

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$g_0 = h_3, \quad g_1 = -h_2, \quad g_2 = h_1, \quad g_3 = -h_0.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= h_0\varphi(2t) + h_1\varphi(2t-1) + h_2\varphi(2t-2) + h_3\varphi(2t-3) = \\ &= \left[\frac{1+\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-0) \right] + \left[\frac{3+\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-1) \right] + \left[\frac{3-\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-2) \right] + \left[\frac{1-\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-3) \right] \\ \psi(t) &= g_0\varphi(2t) + g_1\varphi(2t-1) + g_2\varphi(2t-2) + g_3\varphi(2t-3) = \\ &= \left[\frac{1-\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-0) \right] - \left[\frac{3-\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-1) \right] + \left[\frac{3+\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-2) \right] - \left[\frac{1+\sqrt{3}}{4} \varphi(2t-3) \right]\end{aligned}$$

Форма функцій, які масштабують і деталізують, має вигляд (рис.11):

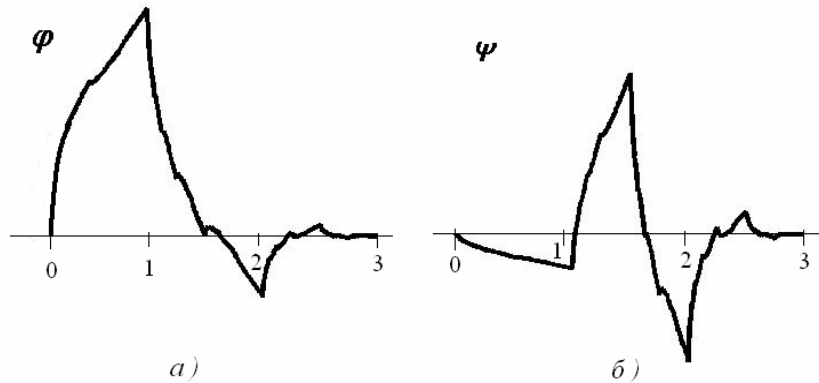


Рис.11 Вейвлет-пакет Добеши

Стосовно до дискретних сигналів теорія КМА припускає рекурсивні (ітераційні) обчислення з використанням набору коефіцієнтів $\{h_n\}$ і $\{g_n\}$.

5. Дискретне Вейвлетне перетворення (DWT)

У дискретних обчисленнях кожному рівню перетворення зіставлені апроксимуюча та функція, деталізує, з параметрами відповідно до масштабу. При дискретних значеннях масштабу і кроку функція, що деталізує, може бути представлена в такий спосіб:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi_0\left(\frac{t-b}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{s_0^m}} \Psi_0\left(\frac{t - ks_0^m b_0}{s_0^m}\right) = \frac{1}{\sqrt{s_0^m}} \Psi_0(s_0^{-m}t - kb_0),$$

де k і m - цілі числа, b_0 - мінімальний крок дискретизації безперервного сигналу (не дорівнює нулю і може бути довільним), s_0 - підстава масштабу (більше одиниці). Звичайно приймається $s_0 = 2$, $b_0 = 1$. Тоді вираження приймає вид:

$$\Psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi_0(2^{-m}t - k).$$

Аналогічно для апроксимуючої функції: $\varphi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \varphi_0(2^{-m}t - k)$.

З урахуванням цього, на кожному рівні перетворення (значенні масштабу) коефіцієнти розраховуються по формулах:

$$c_{m,k} = \sum_k x[k] \cdot \varphi_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_k x[k] \cdot \varphi_0(2^{-m}t - k),$$

$$d_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_k x[k] \cdot \psi_0(2^{-m}t - k).$$

Для одержання значень функцій апроксимації і деталізації у вираження масштабно-співвідношення

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \varphi(2t - n),$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \varphi(2t - n)$$

уводяться масштаб і зрушення за часом:

$$\varphi(2^{-m}t - k) = \sqrt{2} \sum_n h_n \varphi[2(2^{-m} \cdot t - k) - n],$$

$$\psi(2^{-m}t - k) = \sqrt{2} \sum_n g_n \varphi[2(2^{-m} \cdot t - k) - n].$$

Із цього слідує:

$$c_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_k x[k] \left[\sqrt{2} \sum_n h_n \varphi_0[2(2^{-m}t - k) - n] \right] = \sum_n h_n \left[\frac{1}{\sqrt{2^{m-1}}} \sum_k x[k] \varphi_0(2^{-(m-1)}t - (2k + n)) \right] =$$

$$= \sum_n h_n \left[\sum_k x[k] \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^{m-1}}} \varphi_0(2^{-(m-1)}t - (2k + n)) \right\} \right] = \sum_n h_n \left[\sum_k x[k] \cdot \varphi_{m-1,2k+n} \right] = \sum_n h_n c_{m-1,2k+n}$$

Аналогічно,
$$d_{m,k} = \sum_n g_n c_{m-1,2k+n}.$$

Отримані вираження зв'язують коефіцієнти сусідніх рівнів перетворення з використанням коефіцієнтів $\{h_n\}$ і $\{g_n\}$, що дозволяє реалізувати матричні ітераційні обчислення:

$$c_{m+1,k} = \sum_n h_n c_{m,2k+n}, \quad d_{m+1,k} = \sum_n g_n c_{m,2k+n}.$$

Перетворення представляється у вигляді матричного множення вектора $c_{m,2k+n}$ на матрицю A_m . Наприклад, при використанні вейвлета Добеши:

$$\begin{pmatrix} c_{3,0} \\ c_{3,1} \\ c_{3,2} \\ c_{3,3} \\ d_{3,0} \\ d_{3,1} \\ d_{3,2} \\ d_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & & & \\ & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & \\ & & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \\ h_2 & h_3 & & & & & h_0 & h_1 & \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & & & & & \\ & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & & & \\ & & & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \\ g_2 & g_3 & & & & & g_0 & g_1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{2,0} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \\ c_{2,4} \\ c_{2,5} \\ c_{2,6} \\ c_{2,7} \end{pmatrix}$$

Рис.12 Приклад матричного обчислення вейвлетом Добеши

Нижня половина матриці - послідовність g_n , отримана з h_n : $g_0=h_3$, $g_1=-h_2$, $g_2=h_1$, $g_3=-h_0$.

Значення коефіцієнтів рівні:

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.483, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.837, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = 0.224, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = -0.129.$$

При використанні вейвлета Хаара матриця має вигляд:

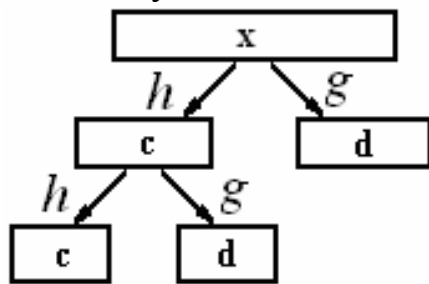
$$\begin{bmatrix} c_{3,0} \\ c_{3,1} \\ c_{3,2} \\ c_{3,3} \\ d_{3,0} \\ d_{3,1} \\ d_{3,2} \\ d_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & & & & & & \\ & & h_0 & h_1 & & & & \\ & & & & h_0 & h_1 & & \\ & & & & & & h_0 & h_1 \\ g_0 & g_1 & & & & & & \\ & & g_0 & g_1 & & & & \\ & & & & g_0 & g_1 & & \\ & & & & & & g_0 & g_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{2,0} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \\ c_{2,4} \\ c_{2,5} \\ c_{2,6} \\ c_{2,7} \end{bmatrix}$$

Рис.13 Приклад матричного обчислення вейвлетом Хаара

Для вейвлета Хаара припустимо використовувати коефіцієнти $h_0 = h_1 = 1/2$, $g_0 = 1/2$, $g_1 = -1/2$, відмінність від строгих значень яких ураховуються при відтворенні.

Повне ДВП (DWT) полягає в ітеративному множенні верхньої половини результуючого вектора на квадратну матрицю A_{m+1} . Ця процедура повторюється, поки довжина вектора не стане одиничною або до досягнення необхідного рівня розкладання.

Для цифрових даних як початкові значення $c_{m,k}$ приймаються вихідні значення сигналу.



Рівняння для апроксимуючих і коефіцієнтів, що деталізують, відповідають пірамідальному алгоритму обчислень (рис.14). При перетворенні вейвлетний пакет представлений коефіцієнтами h_n і g_n .

Рис.14 Пірамідальний алгоритм вейвлетного перетворення

Пірамідальний алгоритм ДВП двовимірного зображення припускає розкладання по рядках, а потім по стовпцях (або навпаки), у результаті чого формуються чотири фрагменти: LL, LH, HL і HH. Фрагмент LL, тобто апроксимуючі коефіцієнти, являє собою вихідне зображення, з якого видалені високочастотні складові та скорочена вдвічі кількість елементів. Фрагменти LH і HL містять коефіцієнти, що деталізують, значення яких наближене до нуля, а коефіцієнти, що деталізують, фрагмента HH майже всі дорівнюють нулю. Тому фрагменти LH, HL і HH виглядають темними (рис.15).

На другому етапі розкладання фрагмент LL знову піддається двовимірному ДВП і т.д.

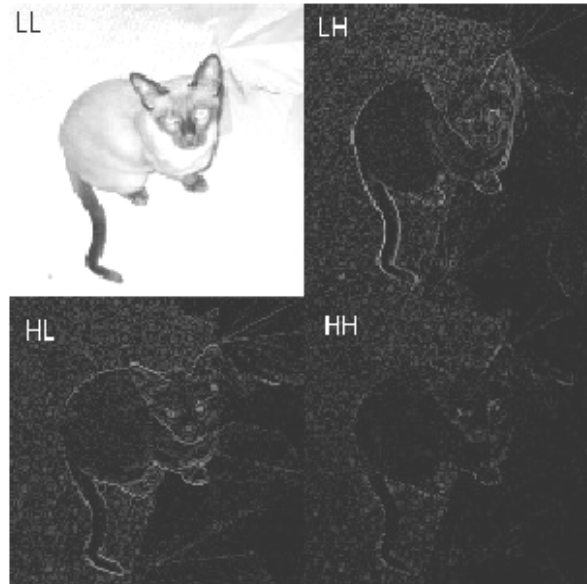


Рис.15 Результат двовимірного вейвлет перетворення зображення після першого кроку розкладання

6. Швидке Вейвлетне перетворення

Швидке вейвлетне перетворення базується на теорії субсмугового кодування, що припускає послідовну багаторазову розбивку сигналу на низькочастотну та високочастотну складові. На кожному етапі розбивки використовуються два фільтри. Фільтр низьких частот формує частотний образ грубого наближення сигналу, а фільтр високих частот - деталізації сигналу (рис.16). Частота роздязгнута фільтрів залежить від частоти дискретизації сигналу. На наступному рівні розкладання частота роздязгнута зменшується вдвічі.

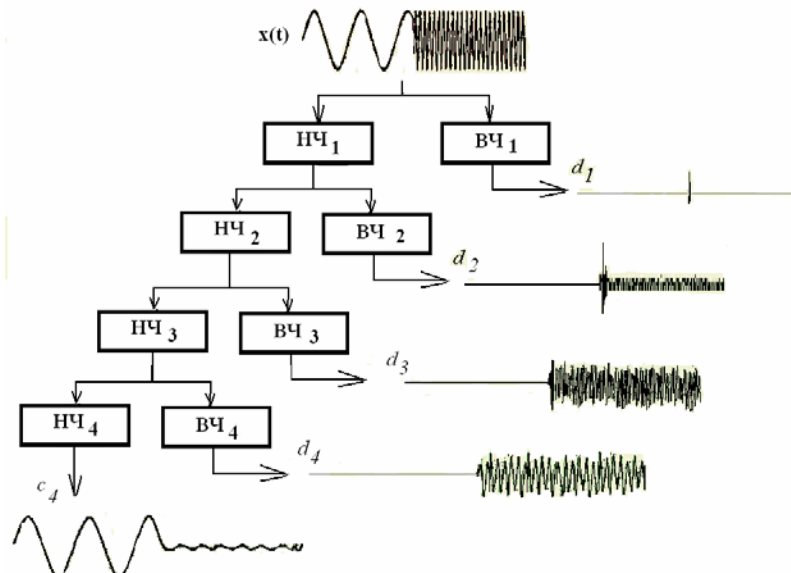


Рис.16 Приклад вейвлет-перетворення безперервного сигналу

Субсмугове кодування дискретних сигналів припускає масштабно-тимчасове перетворення сигналу методами цифрової фільтрації, причому вейвлетні коефіцієнти відповідають коефіцієнтам передатної характеристики фільтрів. Перетворення припускає пропущення сигналу (послідовності відліків) через цифрові фільтри з імпульсною характеристикою h_n і g_n . Фільтрація відповідає

згорткі сигналу з імпульсною характеристикою фільтра, що для дискретного часу визначається в такий спосіб:

$$c[n] = x[n] * h_n = \sum_k x[k] \cdot h[n-k], \quad d[n] = x[n] * g_n = \sum_k x[k] \cdot g[n-k]$$

$n=0, 1, 2, \dots, (L-1)$, де $L=N_1+N_2-1$, N_1 – кількість відліків сигналу, N_2 – кількість вейвлет-коефіцієнтів.

Наприклад, сигнал на вході фільтра представлений чотирма ($k=0, \dots, 3$) відліками $\{3 \ 5.5 \ 3.1 \ 4.5\}$, а імпульсна характеристика має два коефіцієнти $h_0=2$, $h_1=9$.

Процедура обчислення дискретної (лінійної) згортки має вигляд:

$c[0] = x[0] \cdot h[0-0] + x[1] \cdot h[0-1] + x[2] \cdot h[0-2] + x[3] \cdot h[0-3] = 3 \cdot 2 = 6$, тому що відсутні коефіцієнти h приймаються рівними нулю.

$$c[1] = x[0] \cdot h[1-0] + x[1] \cdot h[1-1] + x[2] \cdot h[1-2] + x[3] \cdot h[1-3] = 3 \cdot 9 + 5.5 \cdot 2 = 38$$

$$c[2] = x[0] \cdot h[2-0] + x[1] \cdot h[2-1] + x[2] \cdot h[2-2] + x[3] \cdot h[2-3] = 5.5 \cdot 9 + 3.1 \cdot 2 = 55.7$$

$$c[3] = x[0] \cdot h[3-0] + x[1] \cdot h[3-1] + x[2] \cdot h[3-2] + x[3] \cdot h[3-3] = 3.1 \cdot 9 + 4.5 \cdot 2 = 36.9$$

$$c[4] = x[0] \cdot h[4-0] + x[1] \cdot h[4-1] + x[2] \cdot h[4-2] + x[3] \cdot h[4-3] = 4.5 \cdot 9 = 40.5$$

Процедура аналогічна для коефіцієнтів, що деталізують ($g_0=9$, $g_1=-2$):

$$d[0] = x[0] \cdot g[0-0] + x[1] \cdot g[0-1] + x[2] \cdot g[0-2] + x[3] \cdot g[0-3] = 3 \cdot 9 = 27$$

$$d[1] = x[0] \cdot g[1-0] + x[1] \cdot g[1-1] + x[2] \cdot g[1-2] + x[3] \cdot g[1-3] = 3 \cdot (-2) + 5.5 \cdot 9 = 43.5$$

$$d[2] = x[0] \cdot g[2-0] + x[1] \cdot g[2-1] + x[2] \cdot g[2-2] + x[3] \cdot g[2-3] = 5.5 \cdot (-2) + 3.1 \cdot 9 = 16.9$$

$$d[3] = x[0] \cdot g[3-0] + x[1] \cdot g[3-1] + x[2] \cdot g[3-2] + x[3] \cdot g[3-3] = 3.1 \cdot (-2) + 4.5 \cdot 9 = 34.3$$

$$d[4] = x[0] \cdot g[4-0] + x[1] \cdot g[4-1] + x[2] \cdot g[4-2] + x[3] \cdot g[4-3] = 4.5 \cdot (-2) = -9$$

У загальному випадку, відповідно до виражень для розрахунку апроксимуючих і коефіцієнтів, що деталізують, $c_{m+1,k} = \sum_n h_n c_{m,2k+n}$ $d_{m+1,k} = \sum_n g_n c_{m,2k+n}$,

повинно бути визначено вдвічі менша кількість коефіцієнтів у порівнянні з попереднім рівнем подання. Для задоволення цієї вимоги після фільтрації (згортки) виконується децимація коефіцієнтів. У прикладі видаляються $c[0]$, $c[2]$, $c[4]$, $d[0]$, $d[2]$, $d[4]$, а залишаються $c[1]$, $c[3]$, $d[1]$, $d[3]$.

В іншому випадку використання 4 вейвлет-коефіцієнтів при 8 вхідних відліках приведе до розрахунку після згортки 13 апроксимуючих і 13 коефіцієнтів, що деталізують. З огляду на погіршеність крайового ефекту, при децимації в першу чергу видаляються по 3 крайніх коефіцієнти. Потім з 7 коефіцієнтів, що залишилися, видаляється кожний другий, тобто ще 3 коефіцієнти. У результаті залишається по 4 необхідних апроксимуючих і коефіцієнтів, що деталізують.

Таким чином, система швидкого вейвлет-перетворення складається з послідовних каскадів фільтрів і блоків децимації (рис.17).

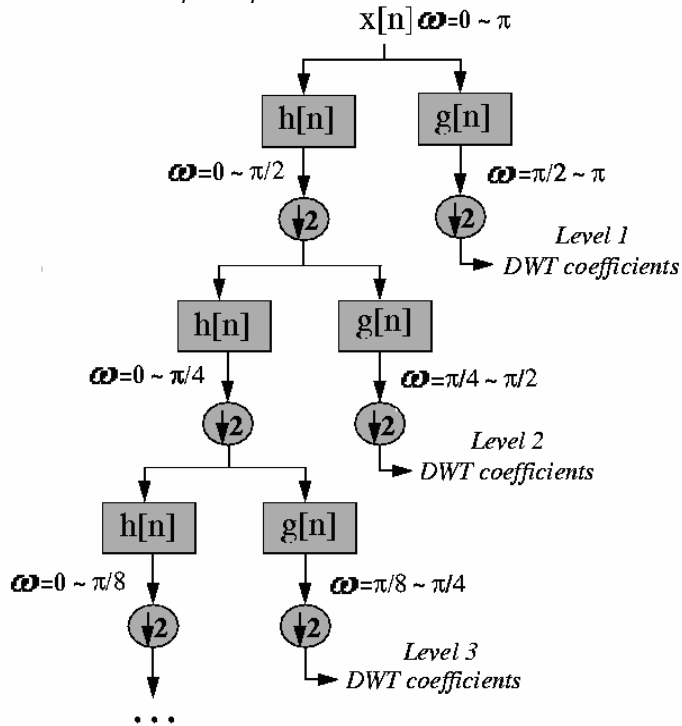


Рис.17 Алгоритм частотного вейвлет-розкладання

Сигнал на виході низькочастотного фільтра має найвищу частоту $\pi/2$ радіан. Отже, припустимо скоротити вдвічі кількість відліків, видаливши кожний другий відлік. Тому виконується децимація у два рази, що приводить до подвоєння масштабу сигналу. У свою чергу, тимчасовий дозвіл після фільтрації зменшується у два рази, тому що тільки половина відліків характеризує весь сигнал. При цьому частотний дозвіл подвоюється, тому що сигнал займає половинну смугу частот і невизначеність зменшується.

Найбільш значимі частоти вихідного сигналу відображаються як більші амплітуди вейвлет-коефіцієнтів, що деталізують, і які характеризують відповідний частотний діапазон. Відмінність ДВП від перетворення Фур'є полягає в тім, що час появи частот у цьому випадку не загублено. Однак часова локалізація має дозвіл, що залежить від рівня перетворення, на якому з'являється частота. Якщо основна інформація сигналу розташована в області високих частот, то часова локалізація цих частот буде більш точною, тому що вони характеризуються більшою кількістю відліків. На низьких частотах, навпроти, відліків мало. Тому, часовий дозвіл низький, але гарний частотний дозвіл (сигнал займає вузьку смугу частот). Така схема аналізу підходить для більшості практичних сигналів.

При такій фільтрації "частоти" відповідає поняття "рівень деталізації". Високі частоти передають дрібні деталі, а низькі частоти - великі.

Сигнал відтворюється об'єднанням вейвлет-коефіцієнтів, що деталізують, всіх рівнів, починаючи з останнього, і коефіцієнтів апроксимації сигналу останнього рівня. Перед операцією згортки в набір коефіцієнтів додаються додаткові коефіцієнти нульового значення.

У загальному випадку, можливі розкладання і високочастотної смуги, засноване на використанні *пакетних* вейвлетів.

Для дискретних сигналів частота звичайно виражається в радіанах, а частота дискретизації приймається рівною 2π радіан. Тому, найбільша частота, що є присутня у сигналі, відповідає π радіан.

Важливою властивістю ДВП є взаємозв'язок між імпульсними характеристиками ВЧ і НЧ фільтрів: $g_n = (-1)^n \cdot h_{(M-1-n)}$, де M – довжина фільтра (кількість коефіцієнтів), наприклад, при $M=4$ $g_0=h_3$, $g_1=-h_2$, $g_2=h_1$, $g_3=-h_0$.

Таким чином, високочастотний фільтр виходить із низькочастотного "переворотом" його коефіцієнтів і зміною знака у непарних коефіцієнтів. Фільтри, що відповідають цій умові, називаються *квадратурними дзеркальними фільтрами*.

Для двовимірного ДВП частотна фільтрація пояснюється на рис.18.

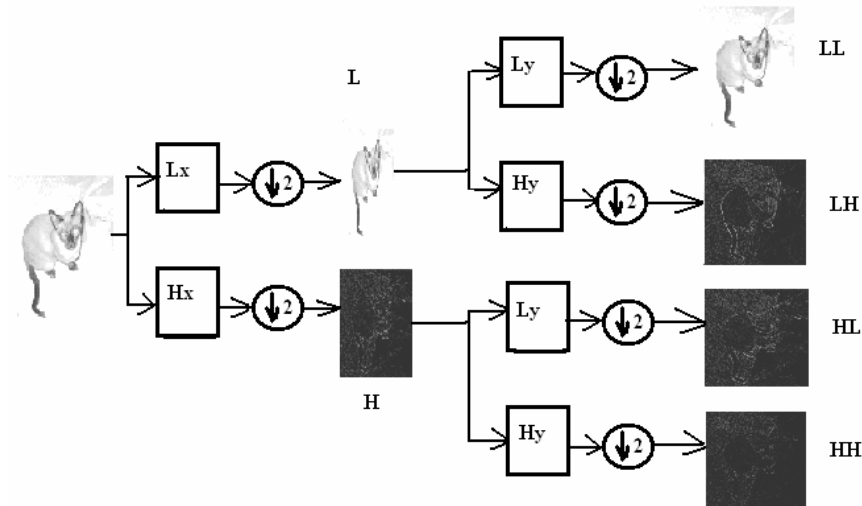


Рис.18 Вейвлет-Фільтрація двовимірного зображення

Точність відтворення сигналів залежить від втрат інформації при проріджуванні. Втрати спостерігаються, в основному, на зрізах смуг пропускання фільтрів низьких і високих частот, крутість яких залежить від порядку фільтрів, їхньої погодженості та типу вейвлетних функцій.

Особливості вейвлет-перетворення:

- Загальна кількість коефіцієнтів розкладання дорівнює кількості відліків сигналу.
- Вейвлет і його функція масштабу повинні мати однозначну залежність.
- Значення апроксимуючого коефіцієнта на останньому рівні перетворення являє собою середнє значення вихідного сигналу по інтервалу його визначення.
- Коефіцієнти вейвлетного перетворення відповідають ступеню зміни сигналу на різних масштабах. В областях плавних змін сигналу коефіцієнти деталізації близькі до нуля, що дозволяє ефективно стискати дані.
- Реконструкція сигналу можлива з будь-якого масштабного рівня.
- При вейвлетному аналізі довільних сигналів вибір вейвлета, що аналізує, заздалегідь не визначений і багато в чому залежить від поставлених задач.