УДК 531.38

ЧАСТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА С ГИРОДИНАМИ.

А.В. Гладун, ассистент*; А.М. Ковалев, д.ф.-м.н., профессор**
***Донецкий государственный институт искусственного интеллекта**
****Институт прикладной математики и механики НАН Украины.**

Исследуется задача частичной стабилизации динамической системы, описывающей движение спутника, несущего один или два гиродина. Получены управления, которым соответствуют стационарные решения системы, являющиеся положениями относительного равновесия и равномерными вращениями спутника. Выделены случаи управляемости системы по части переменных по линейному приближению в окрестности найденных стационарных движений. Построены управления, осуществляющие стабилизацию угловой скорости и стабилизацию равномерного вращения спутника.

Уравнения движения.

Рассмотрим задачу активной стабилизации спутника, осуществляемой при помощи гиродинов. Гиродин – двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью.

В работе используются уравнения движения твердого тела с s гиродинами, полученные в работе [4]. Запишем их в предположении, что ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения.

$$\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}_0\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{K}_0\dot{\mathbf{q}}\mathbf{cosq} - \mathbf{N}_0\dot{\mathbf{q}}\mathbf{sinq}\right)\mathbf{h} + \boldsymbol{\omega}\times\left[\mathbf{L}_0\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{K}_0\mathbf{sinq} + \mathbf{N}_0\mathbf{cosq}\right)\mathbf{h}\right] = \mathbf{0} \qquad (1)$$

$$\mathbf{J}\left(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}_0^*\dot{\boldsymbol{\omega}}\right) - \left(\mathbf{K}_0^*\boldsymbol{\omega}\mathbf{cosq} - \mathbf{N}_0^*\boldsymbol{\omega}\mathbf{sinq}\right)\mathbf{h} = \mathbf{Q}_\mathbf{y} \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\theta}$ -матрица тензора инерции системы носитель-гиродины; $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ -вектор угловой скорости носителя; $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_s)$- вектор углов поворота гирокамер относительно носителя; $\mathbf{sinq} = \mathrm{diag}(\sin q_1,\ldots,\sin q_s)$; $\mathbf{cosq} = \mathrm{diag}(\cos q_1,\ldots,\cos q_s)$; $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_1,\ldots,\mathrm{J}_\mathrm{s})$; $\mathbf{h} = (\mathrm{h}_1,\ldots,\mathrm{h}_\mathrm{s})^*$; $\mathbf{K}_0 = (\mathbf{k}_{01},\ldots,\mathbf{k}_{0s})$; $\mathbf{L}_0 = (\mathbf{l}_{01},\ldots,\mathbf{l}_{0s})$; $\mathbf{N}_0 = (\mathbf{n}_{01},\ldots,\mathbf{n}_{0s})$; $\mathbf{k}_{0i}, \mathbf{l}_{0i}, \mathbf{n}_{0i}$ - орты, задающие положение i-го гиродина в теле носителе; $\mathbf{Q}_\mathbf{y}$ - вектор управлений; * - символ транспонирования.

Преобразуем уравнения (1),(2), введя переменные [5]

$$\xi_j = \mathrm{J}_\mathrm{j}\left(\mathbf{l}_{0j}^*, \boldsymbol{\omega}\right) + \mathrm{J}_\mathrm{j}\dot{q}_j, \quad j = 1,\ldots,\mathrm{s}$$

и запишем уравнения в системе координат Oxyz, жестко связанной с носителем, выбрав ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\boldsymbol{\theta\omega}-\sum_{j=1}^{s}\mathrm{J}_j\left(\mathbf{l}_{0j}^{*},\boldsymbol{\omega}\right)\mathbf{l}_{0j}=\left(\mathrm{A}_1\omega_1,\mathrm{A}_2\omega_2,\mathrm{A}_3\omega_3\right)^{*},$$

где $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3$ - обобщенные моменты инерции.

Система уравнений (1),(2) принимает вид

$$\mathrm{A}_1\dot{\omega}_1=\left(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_3\right)\omega_2\omega_3+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{\mathrm{J}_j}\mathrm{h}_j\xi_j\left[\sin q_j\,\mathrm{n}_{0j}^{1}-\cos q_j\,\mathrm{k}_{0j}^{1}\right]-\omega_2\xi_j\mathrm{l}_{0j}^{3}+\omega_3\xi_j\mathrm{l}_{0j}^{2}-\mathrm{l}_{0j}^{1}u_j\right) \quad (123)$$

$$\dot{q}_j=\frac{1}{\mathrm{J}_j}\xi_j-\left(\mathbf{l}_{0j}^{*},\boldsymbol{\omega}\right) \qquad j=1,\ldots,\mathrm{s}. \quad (3)$$

$$\dot{\xi}_j=\mathrm{h}_j\left[\left(\mathbf{k}_{0j}^{*},\boldsymbol{\omega}\right)\cos q_j-\left(\mathbf{n}_{0j}^{*},\boldsymbol{\omega}\right)\sin q_j\right]+u_j \qquad j=1,\ldots,\mathrm{s}.$$

Запишем уравнения (3) для различных случаев.

Случай 1. Пусть на спутнике установлен один гиродин, и орты $\mathbf{k}_0=\left(0,0,1\right)^{*}$, $\mathbf{l}_0=\left(1,0,0\right)^{*}$, $\mathbf{n}_0=\left(0,1,0\right)^{*}$ задают его начальное расположение. Ось вращения гирокамеры направлена по оси Ox. Тогда движение динамической системы носитель-гиродин описывается системой уравнений вида

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_1=\left[\left(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_3\right)\omega_2\omega_3-u\right]/\,\mathrm{A}_1\\
&\dot{\omega}_2=\left[\left(\mathrm{A}_3-\mathrm{A}_1\right)\omega_1\omega_3-\omega_3\xi+h\xi\,sinq/J\right]/\,\mathrm{A}_2\\
&\dot{\omega}_3=\left[\left(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2\right)\omega_1\omega_2+\omega_2\xi-\mathrm{h}\xi\cos q/\mathrm{J}\right]/\,\mathrm{A}_3 \qquad (4)\\
&\dot{q}=\xi/\mathrm{J}-\omega_1\\
&\dot{\xi}=\mathrm{h}\left(\omega_3\cos q-\omega_2\sin q\right)+u
\end{aligned}$$

Случай 2. Расположим на носителе два гиродина так, чтобы ось вращения гирокамеры первого была направлена по оси Ox, а ось вращения гирокамеры второго — по оси Oy.

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_1=\left[\left(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_3\right)\omega_2\omega_3+\omega_3\xi_2-\mathrm{h}_2\xi_2\cos q_2/\mathrm{J}_2-u_1\right]/\mathrm{A}_1\\
&\dot{\omega}_2=\left[\left(\mathrm{A}_3-\mathrm{A}_1\right)\omega_1\omega_3-\omega_3\xi_1+\mathrm{h}_1\xi_1\sin q_1/\mathrm{J}_1-u_2\right]/\mathrm{A}_2\\
&\dot{\omega}_3=\left[\left(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2\right)\omega_1\omega_2+\omega_2\xi_1-\omega_1\xi_2-\mathrm{h}_1\xi_1\cos q_1/\mathrm{J}_1+\mathrm{h}_2\xi_2\sin q_2/\mathrm{J}_2\right]/\mathrm{A}_3\\
&\dot{q}_1=\xi_1/\mathrm{J}_1-\omega_1 \qquad (5)\\
&\dot{q}_2=\xi_2/\mathrm{J}_2-\omega_2\\
&\dot{\xi}_1=\mathrm{h}_1\left(\omega_3\cos q_1-\omega_2\sin q_1\right)+u_1\\
&\dot{\xi}_2=\mathrm{h}_2\left(\omega_1\cos q_2-\omega_3\sin q_2\right)+u_2
\end{aligned}$$

Случай 3. Пусть на спутнике установлено два гиродина и ось вращения одного из них не совпадает ни с одной из координатных осей. В качестве ортов примем следующие:

$\mathbf{k}_{01}=\left(6/35,6/7,-17/35\right)^{*}$; $\mathbf{l}_{01}=\left(2/7,3/7,6/7\right)^{*}$; $\mathbf{n}_{01}=\left(33/35,-2/7,-6/35\right)^{*}$;

$\mathbf{k}_{02} = (0,0,1)^*$; $\mathbf{l}_{02} = (1,0,0)^*$; $\mathbf{n}_{02} = (0,1,0)^*$.

Тогда получаем уравнения движения в форме

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{A_1}\left[(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \frac{3}{7}\omega_3\xi_1 - \frac{6}{7}\omega_2\xi_1 + \frac{1}{35J_1}h_1\xi_1(33\sin q_1 - 6\cos q_1) - \frac{2}{7}u_1 - u_2\right]$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{A_2}\left[(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi_2 - \frac{2}{7}\omega_3\xi_1 + \frac{6}{7}\omega_1\xi_1 - \frac{2}{7J_1}h_1\xi_1(\sin q_1 + 3\cos q_1) + \frac{h_2}{J_2}\sin q_2\xi_2 - \frac{3}{7}u_1\right]$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{A_3}\left[(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \frac{2}{7}\omega_2\xi_1 - \frac{3}{7}\omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2 - \frac{1}{35J_1}h_1\xi_1(6\sin q_1 - 17\cos q_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{J_2}h_2\xi_2\cos q_2 - \frac{6}{7}u_1\right]$$

$$\dot{q}_1 = \xi_1/J_1 - (2\omega_1 + 3\omega_2 + 6\omega_3)/7 \qquad (6)$$

$$\dot{q}_2 = \xi_2/J_2 - \omega_1$$

$$\dot{\xi}_1 = h_1[(6\cos q_1 - 33\sin q_1)\omega_1 + 10(3\cos q_1 + \sin q_1)\omega_2 + (6\sin q_1 - 17\cos q_1)\omega_3]/35 + u_1$$

$$\dot{\xi}_2 = h_2(\omega_3\cos q_2 - \omega_2\sin q_2) + u_2$$

Стационарные движения.

Системы уравнений (4) – (6) представляют собой автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \qquad (7)$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ - фазовый вектор системы, $\mathbf{u} \in R^m$ - вектор управления. Обозначим через $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{u}(t))$ решение системы (7) при управляющем воздействии $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$.

Определение. Решение $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{u}(t))$ [3] называется **стационарным** движением системы (7), если $\varphi(t, \mathbf{u}(t)) \equiv \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ - некоторый постоянный вектор $\mathbf{a} \in R^n$.

Как известно, для того, чтобы у системы (7) существовали стационарные движения, необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ системы в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ была равна нулю. Таким образом, для нахождения всех стационарных движений системы (7) нужно решить систему уравнений

$$f_i((a_1, \ldots, a_n), \mathbf{u}) = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

Запишем уравнения стационарных движений для $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и решим их для каждого из приведенных выше случаев.

Случай 1.

$$(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi + h\xi\sin q/J = 0$$

$$(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2\xi - h\xi\cos q/J = 0$$

$$\xi / \mathrm{J} - \omega_1 = 0$$

$$\mathrm{h}\left(\omega_3 \cos q - \omega_2 \sin q\right) = 0$$

Из первого уравнения следует $\omega_2 = 0$ или $\omega_3 = 0$, а из четвертого $\xi = \mathrm{J}\,\omega_1$. Если $\omega_2 = 0$, то

$$\omega_1\left[\left(\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1 - \mathrm{J}\right)\omega_3 + \mathrm{h}\sin q\right] = 0$$

$$\mathrm{h}\,\omega_1 \cos(q) = 0$$

$$\mathrm{h}\,\omega_3 \cos(q) = 0,$$

откуда имеем следующие ***равномерные вращения***

$$\left(0, 0, \omega_3^0, \frac{\pi}{2} + \pi \mathrm{n}, 0\right), \quad \mathrm{n} \in Z, \quad \omega_3^0 \equiv const \tag{8}$$

$$\left(\omega_1^0, 0, \frac{(-1)^{\mathrm{m}+1}\,\mathrm{h}}{\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1 - \mathrm{J}}, \pi \mathrm{m}, \mathrm{J}\,\omega_1^0\right), \quad \mathrm{m} \in Z, \quad \omega_1^0 \equiv const \tag{9}$$

Если $\omega_3 = 0$, то $\quad \mathrm{h}\,\omega_1 \sin(q) = 0$

$$\omega_1\left[\left(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{J}\right)\omega_2 - \mathrm{h}\cos q\right] = 0$$

$$\omega_2 \sin(q) = 0,$$

и получаем следующие ***равномерные вращения***

$$\left(0, \omega_2^0, 0, \pi \mathrm{k}, 0\right), \quad \mathrm{k} \in Z, \quad \omega_2^0 \equiv const \tag{10}$$

$$\left(\omega_1^0, \frac{(-1)^{\mathrm{l}}\,\mathrm{h}}{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{J}}, 0, \pi \mathrm{l}, \mathrm{J}\,\omega_1^0\right), \quad \mathrm{l} \in Z, \quad \omega_1^0 \equiv const \tag{11}$$

Если же $\omega_2 = 0$ и $\omega_3 = 0$ одновременно , то из второго и третьего уравнений видим $\mathrm{h}\,\omega_1 \sin(q) = 0$ и $\mathrm{h}\,\omega_1 \cos(q) = 0$, откуда следует следующее ***положение равновесия***

$$\left(0, 0, 0, q^0, 0\right), \quad q^0 \equiv const \tag{12}$$

Случай 2. Имеем следующую систему уравнений

$$\left(\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3\right)\omega_2\omega_3 + \omega_3\xi_2 - \mathrm{h}_2\xi_2\cos q_2 / \mathrm{J}_2 - u_1 = 0$$

$$\left(\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1\right)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi_1 + \mathrm{h}_1\xi_1\sin q_1 / \mathrm{J}_1 - u_2 = 0$$

$$\left(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2\right)\omega_1\omega_2 + \omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2 - \mathrm{h}_1\xi_1\cos q_1 / \mathrm{J}_1 + \mathrm{h}_2\xi_2\sin q_2 / \mathrm{J}_2 = 0$$

$$\xi_1 / \mathrm{J}_1 - \omega_1 = 0$$

$$\xi_2 / \mathrm{J}_2 - \omega_2 = 0$$

$$\mathrm{h}_1\left(\omega_3\cos q_1 - \omega_2\sin q_1\right) + u_1 = 0$$

$$\mathrm{h}_2\left(\omega_1\cos q_2 - \omega_3\sin q_2\right) + u_2 = 0$$

Из четвертого и пятого уравнений $\xi_1 = \mathrm{J}_1\,\omega_1$, $\xi_2 = \mathrm{J}_2\,\omega_2$, тогда

$$\omega_2\left[\left(\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3 + \mathrm{J}_2\right)\omega_3 - \mathrm{h}_2\cos q_2\right] = 0$$

$$\omega_1\left[\left(A_3-A_1-J_1\right)\omega_3+h_1\sin q_1\right]=0$$

$$\left(A_1-A_2+J_1+J_2\right)\omega_1\omega_2-h_1\omega_1\cos q_1+h_2\omega_2\sin q_2=0$$

$$\omega_3\cos q_1-\omega_2\sin q_1=0$$

$$\omega_1\cos q_2-\omega_3\sin q_2=0$$

Далее, если $\omega_2=0$, то получаем следующие ***равномерные вращения***

$$\left(\omega_1^0, 0, \frac{(-1)^{m+1}h}{A_3-A_1-J_1}, \frac{\pi}{2}+\pi m, \operatorname{arctg}\left(\frac{\left(A_3-A_1-J_1\right)\omega_1^0}{(-1)^{m+1}h}\right), J_1\omega_1^0, 0\right),\quad m\in Z,\quad \omega_1^0\equiv const$$

$$\left(\frac{(-1)^{m+1}h_1\operatorname{tg}q_2^0}{A_3-A_1-J_1}, 0, \frac{(-1)^{m+1}h_1}{A_3-A_1+J_1}, \frac{\pi}{2}+\pi m, q_2^0, \frac{J_1(-1)^{m+1}h_1\operatorname{tg}q_2^0}{A_3-A_1-J_1}, 0\right),\quad m\in Z,\quad q_2^0\equiv const$$

Если же $\omega_1=0$, то

$$\left(0, \omega_2^0, \frac{(-1)^k h_2}{A_2-A_3+J_2}, \operatorname{arctg}\left(\frac{(-1)^k h_2}{\left(A_2-A_3+J_2\right)\omega_2^0}\right), \pi k, 0, J_2\omega_2^0\right),\quad k\in Z,\quad \omega_2^0\equiv const$$

$$\left(0, \frac{(-1)^n h_2\operatorname{ctg}q_1^0}{A_2-A_3-J_2}, \frac{(-1)^n h_2}{A_2-A_3+J_2}, q_1^0, \pi n, 0, \frac{J_2(-1)^n h_2\operatorname{ctg}q_1^0}{A_2-A_3-J_2}\right),\quad n\in Z,\quad q_1^0\equiv const$$

А когда $\omega_1=0$ и $\omega_2=0$, получаем ***равномерное вращение***

$$\left(0, 0, \omega_3^0, \frac{\pi}{2}+\pi n, \pi k, 0, 0\right),\quad n,k\in Z,\quad \omega_3^0\equiv const$$

и ***положение равновесия***

$$\left(0,0,0,q_1^0,q_2^0,0,0\right),\quad q_1^0, q_2^0\equiv const.$$

Случай 3. Для этого случая получаем систему уравнений вида

$$\left(A_2-A_3\right)\omega_2\omega_3+J_1\left[\frac{3}{7}\omega_3-\frac{6}{7}\omega_2+\frac{1}{35J_1}h_1\left(33\sin q_1-6\cos q_1\right)\right]\left[\frac{2}{7}\omega_1+\frac{3}{7}\omega_2+\frac{6}{7}\omega_3\right]=0$$

$$\left(A_3-A_1-J_2\right)\omega_1\omega_3-J_1\left[\frac{2}{7}\omega_3-\frac{6}{7}\omega_1-\frac{2}{7J_1}h_1\left(\sin q_1+3\cos q_1\right)\right]\left[\frac{2}{7}\omega_1+\frac{3}{7}\omega_2+\frac{6}{7}\omega_3\right]+$$
$$+h_2\omega_1\sin q_2=0$$

$$\left(A_1-A_2+J_2\right)\omega_1\omega_2+J_1\left[\frac{2}{7}\omega_2-\frac{3}{7}\omega_1-\frac{1}{35J_1}h_1\left(6\sin q_1-17\cos q_1\right)\right]\left[\frac{2}{7}\omega_1+\frac{3}{7}\omega_2+\frac{6}{7}\omega_3\right]-$$
$$-h_2\omega_1\cos q_2=0$$

$$\left(6\cos q_1-33\sin q_1\right)\omega_1+10\left(3\cos q_1+\sin q_1\right)\omega_2+\left(6\sin q_1-17\cos q_1\right)\omega_3=0$$

$$\omega_3\cos q_2-\omega_2\sin q_2=0$$

где $\xi_1=J_1\left(2\omega_1+3\omega_2+6\omega_3\right)/7$ и $\xi_2=J_2\omega_1$.

Полагая $\omega_2=0$ и $\omega_3=0$, получаем такие ***равномерные вращения***

$\left(\omega_1^0,\ 0,\ 0,\ \mathrm{arctg}(2/11)-\pi\,\mathrm{n},\ \mathrm{arctg}2-\pi\,\mathrm{n},\ 2\mathrm{J}_1\,\omega_1^0/7,\ \mathrm{J}_2\,\omega_1^0\right),\quad \mathrm{n}\in Z,\quad \omega_1^0\equiv const$

если $\mathrm{h}_1=\sqrt{5}\left[(-1)^{\mathrm{n}}\,6\mathrm{J}_1\,\omega_1^0+49\mathrm{h}_2/\sqrt{5}\right]/14$

А когда $\omega_1=0$ и $\omega_3=0$ имеем

$\left(0,\ \omega_2^0,\ 0,\ -\mathrm{arctg}3+\pi\mathrm{k},\ 2\pi\mathrm{k},\ 3\mathrm{J}_1\,\omega_2^0/7,\ 0\right),\quad \mathrm{k}\in Z,\quad \omega_2^0\equiv const$

если $\mathrm{h}_1=2\,(-1)^{\mathrm{k}}\ \mathrm{J}_1\,\omega_2^0/7$

Если же $\omega_1=0$ и $\omega_2=0$, то

$\left(0,\ 0,\ \omega_3^0,\ \mathrm{arctg}(17/6)-\pi\,\mathrm{m},\ \pi/2+2\pi\,\mathrm{m},\ 6\mathrm{J}_1\,\omega_3^0/7,\ 0\right),\quad \mathrm{m}\in Z,\quad \omega_3^0\equiv const$

если $\mathrm{h}_1=\sqrt{13}\,(-1)^{\mathrm{m}}\ \mathrm{J}_1\,\omega_3^0/7$

Можно еще указать следующие ***равномерные вращения***

$\left(-3\omega_3^0,\ 0,\ \omega_3^0,\ \mathrm{arctg}(1/3),\ -\pi/2+\pi\,\mathrm{n},\ 0,\ -3\mathrm{J}_2\,\omega_3^0\right),\quad \mathrm{n}\in Z,\quad \omega_3^0\equiv const$

если $\mathrm{h}_2=(-1)^{\mathrm{n}}\ (\mathrm{A}_3-\mathrm{A}_1-\mathrm{J}_2)\omega_3^0$,

$\left(-3\omega_2^0/2,\ \omega_2^0,\ 0,\ -\mathrm{arctg}(6/17),\ \pi\,\mathrm{m},\ 0,\ -3\mathrm{J}_2\,\omega_2^0/2\right),\quad \mathrm{m}\in Z,\quad \omega_2^0\equiv const$

если $\mathrm{h}_2=(-1)^{\mathrm{m}}\ (\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2+\mathrm{J}_2)\omega_2^0$,

и ***положение равновесия***

$$\left(0,0,0,q_1^0,q_2^0,0,0\right),\quad q_1^0,q_2^0\equiv const. \tag{13}$$

Стабилизация равновесия.

Под положением равновесия будем понимать такое состояние спутника, при котором его угловая скорость вращения равна нулю, т.е. $\omega_1=0$, $\omega_2=0$, $\omega_3=0$ и остается таковой в течении всего промежутка времени.

Так как у каждой из систем (4)-(6) существует интеграл (модуль вектора кинетического момента системы есть величина постоянная), то указанные системы не являются управляемыми по всем переменным. Однако, для стабилизации равновесия достаточно свойства управляемости по $\boldsymbol{\omega}$ и по ξ.

Рассматривая системы (4), (5) находим, что система (4), линеаризованная в окрестности положения равновесия (12) и система (5), линеаризованная в окрестности равновесия (21), не обладают свойством управляемости по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ [1]. Это приводит к невозможности построения управления, стабилизирующего положение равновесия по линейному приближению для систем (4) и (5).

Если же ось вращения гирокамеры одного из гиродинов не лежит ни в одной из координатных плоскостей системы координат Oxyz, т.е. рассматриваем **Случай 3,** то система линейного приближения управляема по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi_1, \xi_2$. Построим стабилизирующее управление для этого случая.

Сделаем замену $x_1 = \omega_1$, $x_2 = \omega_2$, $x_3 = \omega_3$, $x_4 = \xi_1$, $x_5 = \xi_2$, $x_6 = q_1 - q_1^0$, $x_7 = q_2 - q_2^0$ и рассмотрим систему (6), линеаризованную в положении равновесия (13). Первые три и последние два уравнения системы линейного приближения не содержат переменных q_1, q_2, а значит уравнения для $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ могут быть отброшены. Полученная таким образом система пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_1 \dot{x}_1 = \frac{1}{35\mathrm{J}_1}\mathrm{h}_1 x_4 \left(33\sin q_1^0 - 6\cos q_1^0\right) - \frac{2}{7}u_1 - u_2 \\
&\mathrm{A}_2 \dot{x}_2 = -\frac{2}{7\mathrm{J}_1}\mathrm{h}_1 x_4 \left(\sin q_1^0 + 3\cos q_1^0\right) + \frac{\mathrm{h}_2}{\mathrm{J}_2}\sin q_2^0 x_5 - \frac{3}{7}u_1 \\
&\mathrm{A}_3 \dot{x}_3 = -\frac{1}{35\mathrm{J}_1}\mathrm{h}_1 x_4 \left(6\sin q_1^0 - 17\cos q_1^0\right) - \frac{1}{\mathrm{J}_2}\mathrm{h}_2 x_5 \cos q_2 - \frac{6}{7}u_1 \\
&\dot{x}_4 = \mathrm{h}_1 \left[\left(6\cos q_1^0 - 33\sin q_1^0\right)x_1 + 10\left(3\cos q_1^0 + \sin q_1^0\right)x_2 + \left(6\sin q_1^0 - 17\cos q_1^0\right)x_3\right]/35 + u_1 \\
&\dot{x}_5 = \mathrm{h}_2 \left(x_3 \cos q_2^0 - x_2 \sin q_2^0\right) + u_2
\end{aligned}
\tag{14}
$$

описывает поведение переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \xi_1, \xi_2$. Выберем следующие значения параметров

$$\mathrm{A}_1 = 230, \quad \mathrm{A}_2 = 310, \quad \mathrm{A}_3 = 210 \tag{15}$$

$$\mathrm{J}_1 = 3, \quad \mathrm{J}_2 = 2, \quad \mathrm{w} = 500, \quad h_1 = \mathrm{J}_1 \mathrm{w}, \quad h_2 = \mathrm{J}_2 \mathrm{w}, \quad q_1^0 = \pi/6, \quad q_2^0 = \pi/3. \tag{16}$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ есть система (14), записанная в матричном виде. При заданных значениях и условии $u_2 = 0$ определитель матрицы $\{\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}, \mathbf{A}^4\mathbf{B}\}$ равен $0{,}188 \cdot 10^{11} \neq 0$, следовательно $\mathrm{rang}\{\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}, \mathbf{A}^4\mathbf{B}\} = 5$, а значит система (14) управляема даже с помощью одного управления $u = u_1$. В этом случае, как известно из [2], мы можем выбрать линейное управление $u_1 = \mathbf{c}^* \mathbf{x}$ так, чтобы коэффициенты характеристического уравнения для системы (14) принимали наперед заданные произвольные значения.

Пусть характеристическое уравнение имеет один действительный и четыре комплексных корня $\alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\alpha_2 \pm \beta_2 i$ и α_3, тогда для обеспечения асимптотической устойчивости достаточно положить $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$. В этом случае получаем управление

$$u_1 = 160.83\omega_1 + 69.9\omega_2 + 120.32\omega_3 - 4.21\xi_1 - 1.23\xi_2 . \tag{17}$$

Результаты численного моделирования применения построенного управления (17) для стабилизации системы (6) с начальным условием (1/40, 1/30, 1/50, π/6, π/3, 1/42, 1/37) приведены на рисунках

$\omega_1(0) = 0.025$ $\omega_1(16) = -6.426\times10^{-6}$

$\omega_2(0) = 0.033$ $\omega_2(16) = 4.126\times10^{-6}$

$\omega_3(0) = 0.02$ $\omega_3(16) = 1.24\times10^{-6}$

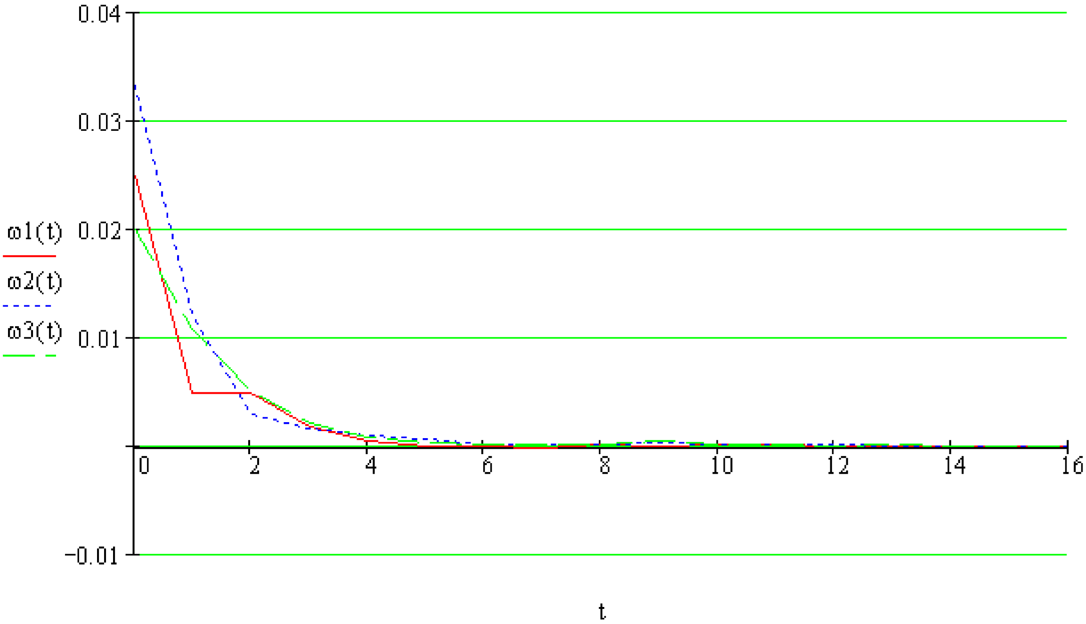

Рисунок 1.

$\xi_1(0) = 0.024$ $\xi_1(16) = -3.782\times10^{-5}$

$\xi_2(0) = 0.027$ $\xi_2(16) = -4.863\times10^{-5}$

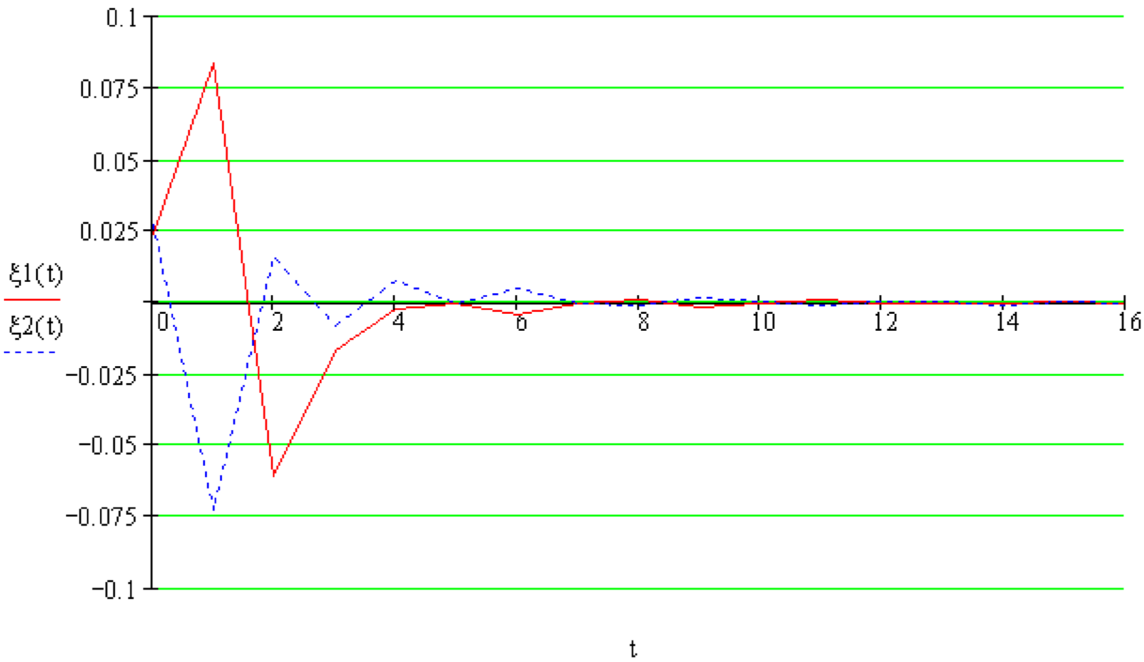

Рисунок 2.

Управление (17) изображено на Рис.3

$$u_1(0) = 8.624 \qquad\qquad u_1(16) = -3.767\times 10^{-4}$$

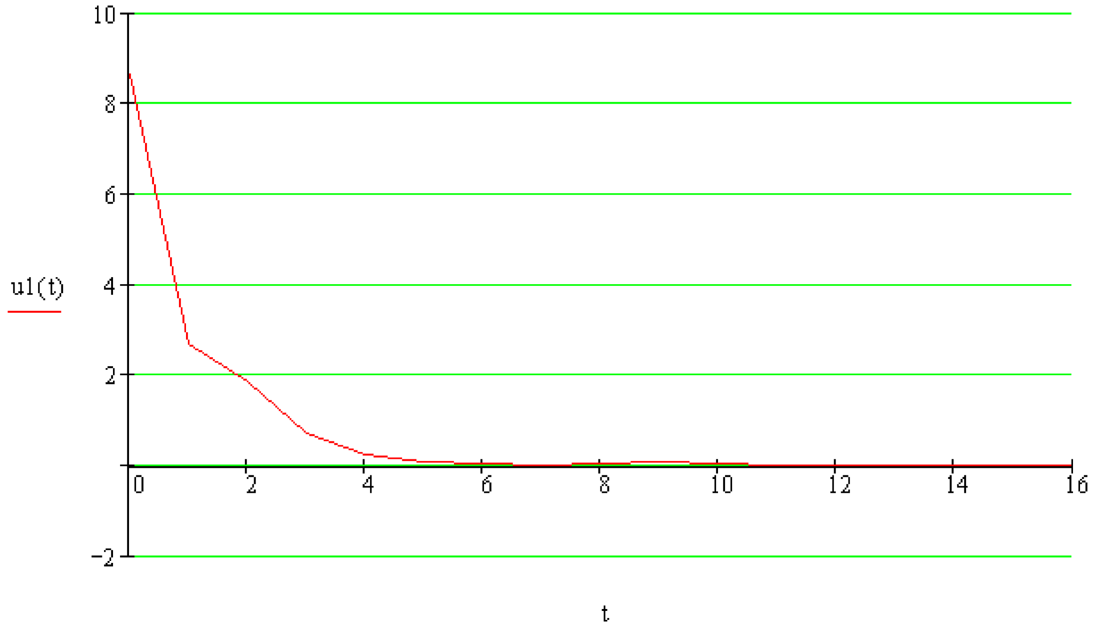

Рисунок 3.

Стабилизация равномерного вращения.

Равномерным вращением будем называть вращение спутника с постоянной угловой скоростью вокруг какой-либо из осей, т.е. $\omega_1 = \omega_1^0,\ \omega_2 = \omega_2^0,\ \omega_3 = \omega_3^0,\quad \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0 \equiv const$.

Изучая для **Случая 1** уравнения линейного приближения в окрестности равномерных вращений, устанавливаем неуправляемость системы по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Так, для стационарного движения (8) в результате линеаризации получаем $\dot{\omega}_3 = 0$, следовательно система (4) не управляема по ω_3. В то же время по оставшимся переменным система линейного приближения

$$\dot{x}_1 = \left[\left(\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3\right)\omega_3^0 x_2 - u\right] / \mathrm{A}_1$$

$$\dot{x}_2 = \left[\left(\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1\right)\omega_3^0 x_1 - \omega_3^0 x_5 + \mathrm{h}(-1)^{\mathrm{n}} x_5 / \mathrm{J}\right] / \mathrm{A}_2$$

$$\dot{x}_4 = x_5 / \mathrm{J} - x_1$$

$$\dot{x}_5 = \mathrm{h}(-1)^{\mathrm{n}+1}\left[\omega_3^0\left(q - \left(\pi/2 + \pi\mathrm{n}\right)\right) + \omega_2\right] + u$$

управляема. Здесь $x_1 = \omega_1,\ x_2 = \omega_2,\ x_3 = \omega_3 - \omega_3^0,\ x_4 = q - \left(\pi/2 + \pi\mathrm{n}\right),\ x_5 = \xi$. Это позволяет построить управление, стабилизирующее равномерное вращение вида (8), где ω_3 после стабилизации принимает значение близкое к начальному состоянию системы и не может быть задана заранее. Так, при выполнении равенств (15) и $\mathrm{J}=3, \mathrm{w}=500, \mathrm{h}=\mathrm{J}\mathrm{w}, \mathrm{n}=2$ построено управление $u=46.546\omega_1+2997.41\omega_2+99.9642(q-(5\pi/2))-1.976\xi$, переводящее начальное состояние системы $\omega_1^0=1/20$, $\omega_2^0=1/30$, $\omega_3^0=30$, $q^0=5\pi/2+\pi/30$, $\xi^0=1/40$ в следующее равномерное вращение $\omega_1=0$, $\omega_2=0$, $\omega_3=29.967$, $q=5\pi/2, \xi=0$.

Аналогичным образом можно охарактеризовать равномерное вращение (10). Для равномерных вращений (9), (11) при линеаризации исходной системы (6) получаем системы, в которых не удается отделить переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, требующие стабилизации, от остальных переменных. В то же время, как уже отмечалось, эти системы неуправляемы по всем переменным.

Рассмотрим **Случай 2**. Для него возможно достичь равномерного вращения вокруг координатной оси Ох с заданной угловой скоростью ω_1^0 при ненулевом управлении. Полагая

$$u_1=0,\ u_2=(-1)^{\mathrm{n}}\,\mathrm{h}_1\,\omega_1^0 \ \text{ и } h_1=h_2 \tag{18}$$

получим равномерное вращение вида

$$\left(\omega_1^0, 0, 0, \mathrm{J}_1\omega_1^0, 0, \frac{\pi}{2}+\pi\mathrm{n}, \pi+\pi\mathrm{n}\right), \quad \mathrm{n}\in Z, \quad \omega_1^0\equiv const.$$

Линеаризуя систему (5) в окрестности этого стационарного движения, получаем систему, в которой первые шесть уравнений не зависят от q_2. Сделаем замену

$$x_1=\omega_1-\omega_1^0,\ x_2=\omega_2,\ x_3=\omega_3,\ x_4=\xi_1-\mathrm{J}_1\omega_1^0, x_5=\xi_2,\ \ x_6=q_1-(\pi/2+\pi\mathrm{n}),\ x_7=q_2-(\pi+\pi\mathrm{n}),$$

тогда линеаризованную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_1\dot{x}_1=(-1)^{\mathrm{n}}\,\mathrm{h}_2 x_5/\mathrm{J}_2-u_1\\
&\mathrm{A}_2\dot{x}_2=(\mathrm{A}_3-\mathrm{A}_1-\mathrm{J}_1)\,\omega_1^0 x_3+(-1)^{\mathrm{n}}\,\mathrm{h}_1 x_4/\mathrm{J}_1-u_2\\
&\mathrm{A}_3 x_3=(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2+\mathrm{J}_1)\,\omega_1^0 x_2-\omega_1^0 x_5+(-1)^{\mathrm{n}}\,\mathrm{h}_1\,\omega_1^0 x_6\\
&\dot{x}_4=(-1)^{\mathrm{n}+1}\,\mathrm{h}_1 x_2+u_1\\
&\dot{x}_5=(-1)^{\mathrm{n}+1}\,\mathrm{h}_2 x_1+u_2\\
&\dot{x}_6=x_4/\mathrm{J}_1-x_1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Система (19) управляема по всем переменным. Пусть справедливы равенства (15) и $\mathrm{n}=0$, $\mathrm{J}_1=\mathrm{J}_2=1$, $\mathrm{w}=250$, $\mathrm{h}_1=\mathrm{J}_1\,\mathrm{w}$, $\mathrm{h}_1=\mathrm{J}_1\,\mathrm{w}$, тогда управление, стабилизирующее вращение спутника вокруг оси Ох, есть

$$u_1=14.09(\omega_1-\omega_1^0)+3.73\omega_2-134.096\omega_3-5.94(\xi_1-\mathrm{J}_1\omega_1^0)-64.4\xi_2+3.34\,(q_1-(\pi/2)) \tag{20}$$

при условии, что управление u_2 определяется из формул (18). Аналогично можно построить управление, обеспечивающее стабилизацию равномерного вращения вокруг оси Оу.

Оптимизация управления.

Во всех приведенных случаях по известному алгоритму [2] строилось стабилизирующее управление, обеспечивающее наперед заданные коэффициенты характеристического уравнения для системы линейного приближения. Коэффициенты выбирались так, чтобы минимизировать норму управления и достичь достаточно быстрой стабилизации.

Так, характеристическое уравнение системы (14)

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0$$

имеет пять корней $\alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\alpha_2 \pm \beta_2 i, \alpha_3$. Вне зависимости от значения мнимых частей этих корней, управление будет стабилизирующим, если $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$. В то же время мнимые части оказывают существенное влияние на величину управления $u_1 = \mathbf{c}^* \mathbf{x}$, так как вектор $\mathbf{c}$ зависит от β_1, β_2. Для минимизации $u_1 = \mathbf{c}^* \mathbf{x}$ ищем такие β_1, β_2, чтобы евклидова норма вектора $\mathbf{c}$ была минимальна, т.е. чтобы функция $\mathrm{g}(\beta_1, \beta_2) = \mathrm{c}_1^2 + \mathrm{c}_2^2 + \mathrm{c}_3^2 + \mathrm{c}_4^2 + \mathrm{c}_5^2$ принимала свое минимальное значение. В рассматриваемом случае (13)-(16) компоненты вектора $\mathbf{c}$ суть

$\mathrm{c}_1 = 485.39\text{-}0.003\ \beta_1^2\text{-}0.003\ \beta_2^2\text{-}0.0005\ \beta_1^2\beta_2^2$, $\mathrm{c}_2 = \text{-}2281.38\text{+}0.53\ \beta_1^2\text{+}0.53\ \beta_2^2\text{+}0.0001\ \beta_1^2\beta_2^2$,

$\mathrm{c}_3 = 1052.46\text{-}0.3\ \beta_1^2\text{-}0.03\ \beta_2^2\text{+}0.0006\ \beta_1^2\beta_2^2$, $\mathrm{c}_4 = \text{-}3.26\text{-}0.0005\ \beta_1^2\text{-}0.0005\ \beta_2^2\text{+}0.2\text{e-}5\ \beta_1^2\beta_2^2$,

$\mathrm{c}_5 = 3.829\text{-}0.002\ \beta_1^2\text{-}0.002\ \beta_2^2\text{+}0.3\text{e-}5\ \beta_1^2\beta_2^2$.

С помощью математического пакета находим, что функция $\mathrm{g}(\beta_1, \beta_2)$ принимает минимальное значение при $\beta_1 = -12.07245$, $\beta_2 = -64.64417$, а управление задается равенством (17). Если же положить, например, $\beta_1 = -64.64417$, $\beta_2 = 0$ то получим управление $u_1 = 473.177\omega_1 - 67.072\omega_2 - 217.621\omega_3 - 5.393\xi_1 - 2.83\xi_2$, которое принимает гораздо большие значения по сравнению с оптимизированным управлением (17). Результаты численного моделирования применения не оптимизированного управления для стабилизации системы (6) с начальным условием (1/40, 1/30, 1/50, π/6, π/3, 1/42, 1/37) приведены на рисунках 4,5.

$\omega_1(0) = 0.025$ $\qquad$ $\omega_1(16) = 0.01$

$\omega_2(0) = 0.033$ $\qquad$ $\omega_2(16) = -4.056\times10^{-3}$

$\omega_3(0) = 0.02$ $\qquad\qquad$ $\omega_3(16) = 2.636\times10^{-3}$

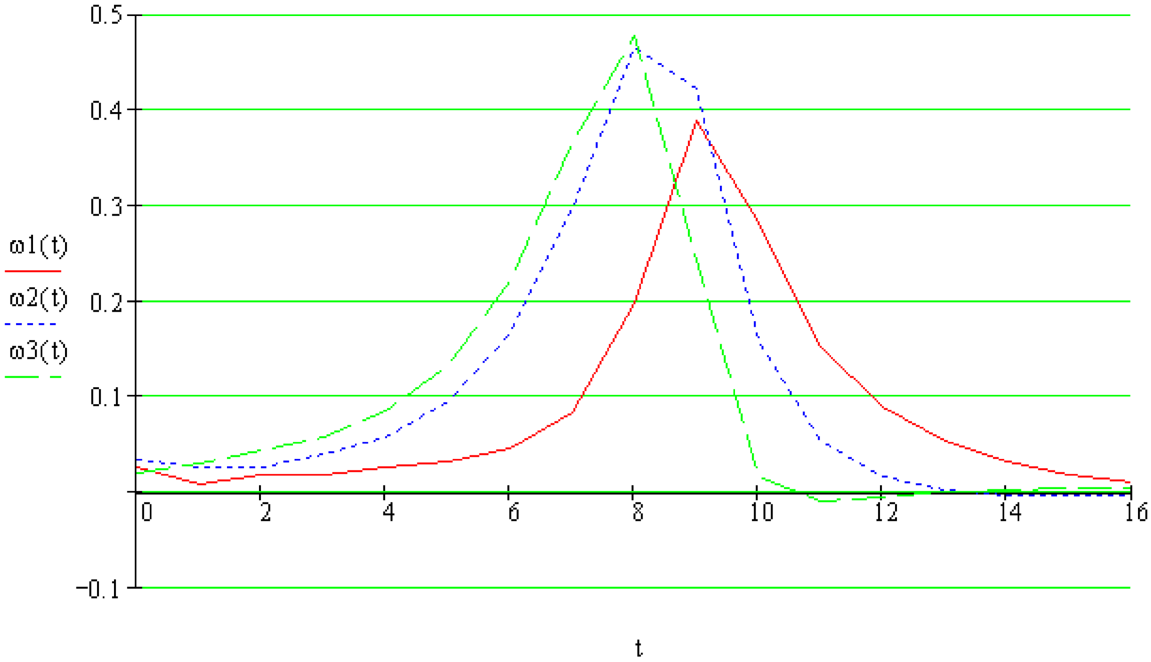

Рисунок 4.

$u_1(0) = 5.036$ $\qquad$ $u_1(16) = 4.521$ $\qquad$ $u_1(20) = 0.477$

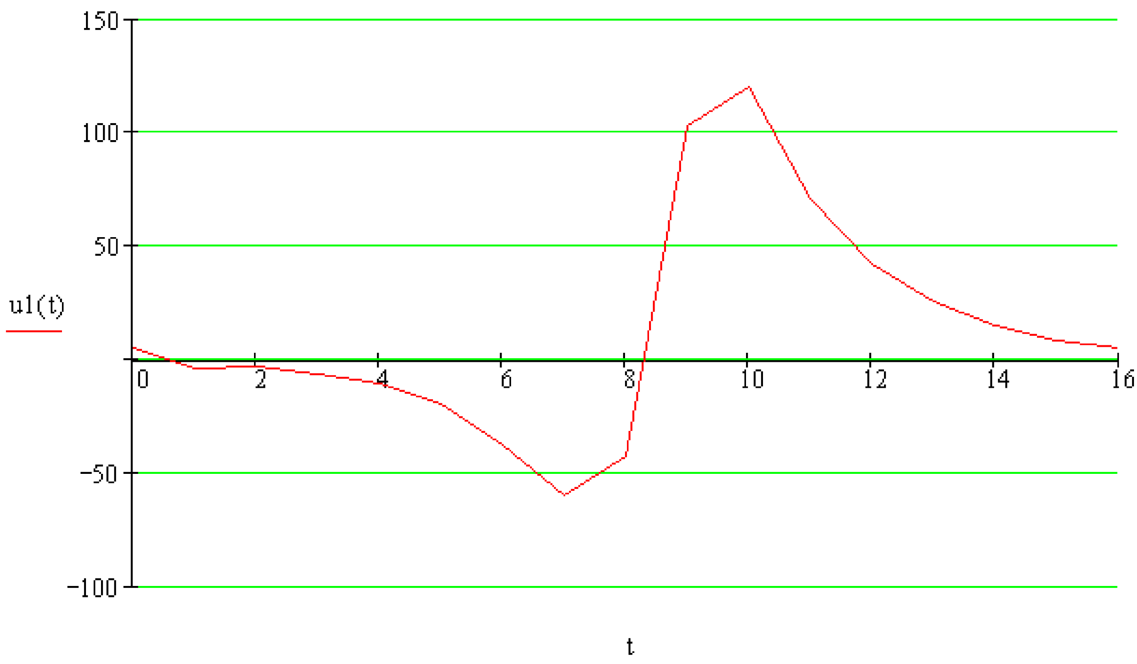

Рисунок 5.

Чтобы построить стабилизирующее управление для системы (19) рассматриваем характеристическое уравнение шестого порядка, которое имеет три пары комплексно сопряженных корней $\alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\alpha_2 \pm \beta_2 i$, $\alpha_3 \pm \beta_3 i$. Снова принимаем $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$, тогда функция $g(\beta_1, \beta_2\, \beta_3)$ принимает минимальное значение при $\beta_1 = 1.39325$, $\beta_2 = 17.9884$, $\beta_3 = 14.042$, а управление задается равенством (20).

Литература.

1. Гладун А.В. Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению// Труды Института прикладной математики и механики. – 1998. Том 2. – с21 – 31.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Понтрягин А.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 332 с.
4. Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. – Л.: Издательство ЛГУ, 1985. – 313 с.
5. P.V. Kharlamov, A.M. Kovalev. Invariant relations method in multibody dynamics// Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 30, No 6, pp. 3817-3828, 1997.