Scientific Community of Students and Postgraduates
Cybernetics Faculty of Taras Shevchenko National University of Kyiv
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine
Institute of Software Systems of NAS of Ukraine

PROCEEDINGS OF

The International Scientific Conference of Students and Young Scientists

Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics

Kiyv
"Bukrek"
2011

Contents

Алгебры языков, представимых в отмеченных графах

Е. А. Пряничникова

В работе исследованы основные особенности алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, и изучена взаимосвязь этой алгебры и алгебры языков, распознаваемых конечными автоматами. Показано, что класс языков, представимых регулярными выражениями рассматриваемой алгебры, совпадает с классом всех регулярных языков, не содержащих пустого слова. Доказано существование изоморфных подалгебр у рассмотренных алгебр. Получены отображения, позволяющие по регулярным выражениям одной алгебры переходить к регулярным выражениям другой алгебры, представляющим тот же язык. Показано, что алгебра языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, не является алгеброй Клини, и между этой алгеброй и алгеброй регулярных языков нет гомоморфизма.

Введение

В компьютерных науках широко применяются различные графовые модели, среди которых наиболее изученными являются графы с отмеченными дугами (автоматы). Удобным средством для представления языков, задаваемых графами с отмеченными дугами, является алгебра регулярных языков, позволяющая использовать алгебраические методы для решения прикладных задач, связанных с исследованием таких графов [1].

В настоящее время существуют актуальные задачи, которые естественным образом представляются в виде графов с отмеченными вершинами (в основном в робототехнике [2] и формальных методах разработки программ[3]). В работе [4] вводится алгебра, которая может быть использована при работе с языками, представимыми графами с отмеченными вершинами, аналогично тому, как алгебра регулярных языков используется для конечных автоматов. В связи с широким использованием графов с отмеченными вершинами, является актуальной задача исследования свойств введенной алгебры.

Цель данной работы состоит в сравнении структур и выразимости алгебры языков, распознаваемых конечными автоматами, и алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами.

Определения и обозначения

Назовем графом с отмеченными вершинами четверку $G = (Q, E, X, \mu)$, где Q - конечное множество вершин, $\mid Q \mid = n$, $E \subseteq Q \times Q$- множество дуг, X-конечный алфавит отметок вершин, $\mu : Q \to X$- функция отметок вершин. Пусть $I \subseteq Q$- множество начальных, а $F \subseteq Q$- множество финальных вершин графа G.

Путем в графе G будем называть конечную последовательность вершин $l = q1q2...qk$, где $(q_i, q_{i+1}) \in E$. Число k будем называть длиной, q_1 - начальной, а q_k - конечной вершиной пути l. Отметкой пути l будем называть последовательность отметок вершин $\mu(q_1)\mu(q_2)...\mu(q_k)$. Языком, порожденным вершиной q_i, назовем множество отметок всех путей в графе G, у которых начальной вершиной является вершина q_i, а конечная вершина принадлежит множеству финальных вершин. Множество отметок всех путей в графе G, начальные вершины которых принадлежат множеству I, а конечные - множеству F, назовем языком, порождаемым графом G, и обозначим $L(G)$.

Рассмотрим алгебру $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ со следующими операциями на языках $L, R \in 2^{X^+}$.

1) $L \cup R = \{w | w \in L$ или $w \in R\}$;
2) $L \circ R = \{w_1 \circ w_2 | w_1 \in L$ и $w_2 \in R\}$, где операция $\circ$ на множестве слов в конечном алфавите X определяется следующим образом: для всех $w_1, w_2 \in X^+$ и всех $x, y \in X$

$$w_1 x \circ y w_2 = \begin{cases} w_1 x w_2, & \text{если } x = y; \\ \text{не определено}, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

3) $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, где $L^0 = X$; $L^{n+1} = L^n \circ L$ для всех $n \geq 0$;
4) $L^{\circledast} = L_{beg} \circ L^* \circ L_{end}$, где $L_{beg} = \{x | xw \in L, x \in X, w \in X^*\}$; $L_{end} = \{x | wx \in L, x \in X, w \in X^*\}$.

Регулярные выражения в алгебре $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ определим индуктивно:
1) $\emptyset$ является регулярным выражением;
2) x и xy является регулярными выражениями для всех $x, y \in X$;
3) если p и q - регулярные выражения, то выражения $(p \circ q)$, $(p \cup q)$, $(p^{\circledast})$ также являются регулярными.

Язык, обозначаемый регулярным выражением r, будем обозначать $L(r)$. Два регулярных выражения будем называть эквивалентными, если совпадают языки, которые они обозначают.

Обозначим множество всех регулярных выражений алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ через $\Re'$, множество всех регулярных выражений алгебры регулярных языков $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$ через $\Re$.

Основные особенности алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами

Рассматриваемая алгебра $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ является замкнутым идемпотентным полукольцом с одной дополнительной операцией итерации.

Утверждение. Класс языков, представимых регулярными выражениями алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$, совпадает с классом всех регулярных языков, не содержащих пустого слова.

Данное утверждение основано на том, что в работе [1] было показано, что любой язык, порождаемый графом с отмеченными вершинами, представим регулярным выражением алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$, а в работе [4] доказывается, что язык порождается графом с отмеченными вершинами тогда и только тогда, он представим регулярным выражением алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$.

Теорема 1. У алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ есть подалгебры, изоморфные подалгебрам алгебры регулярных языков $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$.

Доказательство. Для любого символа алфавита $x \in X$ рассмотрим множество всех таких языков $L \in 2^{X^+}$, все слова которых начинаются и заканчиваются символом x. Это множество языков образует подалгебру алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$. Особенностью всех таких языков будет то, что результат применения к ним операции $\otimes$ будет содержать x, а $P \circ Q = \emptyset$ только в том случае, если $P = \emptyset$ или $Q = \emptyset$.

Каждому такому языку можно поставить в соответствие язык $L' \in 2^{X^*}$ таким образом, что для каждого слова $w \in L$, в язык L' входит слово w', полученное из слова w с помощью удвоения всех его символов, кроме первого и последнего. При этом символу x будет соответствовать пустое слово λ. Множество всех таких языков L' образует подалгебру алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$. Из свойств операции алгебр $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ и $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda \rangle$ следует, что рассмотренное отношение между подалгебрами является изоморфизмом.

Теорема 2. Существует отображение $\varphi : \Re \to \Re'$, сохраняющее языки, то есть для любого регулярного выражения p алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$ есть регулярное выражение $p' = \varphi(p)$ алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X \rangle$, для которого $L(p') = L(p) - \{\lambda\}$.

Теорема 3. Существует такое отображение $\varphi : \Re' \to \Re$, что для любого регулярного выражения p алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X\rangle$ существует регулярное выражение $p' = \varphi(p)$ алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda\rangle$, для которого $L(p') = L(p)$.

Наряду с общими чертами, алгебра языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, существенно отличается от алгебры регулярных языков. Как следствие этих особенностей, алгебра $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X\rangle$, в отличие от алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda\rangle$, не является алгеброй Клини.

Основные отличия рассматриваемой алгебры от алгебр Клини связаны с тем, что, в отличие от конкатенации, операция $\circ$ частичная. Если в алгебре Клини $p \cdot q = \emptyset$ только в том случае, когда $p = \emptyset$ или $q = \emptyset$, то в алгебре $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X\rangle$ легко подобрать примеры, когда это не верно: пусть $L(p) = \{ab\}$, $L(q) = \{cd\}$, тогда $p \circ q = \emptyset$.

Еще одно важное отличие заключается в том, что в алгебре Клини множество L^* всегда содержит пустое слово и является бесконечным для любого L, а в алгебре $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X\rangle$ можно привести примеры множеств, для которых результат применения операции $\otimes$ будет бесконечным, конечным или пустым множеством: если $L(p) = \{aba\}$, то $L(p^{\otimes}) = \{a, aba, ababa, ...\}$; если $L(p) = \{ab\}$, то $L(p^{\otimes}) = \{ab\}$; если $p = \emptyset$, то $p^{\otimes} = \emptyset$.

Теорема 4. Не существует отображений алгебры $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X\rangle$ в алгебру $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda\rangle$ и алгебры $\langle 2^{X^*}, \cdot, \cup, *, \emptyset, \lambda\rangle$ в алгебру $\langle 2^{X^+}, \circ, \cup, \otimes, \emptyset, X\rangle$, которые являются гомоморфизмами.

Выводы

В работе исследованы основные особенности алгебры языков, представимых в графах с отмеченными вершинами. Показано, что класс языков, представимых регулярными выражениями этой алгебры, совпадает с классом всех регулярных языков, не содержащих пустого слова. Доказано существование изоморфных подалгебр у рассматриваемых алгебр. Получены отображения, позволяющие по регулярным выражениям одной алгебры переходить к регулярным выражениям другой алгебры, представляющим тот же язык. Показано, что алгебра языков, представимых в графах с отмеченными вершинами, не является алгеброй Клини, и между этой алгеброй и алгеброй регулярных языков нет гомоморфизма. Все полученные результаты являются конструктивными.

Список литературы

[1] Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. — М., Наука, 1988.

[2] Dudek G., Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics. — Cambridge, Cambridge University Press, 2000.

[3] Baier C., Katoen J.-P. Principles of Model Checking. — Cambridge, MIT Press, 2008.

[4] Грунский И.С., Пряничникова Е.А. Об алгебре языков, представимых графами с отмеченными вершинами. // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. - 2009. - т.18. - С. 37-46.

Авторы

Елена Алексеевна Пряничникова — ассистент, кафедра программного обеспечения интеллектуальных систем, факультет Современных компьютерных информационных технологий, Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк, Украина; E-mail: *ginger701@mail.ru*