Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Материалы XVI Международной конференции

(*Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.*)

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2011

УДК 519.7
ББК 22.18
П 78

Под общей редакцией
Ю. И. Журавлева

П 78 **Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции** (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю. И. Журавлева. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. — 586 с.

ISBN 978-5-91326-161-8

Сборник содержит доклады, представленные на XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.), организованной при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-06036-г).

Для научных работников и специалистов в области математической кибернетики, дискретной математики, информатики и их приложений.

УДК 519.7
ББК 22.18

Редакционная группа:
В. Б. Алексеев, О. М. Касим-Заде, В. Н. Шевченко

Ответственный за выпуск: Н. Ю. Золотых

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 11-01-06036-г

ISBN 978-5-91326-161-8

Содержание

Алгебры языков, представимых в размеченных графах

Е. А. Пряничникова

pryanichnikovae@gmail.com

Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк

Вводится система операций на формальных языках, которая, в частности, может использоваться в биологии, генетике, а также ДНК-вычислениях. Для этой системы операций вводится понятие регулярных выражений. Определяется понятие языка, допустимого в конечном автомате (в графе с отмеченными вершинами). Доказано, что язык L допустим в конечном автомате (в графе с отмеченными вершинами) тогда и только тогда, когда он описывается регулярным выражением во введенной системе операций.

Основные определения

Пусть X — конечный алфавит, X^* — множество всех слов конечной длины в алфавите X, X^+ — множество всех непустых слов конечной длины в алфавите X, X^n — множество всех слов длины n в алфавите X, $X^{\geqslant n}$ — множество всех слов конечной длины в алфавите X, длина которых больше или равна n , 2^{X^*} — множество всех языков в алфавите X. Обозначим пустое множество через $\varnothing$, пустое слово через λ. Конкатенацию двух слов $u \in X^+$ и $v \in X^+$ обозначим uv. Конкатенацию двух языков $L, R \in 2^{X^+}$ обозначим через $L \cdot R$ или LR и определим как $L \cdot R = \{uv | u \in L, v \in R\}$.

Определим на множестве X^* частичную бинарную операцию $\overset{n}{\circ}$ склеивания двух слов с параметром n следующим образом: для всех $w_1, w_2 \in X^*$

$$w_1 \overset{n}{\circ} w_2 = \begin{cases} xyz, & \text{если } w_1 = xy,\ w_2 = yz,\ y \in X^n; \\ \text{не определено}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае когда $n = 0$, введенная операция совпадает с операцией конкатенации слов.

Введем на языках L, $R \subseteq X^*$ следующие операции:

1) $L \cup R = \{w | w \in L \text{ или } w \in R\}$;

2) $L \overset{n}{\circ} R = \{w_1 \overset{n}{\circ} w_2 | w_1 \in L$ и $w_2 \in R\}$;
3) $L^{\overset{n}{+}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$, где $L^1 = L$; $L^{i+1} = L^i \overset{n}{\circ} L$ для всех $i \geqslant 1$;
4) $L^{\overset{n}{*}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$, где $L^0 = X^n$; $L^{i+1} = L^i \overset{n}{\circ} L$ для всех $i \geqslant 0$.

Введенные операции на формальных языках, в частности, могут использоваться в биологии, генетике, ДНК-вычислениях [1].

Операция $\overset{n}{\circ}$ ассоциативна при любом n, то есть $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ})$ и $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ})$ — полугруппы. Нейтральный элемент по операции $\overset{n}{\circ}$ существует тогда и только тогда, когда она определена на множестве языков, в которых нет слов с длиной меньше n. Если нейтральный элемент существует, то он равен X^n. Таким образом, полугруппа $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ})$ является моноидом только при $n = 0$.

Рассмотрим два семейства алгебр $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ и $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$.

Все алгебры $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$ являются полукольцами. Алгебра $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ будет иметь единицу по операции $\overset{n}{\circ}$ только в случае, когда $n = 0$ и операция $\overset{n}{\circ}$ совпадает с конкатенацией, а рассматриваемая алгебра является алгеброй регулярных языков. Во всех остальных случаях эти алгебры не будут полукольцами.

Регулярные выражения в алгебре $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$ определим рекурсивно следующим образом:

1) $\varnothing$ является регулярным выражением и представляет язык $L(\varnothing) = \varnothing$;
2) x является регулярным выражением и представляет язык $L(x) = \{x\}$ для всех $x \in X^n \cup X^{n+1}$;
3) если R и Q — регулярные выражения, представляющие языки $L(R)$ и $L(Q)$ соответственно, то выражения $(R \overset{n}{\circ} Q)$, $(R \cup Q)$, $(R^{\overset{n}{*}})$ также являются регулярными, причем $L(R \overset{n}{\circ} Q) = L(R) \overset{n}{\circ} L(Q)$, $L(R \cup Q) = L(R) \cup L(Q)$, $L(R^{\overset{n}{*}}) = (L(R))^{\overset{n}{*}}$.

Регулярные выражения в алгебре $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ определим следующим образом:

1) $\varnothing$ является регулярным выражением и представляет язык $L(\varnothing) = \varnothing$;

2) x является регулярным выражением и представляет язык $L(x) = \{x\}$ для всех $x \in \bigcup\limits_{0 \leqslant i \leqslant n+1} X^i$;

3) если R и Q — регулярные выражения, представляющие языки $L(R)$ и $L(Q)$ соответственно, то выражения $(R \overset{n}{\circ} Q)$, $(R \cup Q)$, $(R^{\overset{n}{+}})$ также являются регулярными, причем $L(R \overset{n}{\circ} Q) = L(R) \overset{n}{\circ} L(Q)$, $L(R \cup Q) = L(R) \cup L(Q)$, $L(R^{\overset{n}{+}}) = (L(R))^{\overset{n}{+}}$.

Графом с отмеченными дугами (конечным автоматом) назовем четверку $G = (Q, E, X, \mu)$, где Q — конечное множество вершин, $\mid Q \mid = n$, $E \subseteq Q \times Q$ — множество дуг, X — множество отметок, $\mu : E \to X$ — функция отметок дуг.

Графом с отмеченными вершинами назовем четверку $G = (Q, E, X, \mu)$, где Q — конечное множество вершин, $|Q| = n$, $E \subseteq Q \times Q$ — множество дуг, X — множество отметок вершин, $\mu : Q \to X$ — функция отметок вершин.

Пусть $I \subseteq Q$ — множество начальных вершин графа, $F \subseteq Q$ — множество финальных вершин. Множество отметок всех путей, начальной вершиной которых является вершина q_i, а конечная вершина $q_k \in F$, назовем языком, порожденным вершиной q_i. Отметки всех путей в графе G, начальные вершины которых принадлежат множеству I, а конечные — множеству F, назовем языком, допускаемым графом G, и обозначим $L(G)$.

В теории конечных автоматов одним из важнейших результатов является теорема Клини, в которой утверждается, что класс языков, распознаваемых конечными автоматами, совпадает с классом рациональных языков, представимых регулярными выражениями алгебры Клини [2]. Основная цель данной работы — доказать аналогичную теорему для более широкого класса размеченных графов и алгебр.

Основные результаты

Теорема 1. *Язык $L \subseteq X^*$ допустим в конечном автомате (в графе с отмеченными вершинами) тогда и только тогда, когда он описывается регулярным выражением любой алгебры из рассматриваемых двух семейств* $(2^{X^*}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{+}, \varnothing)$ *и* $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$.

Эта теорема в некотором смысле аналогична широко известной теореме Клини для конечных автоматов. В случае когда $n = 0$ и рассматриваются только графы с отмеченными дугами, теорема 1 совпадает с теоремой Клини. На основе доказательства теоремы разработаны методы анализа и синтеза языков, представимых в графах с отмеченными вершинами.

Поскольку для описания одного и того же класса графов можно использовать различные алгебры, представляет интерес вопрос о связи таких алгебр между собой.

Теорема 2. *Для двух полуколец* $(2^{X^{\geqslant n_1}}, \overset{n_1}{\circ}, \cup, \overset{n_1}{*}, X_1^n, \varnothing)$ *и* $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$ *в случае, когда* $n_1 < n_2$ *, существует такое отображение* $\varphi : 2^{X^{\geqslant n_1}} \to 2^{X^{\geqslant n_2}}$*, которое является гомоморфизмом. Если* $n_2 > n_1$*, то гомоморфизма нет.*

Рассматриваемое в теореме отображение является сюръекцией, поэтому в случае, когда $n_1 < n_2$, полукольцо $(2^{X^{\geqslant n_1}}, \overset{n_1}{\circ}, \cup, \overset{n_1}{*}, X_1^n, \varnothing)$ изоморфно вложимо в полукольцо $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$, причем образ φ является подполукольцом в $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$, а значит, все рассматриваемые полукольца входят в одно квазимногообразие, в которое входит алгебра регулярных языков.

Теорема 3. *Пусть* $\Re(n)$ *— множество всех регулярных выражений алгебры* $(2^{X^{\geqslant n}}, \overset{n}{\circ}, \cup, \overset{n}{*}, X^n, \varnothing)$*. Если* $n_1 < n_2$*, то существует такое отображение* $\psi : \Re(n_1) \to \Re(n_2)$*, которое сохраняет язык регулярного выражения, т. е. если* r *— регулярное выражение алгебры* $(2^{X^{\geqslant n_1}}, \overset{n_1}{\circ}, \cup, \overset{n_1}{*}, X_1^n, \varnothing)$, $L(r)$ *— язык, представляемый этим регулярным выражением, то* $\psi(r)$ *— это регулярное выражение алгебры* $(2^{X^{\geqslant n_2}}, \overset{n_2}{\circ}, \cup, \overset{n_2}{*}, X_2^n, \varnothing)$ *и* $L(\psi(r)) = L(r)$.

Заключение

В данной работе исследованы основные свойства семейства алгебр языков, допустимых в размеченных графах, найдена алгебраическая характеризация языков, представимых регулярными выражениями этих алгебр, разработаны методы анализа и синтеза рассматриваемых языков.

Список литературы

[1] *Anderson J.* Automata Theory with Modern Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] *Капитонова Ю. В., Летичевский А. А.* Математическая теория проектирования вычислительных систем. — М.: Наука, 1988.

Структурные свойства комбинаторных систем, описываемых субмодулярными функциями

А. М. Ревякин

Arevyakin@mail.ru

Московский государственный институт электронной техники

Пусть $P(S)$ — множество всех подмножеств конечного множества S. Система $\mathcal{I} \subsetneq P(S)$ подмножеств из S называется матроидом $M = (S, \mathcal{I})$, а множества из $\mathcal{I}$ — независимыми, если выполняются следующие условия: (i1) $\varnothing \in \mathcal{I}$; (i2) если $A \subsetneq B$ и $B \in \mathcal{I}$, то $A \in \mathcal{I}$; (i3) если $A, B \in \mathcal{I}$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \setminus B$, такое, что $B \cup \{a\} \in \mathcal{I}$.

Ранговой функцией матроида M на множестве S называется целочисленная функция $r(A)$, определенная для всех $A \subsetneq S$, такая, что $r(A) = \max\{|X| : X \subsetneq A$ и $X \in \mathcal{I}\}$.

Пара (S, r), где r — целочисленная функция (ранг), определенная на подмножествах конечного множества S, образует матроид, если для всех $A, B \subsetneq S$ и любых $a, b \in S$ выполняются либо свойства: (r1) $0 \leqslant r(A) \leqslant |A|$; (r2) если $A \subsetneq B$, то $r(A) \leqslant r(B)$; (r3) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leqslant r(A) + r(B)$; либо: (r4) $r(\varnothing) = 0$; (r5) $r(A) \leqslant r(A \cup \{a\}) \leqslant r(A) + 1$; (r6) если $r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\})$, то $r(A) = r(A \cup \{a, b\})$. При этом семейство $\mathcal{I}$ подмножеств множества S, для которых $r(A) = |A|$, образует матроид $(S, \mathcal{I})$ с ранговой функцией r.

Конечное множество S с оператором замыкания $A \to \overline{A}$, определенным для всех $A \subsetneq S$ (т.е. (cl1) $A \subsetneq \overline{A}$ для всех $A \subsetneq S$; (cl2) если $A, B \subsetneq S$ и $A \subsetneq B$, то $\overline{A} \subsetneq \overline{B}$; (cl3) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ для всех $A \subsetneq S$) и удовлетворяющим свойству замены: (cl4) для любых $x, y \in S$ и всякого $A \subsetneq S$ из $y \in \overline{A \cup \{x\}}$ и $y \notin \overline{A}$ следует, что $x \in \overline{A \cup \{y\}}$, образует матроид $(S, \overline{})$. Причем семейство $\mathcal{I}$ подмножеств $A \subsetneq S$, таких, что из $x \in A$ следует, что $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$, образует матроид $M = (S, \mathcal{I})$.

Если $\overline{A} = A$, то A называется замкнутым (или поверхностью) в M. Пара $(S, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств (поверхностей) из S, образует матроид, если (f1) $S \in \mathcal{F}$; (f2) если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, то