УДК 004.047

# РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД ЭЛЕМЕНТАМИ ТЕТРАКОДОВ

**Иваница С.В., Аноприенко А.Я.**
Донецкий национальный технический университет
кафедра компьютерной инженерии
E-mail: ivanitsa-serg@rambler.ru, anoprien@cs.dgtu.donetsk.ua

***Аннотация***

***Иваница С.В., Аноприенко А.Я. Реализация логических операций над элементами тетракодов.*** *Рассмотрен вариант представления элементов тетралогики с помощью аксиоматического аппарата теории множеств. Предложены основные аспекты построения логических операций с элементами тетракода, представляющего собой множество, включающее в себя четыре логических состояния. Предложена реализация логических операций над состояниями множественности и неопределенности, предполагающая раздвоение (распараллеливание) множественности, как множественности в ее понятийном представлении, так и в виде доминирующего над абсолютной неопределенностью состояния.*

## Общая постановка проблемы

Уже на протяжении многих лет логика рассматривается как наука о формах, методах и законах интеллектуальной познавательной деятельности. Причем эти методы и законы формализуются с помощью так называемого алфавита (или языка) логики [1]. Так как логика служит одним из инструментов почти любой науки, то с появлением и широким распространением вычислительной техники, логика оказала значимое влияние на развитие искусственного, (а позже, и вычислительного) интеллекта. Современное состояние «логического аппарата» ЭВМ представляет собой рубеж, преодоление которого положит начало создания вычислительной техники нового поколения, в качестве обобщающего названия которого возможно использование термина «постбинарный компьютинг» [2].

Таким образом, введение новых логических значений позволяет значительно расширить возможности формализованной логической оценки разнообразных реальных процессов и ситуаций, что является существенным шагом к «очеловечиванию» машинной логики. К одному из таких перспективных составляющих можно отнести двумерное логическое пространство, которое может быть порождено базисом, состоящей из ортонормированной системы векторов «истина» и «ложь» с положительными и отрицательными осями. Такое логическое пространство порождает множество логических значений, которые могут задаваться либо соответствующими координатами, либо фиксацией характерных точек. В работе [3] было предложено логики третьего и более высоких порядков объединить одним термином «гиперлогика», а все соответствующие этим логикам системы кодирования — термином «гиперкоды». Совокупность понятий гиперлогики и гиперкодов образуют более обобщенное понятие: «расширенный кодо-логический базис».

В данной работе рассмотрены основные аспекты построения логических операций с элементами тетракода, представляющего собой множество, включающее четыре логических значения (состояния). При этом показан оптимальный вариант тетракода, включающий в себя наряду с классическими «истиной» и «ложью», значения «неопределенности» и «множественности». Полученные результаты станут основополагающим фундаментом для дальнейшего развития так называемой «алгебры тетралогики», представляющей такую логику, в которой показаны и изучены логические операции над тетракодовыми представлениями количественной информации.

**Представление элементов тетралогики**
**с помощью аксиоматического аппарата теории множеств**

Современная теория множеств строится на системе аксиом Цермело-Френкеля (ZF — Zermelo-Fraenkel), из которых выводятся все теоремы и утверждения теории множеств. К системе аксиом ZF часто добавляют аксиому выбора, и называют системой Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC — Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of Choice) [4, с.157-166].

В контексте тетралогики система ZFC также представляет интерес, поскольку всякое логическое пространство может быть «переведено» на язык теории множеств таким образом, что полученные теоремы станут теоремами о множествах, доказуемыми из аксиом ZFC, поскольку любой объект можно считать множеством, и, соответственно, появляется возможность переформулировать какое-либо утверждение не нарушив его первоначальную истинность.

Тетракодовое логическое (или тетралогическое) пространство можно представить совокупностью четырех непустых множеств: *Q*, *J* — содержащих по одному фиксированному логическому элементу («истина», «ложь»); *A*, *M* — содержащих, в конечном представлении, по два элемента, представляющих собой результат логической операции над элементами множеств *Q*, *J* («истина» или «ложь», «истина» и «ложь»):

$$\forall q\, \exists Q\, (q \subseteq Q \to q = 0); \tag{1}$$

$$\forall j\, \exists J\, (j \subseteq J \to j = 1); \tag{2}$$

$$\forall a\, \exists A\, (a \subset A \to a \in Q \vee a \in J); \tag{3}$$

$$\forall m\, \exists M\, (m \subset M \to m \in Q \wedge m \in J). \tag{4}$$

Из (1) и (2) очевидно, что множества $Q$ и $J$ представляют собой множества фиксированных значений $\{0\}$ и $\{1\}$ соответственно $(q \in Q \to q - \text{const}\,0;\ j \in J \to j - \text{const}\,1)$. Выражение (3) показывает, что множество *A* определимо как сумма (объединение) множеств $Q$ и $J$ $(a \in (Q \cup J))$ и словесно может быть описано так: «*или 0 или 1*». Выражение (4) показывает, что множество *M* определимо как произведение (пересечение) множеств $Q$ и $J$ $(m \in (Q \cap J))$ и словесно может быть описано так: «*и 0 и 1*».

Однако для полного представления гиперлогического пространства необходимо ввести еще одно множество-универсум *U*, представляющее собой пространство, содержащее все четыре ранее объявленных множества. Таким образом,

$$\forall q\, \forall j\, \forall a\, \forall m\, \exists U = \{u : u \in q \vee u \in j \vee u \in a \vee u \in m\}. \tag{5}$$

Из (5) следует, что множество *U* представляет собой один из элементов тетракода, имеющего возможность каждый элемент множества {*Q*, *J*, *A*, *M*} при определенных обстоятельствах представлять в виде логического «0» или «1».

На заключительном этапе представления элементов тетралогики, с учетом их определений (1-5), можно выделить следующие закономерности: $0 = Q$ (в частности, $q \in \{0\}$); $1 = J$ (в частности, $j \in \{1\}$); $(A \cap M) \subset (A \cup M) \subset U$ — для множеств *A* и *M* на универсуме *U* определены операции объединения и пересечения; $a \in (Q \cup J), q \subset A, j \subset A, (Q \cup J) \neq \varnothing \Rightarrow a \notin \varnothing \vee a \in \{0,1\}$ — формирование множества неоднозначности *A*; $m \in (Q \cap J), q \subset M, j \subset M, (Q \cap J) = \varnothing \Rightarrow m \in \varnothing \vee m \in \{0\} \wedge m \in \{1\}$ — выделение противоречия при формировании множественности *M*: *множество M не может быть пустым, однако для множеств Q и J не определена операция пересечения*.

Возникшее противоречие в данном представлении очень выгодно, так как позволяет объяснить ряд существующих спорных моментов. Во-первых, данное противоречие проявляется и в определении самой «множественности», поскольку при одновременном поступлении противоречивых высказываний, попытка зафиксировать сразу два значения «истина» и «ложь» приведет к логическому парадоксу, при котором компьютер (являющийся по своей сути классическим двузначным логиком) должен полностью отказаться от принятия и дальнейшей обработки противоречивой информации. Во-вторых, из двух значений (множеств) тетралогики *A* и *M*, данное противоречие **позволяет в ряде случаев выделить множественность *M* как доминирующее над неопределенностью *A* состояние**, и в качестве альтернативного выхода из данного противоречия предложить поочередную подстановку значений «1» и «0» (в контексте традиционного бинарного компьютинга) в содержащее эту множественность тетракодовое представление числа.

**Реализация базовых логических**
**операций с элементами тетралогики**

Реализация базовых логических операций отрицания «НЕ» («NOT»), логического сложения «ИЛИ» («OR»), логического умножения «И» («AND») на тетралогическом множестве-универсуме *U* производится также с помощью аксиоматики теории множеств.

*Отрицание* — унарная (одноместная) операция над высказываниями, результатом которой является высказывание (в известном смысле) «противоположное» исходному. Для обозначения отрицания множества примем следующие обозначения: если φ — элемент множества Ω, являющегося подмножеством универсума *U*, то отрицание φ — элемент $\overline{\varphi}$ множества $\overline{\Omega}$, и при этом справедлива следующая запись:

$$\varphi \in \Omega, \Omega \subset U \;\Rightarrow\; \overline{\varphi} \in \overline{\Omega}, \overline{\Omega} \subset U \;\Rightarrow\; \overline{\varphi} \in \overline{\Omega} \neq \varphi \in \Omega,\; \varphi, \overline{\varphi} \in U.$$

Однозначно представимые «ложь» и «истина» по своему определению являются элементами классической двоичной логики, т. е. для множеств $Q = \{0\}$ и $J = \{1\}$ справедливы следующие равенства: $\overline{Q} = J,\, \overline{J} = Q \;\Leftrightarrow\; \overline{0} = 1, \overline{1} = 0$.

Для множества *A*, причем каждый его элемент $a \in (Q \cup J) \Leftrightarrow a \in U$, операция отрицания может быть определена следующим высказыванием:

$$\forall a \in A, U \; \exists \overline{A} \left( \overline{A} = \left\{ \overline{a} : \overline{a} \notin A \vee \overline{a} \in U \to \overline{a} \notin (Q \cup J) \vee \overline{a} \in \left(\overline{Q} \cup \overline{J}\right) \to \overline{a} \in A \right\} \right).$$

Это означает, что если $a \in (Q \cup J)$, то $\overline{a} \in \left(\overline{Q} \cup \overline{J}\right)$, откуда в силу равенства $\overline{Q} \cup \overline{J} = Q \cup J$ получаем, что $a$ и $\overline{a}$ принадлежат одному множеству, т. е. $\overline{A} = A$ — верное равенство.

Для определения операции отрицания множества *M*, необходимо наличие условия $J \cap Q \neq \varnothing$ (в обход противоречию, возникшему при определении множественности *M*). С учетом наличия условия $J \cap Q \neq \varnothing$, справедливо равенство $\left(J \cap Q = \overline{Q} \cap \overline{J}\right) \subset U$. Тогда каждый элемент множества *M* такой, что $m \in (Q \cap J) \Leftrightarrow m \in U$, и операция отрицания для *M* может быть определена следующим высказыванием:

$$\forall m \in M, U \; \exists \overline{M} \left( \overline{M} = \left\{ \overline{m} : \overline{m} \notin M \vee \overline{m} \in U \to \overline{m} \notin (Q \cap J) \vee \overline{m} \in \left(\overline{Q} \cap \overline{J}\right) \to \overline{m} \in M \right\} \right).$$

Это означает, что если $m \in (Q \cap J)$, то $\overline{a} \in \left(\overline{Q} \cap \overline{J}\right)$, откуда в силу равенства $\overline{Q} \cap \overline{J} = Q \cap J$ получаем, что $m$ и $\overline{m}$ принадлежат одному множеству. Тогда $\overline{M} = M$ — верное равенство.

При наличии дополнительных условий, подтверждающих доминирование множественности над неопределенностью (в этом случае множественность обозначается с индексом «d» — $M_d$) в результате операции отрицания $M_d$ происходит также отрицание доминирования, т. е. $\overline{M_{\mathrm{d}}} = M$ и, следовательно, $\bar{M} = M_{\mathrm{d}}$.

Полученные отрицания значений множества $u \in U$ представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Реализация операции отрицания

| $u$ | **0** | **1** | $A$ | $M$ | $\boldsymbol{M_{\mathrm{d}}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{u}$ | 1 | 0 | $A$ | $M_{\mathrm{d}}$ | $M$ |

*Логическое сложение* (*дизъюнкция*) — логическая операция, по своему примененю максимально приближенная к союзу «или» в смысле «или то, или это, или оба сразу». Для обозначения операции логического сложения в данной работе используется знак «$\vee$», т. е. $\vee \equiv$ «ИЛИ».

Для обозначения логического сложения элементов тетралогики, примем следующие обозначения: если $\varphi_1$ — элемент множества $\Omega_1$, а $\varphi_2$ — элемент множества $\Omega_2$, причем каждое из множеств $\Omega_1$ и $\Omega_2$ является подмножеством универсума $U$, то справедлива следующая запись: $\varphi_1 \in \Omega_1, \varphi_2 \in \Omega_2,\ \Omega_1, \Omega_2 \subset U \ \Rightarrow\ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \in (\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset U$.

При этом для множеств $Q = \{0\}$ и $J = \{1\}$ справедливы следующие равенства: $Q \cup Q = Q = \{0\}$ и $J \cup J = J = \{1\}$, с учетом того, что операция объединения $\Omega_1 \cup \Omega_2$ определена как множество $\Omega = \{\varphi : \varphi \in \Omega_1 \vee \varphi \in \Omega_2\}$.

В двоичной логике высказывание $\varphi_1 \vee \varphi_2$ истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно высказывание $\varphi_1$ или $\varphi_2$ истинно. Так, для множеств $Q$ и $J$ операция дизъюнкции определена следующим образом: $Q \vee Q = Q = \{0\}$, $Q \vee J = J = \{1\}$, $J \vee J = J = \{1\}$.

В тетралогике, как в частном случае многозначной логики, операция дизъюнкции может определяться различными способами. Вполне применима схема $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \max(\varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0, 1, A, M\}$. В иных способах, как правило, стараются сохранить совместимость с булевой алгеброй для значений операндов 0 и 1 [5, с.19-24]. Полученные значения операции дизъюнкции элементов множества $u \in U$ отображены в таблице 2.

*Логическое умножение* (*конъюнкция*) — логическая операция, по своему применению максимально приближенная к союзу «и». Для обозначения операции логического сложения в данной работе используется знак «$\wedge$», т. е. $\wedge \equiv$ «И».

Для обозначения логического умножения элементов тетралогики, примем следующие обозначения: если $\varphi_1$ — элемент множества $\Omega_1$, а $\varphi_2$ — элемент множества $\Omega_2$, причем каждое из множеств $\Omega_1$ и $\Omega_2$ является подмножеством универсума $U$, то справедлива следующая запись: $\varphi_1 \in \Omega_1, \varphi_2 \in \Omega_2,\ \Omega_1, \Omega_2 \subset U \ \Rightarrow\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in (\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset U$.

В тетралогике, в качестве одного из способов определении операции конъюнкции, может использоваться схема $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \min(\varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \{0, 1, A, M\}$, при которой сохраняется совместимость с булевой алгеброй для значений операндов 0 и 1. Поэтому операция конъюнкции двух множеств $A$ и $M$ рассматривается следующим образом: $A \wedge M_{\mathrm{d}} = A$ или $A \wedge M = M$. Полученные значения операции конъюнкции элементов множества $u \in U$ можно представлены в таблице 3.

Как и в классической алгебре логики, дизъюнкция и конъюнкция в тетралогике может быть бинарной (иметь два операнда), тернарной (иметь три операнда) или $n$-арной (иметь $n$ операндов).

Таблица 2 – Реализация операции конъюнкции тетракодов

| $\vee$ | **0** | **1** | ***A*** | ***M*** | $\boldsymbol{M}_{\mathbf{d}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | *A* | *M* | $M_{\mathrm{d}}$ |
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ***A*** | *A* | 1 | *A* | *A* | $M_{\mathrm{d}}$ |
| ***M*** | *M* | 1 | *A* | *M* | $M_{\mathrm{d}}$ |
| $\boldsymbol{M}_{\mathbf{d}}$ | $M_{\mathrm{d}}$ | 1 | $M_{\mathrm{d}}$ | $M_{\mathrm{d}}$ | $M_{\mathrm{d}}$ |

Таблица 3 – Реализация операции дизъюнкции тетракодов

| $\wedge$ | **0** | **1** | ***A*** | ***M*** | $\boldsymbol{M}_{\mathbf{d}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | *A* | *M* | $M_{\mathrm{d}}$ |
| ***A*** | 0 | *A* | *A* | *M* | *A* |
| ***M*** | 0 | *M* | *M* | *M* | **M** |
| $\boldsymbol{M}_{\mathbf{d}}$ | 0 | $M_{\mathrm{d}}$ | *A* | *M* | $\mathbf{M}_{\boldsymbol{d}}$ |

Операция дизъюнкции тетралогики сохранила правила дизъюнкции классической алгебры логики: результат равен 0, если все операнды равны 0; результат равен 1, если хотя бы один из операндов равен 1. В свою очередь, операция конъюнкции тетралогики также сохранила правила конъюнкции классической алгебры логики: результат равен 1, если все операнды равны 1; результат равен 0, если хотя бы один из операндов равен 0.

## Заключение

Полученные операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции тетарлогики сохранили в себе все важнейшие законы алгебры классической логики. Таким образом, для значений $x, y, z \in \{0, 1, A, M\}$ справедливы законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции позволяет опускать скобки в дизъюнкциях и конъюнкциях нескольких переменных, коммутативность — расставлять члены таких дизъюнкций и конъюнкций в любом порядке. Дистрибутивные (распределительные) законы дизъюнкции и конъюнкции позволяют преобразовывать выражения так, чтобы операции в них выполнялись в обратном порядке (например, если в исходном выражении вначале выполнялась дизъюнкция, а потом конъюнкция, то можно получить равносильную формулу, в которой вначале выполняется конъюнкция, а потом дизъюнкция). Законы де Моргана позволяют выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание, а дизъюнкцию — через конъюнкцию и отрицание. Эти же соотношения используются для перенесения отрицаний, применяемых к сложным высказываниям, на составляющие их простые [6, с.35-36].

## Литература


1. Аверкин А. Н., Гаазе-Рапопорт М. Г., Поспелов Д. А. Толковый словарь по искусственному интеллекту / А. Н. Аверкин и др. — М.:Радио и связь, 1992., — 256 с.
2. Аноприенко А. Я. Археомоделирование: Модели и инструменты докомпьютерной эпохи. / А. Я. Аноприенко — Донецк: УНИТЕХ, 2007. — 317 с., ил.
3. Аноприенко А. Я., Кухтин А. А. О некоторых возможностях расширения лоического базиса информатики. / В кн. «Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції “Інформатизація в умовах переходу до ринку”», Київ, 5-6 листопада 1992 р., с. 30-32.
4. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика, изд 3-е, стереотипное / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин — М.: КомКнига, 2006 — 256 с.
5. Владимиров Д. А. Булевы алгебры / Д. А. Владимиров — М.: Наука, 1969 —319 с.
6. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин — М.: Наука, 1972 — 288 с.