

ФОРМИРОВАНИЕ И ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОГО «ХВОСТА» ЗА КАТЯЩИМСЯ КОЛЕСОМ

Федорченко А.А., студент гр. АУП-09а, ФКИТА
Журба В.В., канд. техн. наук, доц., ФИММ
Донецкий национальный технический университет

Пополнен перечень примеров, демонстрирующих ограниченность «антропоморфного» подхода [1, сс.9,276] к оценке «очевидных» – казалось бы – проявлений механики макроскопических тел. Внесено уточнение в представление об определяющих параметрах движения массы, формирующейся за катящимся колесом за счет отделения от его обода налипших частиц (воды, грязи, щебня и др.). Имитационная картина, выполненная средствами анимации Mathcad, демонстрирует некоторые принципиальные отличия от представлений, наблюдаемых «невооруженным глазом» (без приборов).

Введение. Механика – одна из естественных наук, для которой исходную информацию о движении макроскопических тел можно *получить* и теоретические выводы которой (не все, но многие) можно *проверить* с помощью двух органов чувств – зрения и осязания [1, с.402]. Особенно полезна наглядность в изучении механических дисциплин студентами инженерных специальностей. Многие из них предпочитают интуицию теоретическим схемам, стремятся опробовать явление «на глазок» – зрением или «на зуб» – осязанием.

История знает не один случай, когда чрезмерное или неосмотрительное доверие «глазомерным» оценкам приводило к решениям с катастрофическими последствиями. Подвергнуть сомнению неуязвимость известной поговорки, начинающейся словами «лучше один раз увидеть, чем ...», можно на примерах с круглым колесом – простейшим и одновременно великим изобретением людского ума.

а) Широко известен стробоскопический эффект, наблюдаемый в кино и иногда в реальности, когда направление движения автомобиля не согласуется с кажущимся направлением вращения его колёс.

б) Не «испорченный» специальными знаниями пешеход назовет траекторию обода катящегося колеса *окружностью*, сопроводив этот зрительный образ круговым движением пальца руки (между прочим, хороший пример единства двух «антропоморфных регистраторов» механического движения – зрения и осязания!).

в) Большинство опрошенных (среди которых, к сожалению, встречаются дипломированные инженеры) считают, что катушка, изображенная на рис.1, катится *вниз* одновременно с *восходящим* движением конца нити, намотанной на внутренний цилиндр против хода стрелки часов.

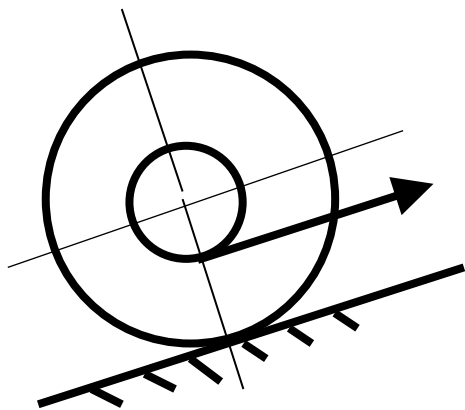


Рис.1.Куда катится катушка?

Похожая зрительная (визуальная) иллюзия возникает при наблюдении за «хвостом», образованным частицами, захваченными с дороги катящимся колесом и

«стреляющим» ими при движения с достаточно большой скоростью.

Поэтому так важна «аналитика», основанная на надежном научном фундаменте, дополняющая и часто заменяющая интуицию в ответственных инженерных проектах.

Цель работы. Путем предварительного теоретического анализа «настроить» зрение на реальное восприятие наблюдаемого в дождливую или слякотную погоду жидкого «хвоста», бегущего вслед за колесом проезжающего мимо автомобиля (еще лучше – велосипеда или трамвая).

Укрепить доверие учащегося к методу математического моделирования реального механического явления, допускающего непосредственную проверку результатов, полученных аналитически, в «натурных условиях». Если удастся – выполнить киносъемку.

Постановка задачи. К точкам обода круглого колеса, катящегося по горизонтальной поверхности, непрерывно прилипают частицы воды, грязи, щебня и т.п. В рассматриваемую схему укладывается, как простой частный случай, захват колесом с дороги одиночного камня.

В положении, определяемом *заданным* углом φ_0 , частицы непрерывно отделяются, образуя каждая плоскую кривую (баллисту). Находящиеся в воздухе частицы формируют жидкий «хвост», напоминающий (только напоминающий!) известную в гидромеханике трубку тока и воспринимаемый *неподвижным* наблюдателем как движущийся *противоположно* движению транспортного средства (центра колеса).

Нужно показать ошибочность этого представления в случае качения колеса *без проскальзывания* (без скольжения). По крайней

мере; описать возможные режимы движения и установить границы между ними.

Допущения (ограничения).

1. Колесо круглое, радиуса R .

2. Угловая скорость колеса – ω , и скорость его центра – V_c , постоянны. Обобщение на случай переменных скоростей не изменяет существа решения. Возникающие некоторые математические сложности легко преодолеваются численным счетом на компьютере.

3. Частицы жидкости непрерывно покидают колесо в точках, определяемых углом φ_0 , который принят постоянным и *заданным*. Физические причины, удерживающие частицу на секторе колеса от точки захвата до точки отрыва, в частности силы, не рассматриваются.

4. Допускается пробуксовка

$$R \cdot \omega \geq V_c, \quad (1)$$

Знаку равенства в формуле (1) соответствует качение без скольжения – идеальный режим движения колеса.

5. Сопротивление внешней среды полету частиц отсутствует. Полученные при таком предположении аналитические решения (формулы) полностью отвечают поставленной цели исследования. Не меняет общей оценки главного вопроса наличие аэродинамического сопротивления – при тех же основных допущениях: реальные баллисты нетрудно получить численным интегрированием на ЭВМ [3] (авторы располагают такими решениями).

Содержательная часть.

Расчетная схема показана на рис.2. В точке M_0 , определяемой заданным углом φ_0 , траектории точки колеса и частицы, отрывающейся от колеса в этом месте, расходятся. Первая (точка M колеса) описывает циклоиду [2, с.225-226] в «неподвижной» системе отсчета (СО-1, оси xOy) и (она же!) – окружность в «подвижной» системе отсчета (СО-2, оси $\xi C\eta$), связанной с «тележкой» – транспортным средством, которому принадлежит колесо. Вторая (красная ч.М) – основной объект исследования в данной работе – описывает параболы в обеих СО.

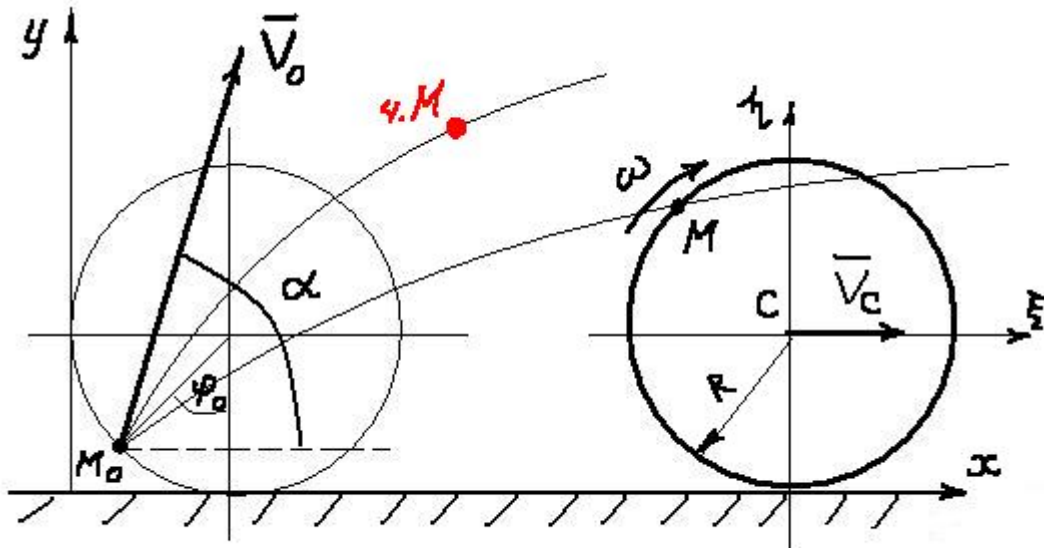


Рис.2. Расчетная схема.

Начальные условия – скорость и угол вылета – в СО-1 имеют значения:

проекции –
$$V_{0x} = -R \cdot \omega \cdot \cos(\phi_0) + V_c, \quad (2)$$

$$V_{0y} = R \cdot \omega \cdot \sin(\phi_0), \quad (3)$$

модуль –
$$V_0 = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}, \quad (4)$$

угол –
$$\sin \alpha = \frac{V_{0y}}{V_0}, \quad \cos \alpha = \frac{V_{0x}}{V_0} \quad (5)$$

Для перехода в СО-2 достаточно убрать второе слагаемое в формуле (2) и заменить в (5) угол α на $(\pi - \alpha)$. Равенство вертикальных составляющих (3) абсолютной (в СО-1) и относительной (в СО-2) начальных скоростей одной и той же материальной частицы не случайно: это гарантия того, что в одном и том же наивысшем положении частица окажется в один и тот же момент «абсолютного» времени.

При чистом качении (отсутствии проскальзывания), то есть при знаке равенства в (1), формулы (2) – (5) упрощаются:

$$V_{0x} = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \cdot V_c, \quad (2')$$

$$V_{0y} = \sin(\phi_0) \cdot V_c, \quad (3')$$

$$V_0 = 2 \cdot \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \cdot V_c, \quad (4')$$

$$\alpha = (\pi - \phi_0)/2 \quad (5')$$

Уравнения движения отдельной i -й частицы в автономном полете при сделанных предположениях имеют вид:

$$x_i(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t, \quad (6)$$

$$y_i(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t - 0.5 \cdot g \cdot t^2, \quad (7)$$

где начальное положение частицы определяется координатами

$$x_0 = R \cdot (1 - \sin(\varphi_0)), \quad y_0 = R \cdot (1 - \cos(\varphi_0)).$$

Из уравнений движения (6) и (7) получены такие следствия (см. Приложение – рабочий лист Mathcad 8):

- время существования отдельной баллисты, ΔT ;
- длина отдельной баллисты, L ;
- ордината наивысшей точки, H_{\max} и время ее достижения, T^* .
- условный диаметр семейства баллист, D^* .

Наконец, придав уравнениям (6) и (7) вид (фрагмент из рабочего листа Mathcad)

$$x_{\text{par}}(t, k) := \text{bandpass}(t, L, k \cdot \Delta T) \cdot [R + V_c \cdot k \cdot \Delta T - R \cdot \sin(\varphi_0) + V_{0x} \cdot (t - k \cdot \Delta T)]$$

$$y_{\text{par}}(t, k) := \text{bandpass}(t, T(\varphi_0, V_c, R), k \cdot \Delta T) \cdot [R \cdot (1 - \cos(\varphi_0)) + V_{0y} \cdot (t - k \cdot \Delta T) - 0.5 \cdot g \cdot (t - k \cdot \Delta T)^2]$$

где параметр k определяет порядковый номер отдельной баллисты в «хвосте», образовавшемся и просуществовавшем в течение одного оборота колеса, а функция-фильтр «bandpass» вырезает реальную часть баллисты для рисунка; остальные параметры описаны ранее.

На рис.3 – одном из многих, полученных в данной работе, зафиксировано в некоторое мгновение взаимное положение частицы (красная точка), траектории точки колеса, ее «породившей» (зеленая

линия), и вертикальная линия (черная), условно представляющая транспортное средство.

Выводы (Заключение).

1. При качении колеса без проскальзывания частицы «хвоста» движутся по отношению к неподвижному наблюдателю в одном направлении с центром колеса. Наблюдение «невооружённым глазом» нередко приводит к противоположному субъективному суждению.



Рис.3. Фрагмент анимационной имитации движения.

2. При наличии проскальзывания движение тех же точек в противоположном направлении возможно при условии

$$R \cdot \omega \cdot \cos(\varphi_0) \geq Vc,$$

причем в случае равенства «абсолютная» траектория частицы – вертикальная прямая.

3. Траектории частиц «хвоста» – идентичны; их количественные характеристики (высота подъёма, дальность полета и другие) определяются двумя начальными параметрами – φ_0 и V_0 . «Скорость бросания» V_0 , в свою очередь, связана с R , Vc , ω кинематическими зависимостями (2)–(5) и (2')–(5') . От тех же величин зависит φ_0 , только динамически, с дополнительными физическими условиями.

4. Утверждения п.п. 1 и 2, касающиеся сопоставления субъективных впечатлений неподвижного наблюдателя и результатов математического моделирования убедительно проиллюстрированы анимационными средствами Mathcad.

Приложение. Рабочий лист Mathcad с вычислениями и демонстрацией утверждений, изложенных в статье, в режиме анимации.

Список источников.

1. Харламов П.В. Очерки об основаниях механики (мифы, заблуждения и ошибки). – К.: Наукова думка. 1995.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, тт. I, II. – М.: Гостехиздат. 1957.
3. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. Mathcad 8 PRO в математика, физике и Internet. – М.: «Нолидж», 2000., - 512с., ил.