

Улитин Г. М.

Царенко С. Н.

ГВУЗ «Донецкий  
национальный  
технический  
университет»

УДК 624.0

**ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАШЕННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ  
ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ И  
ПРОДОЛЬНЫХ НАГРУЗОК**

*В статті досліджено задачу коливань металевих конструкцій баштового типу на основі математичної моделі пружного вагомого стержня змінної поперечної жорсткості. З використанням методу Бубнова-Галеркіна надана оцінка впливу поздовжніх навантажень на величину власних частот. Проаналізовано вплив величини ухилу башти на значення частоти головного тону коливань.*

*In article the problem of fluctuation of metal construction of tower type on the basis of mathematical model of an elastic bars with weight of variable cross-section. With use of a method of Bubnov-Galerkin the estimation of influence of longitudinal loadings on size of own frequencies is given. It is analysed influences of size of a bias of a tower on value of frequency of the main tone of fluctuations.*

Высотные сооружения башенного и мачтового типа в процессе работы подвергаются воздействию переменных нагрузок: это нагрузки, вызванные работой оборудования (копры, буровые вышки, ветрогенераторы), ветровая нагрузка, сейсмические возмущения, а также нагрузки, возникающие во время монтажных работ и при аварийных ситуациях. Так на практике причинами разрушения существующих мачт высотой от 25 до 300 м зачастую становятся динамические воздействия [1,2,3]. В настоящий момент при расчетах, динамическое воздействие учитывается только косвенно, путем замены эквивалентной статической нагрузкой [4,5]. Однако важно правильно оценивать действительные усилия, возникающие при работе конструкции.

Рассматриваемые сооружения в большинстве случаев проектируют решетчатыми, в виде пространственных ферм трех- или четырехгранного, реже многогранного очертания. В настоящее время для расчетов таких конструкций используют программные комплексы, реализующие различные численные методы математического моделирования [2], однако такой подход является весьма трудоемким особенно на стадии проектирования. В работе [6] проведены исследования частотных

характеристик решетчатой конструкции, на основании чего сделаны выводы о малом влиянии сдвиговой деформации от поперечных сил на величину главного тона колебаний. Таким образом, замена сквозной стержневой системы эквивалентным стержнем является вполне оправданным и в значительной степени позволяет упростить расчетную модель. Учитывая, что в мачтах, в большинстве случаев, расстояние между поясами неизменно и такие конструкции могут быть заменены в расчетных схемах стержнями постоянной изгибной жесткости, для которых аналитические решения разработаны и хорошо известны [7], то в случае башенных сооружений, для которых изгибная жесткость является величиной переменной, дело обстоит иначе. Так в работах [5, 8] рассмотрены некоторые частные задачи колебания стержней переменного сечения на основе приближенных методов.

Таким образом, разработка аналитических решений для исследования колебаний стержней переменной жесткости является актуальной задачей, решение которой позволит повысить эффективность конструктивных решений, предотвратить возможные аварии, продлить срок эксплуатации сооружений.

Для исследования поперечных колебаний сквозных башенных конструкций рассмотрим математическую модель упругого весомого стержня переменной поперечной жесткости длиной  $l$ . На верхнем конце стержня приложена вертикальная сила  $N$  (вес оборудования) (рис. 1), вдоль продольной оси действует распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , учитывающая вес конструкции. Здесь  $h_1, h_2$  – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений соответственно,  $r = kx + h_1$  – радиус инерции произвольного сечения,  $k = \frac{h_2 - h_1}{l}$ ,  $l_1$  – высота конуса.

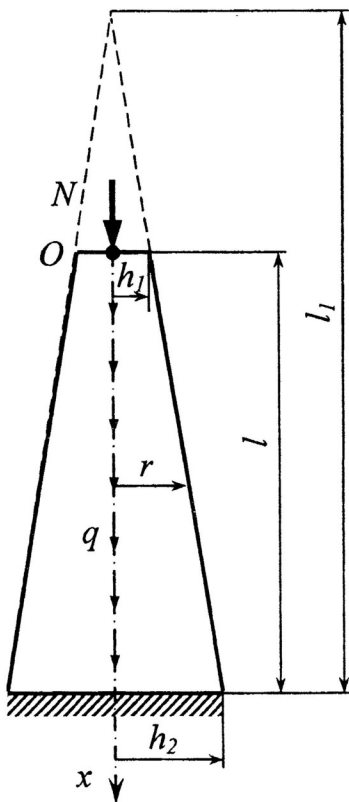


Рис. 1. Расчетная схема весомого стержня переменного сечения

Из условий равновесия элемента такого стержня следует система уравнений

$$\begin{aligned} EF(kx + h_1)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= M(x); \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= Q(x) - (N + qx) \frac{\partial y}{\partial x}; \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $y(x, t)$  – уравнение изогнутой оси стержня,  $EF$  – продольная жесткость (для упомянутых конструкций является величиной постоянной или ступенчато-переменной),  $M(x)$  – изгибающий момент,  $Q(x)$  – поперечная сила.

Исключая из уравнений (1-3)  $M(x)$  и  $Q(x)$ , приходим к уравнению поперечных колебаний

$$\begin{aligned} EF \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( (kx + h_1)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \\ + (N + qx) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + q \frac{\partial y}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если ввести замену  $z = kx + h_1$  и воспользоваться методом разделения переменных, то с учетом, что  $y(z, t) = Z(z)T(t)$ , приходим к двум уравнениям

$$(z^2 Z''')'' + (\tilde{N} + \tilde{q}h_1 + \tilde{q}z)Z'' + \tilde{q}Z' - \lambda^4 Z = 0; \quad (3)$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (4)$$

где  $\tilde{N} = \frac{N}{k^2 EF}$ ,  $\tilde{q} = \frac{q}{k^3 EF}$ ,  $\omega^2 = \frac{\lambda^4 EFk^4}{m}$  –

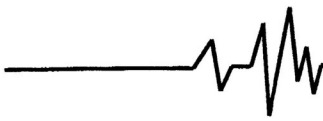
частоты собственных колебаний, а  $\lambda^4$  – константа разделения, штрих означает дифференцирование по  $z$ .

Уравнение (4) представляет уравнение гармонических колебаний. Не существует аналитических решений уравнения (3), поэтому воспользуемся методом Бубнова – Галеркина, аппроксимируя форму изгиба многочленами вида

$$\begin{aligned} \varphi_k(z) = \frac{(h_2 - z)^{k+3}}{(h_2 - h_1)^4} + a_k \frac{(h_2 - z)^{k+2}}{(h_2 - h_1)^3} + \\ + b_k \frac{(h_2 - z)^{k+1}}{(h_2 - h_1)^2} + (z - h_1)^{k-1} \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} - 1 \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции вида (5) удовлетворяют условию жесткого закрепления  $\varphi_k(h_2) = 0$ ;  $\varphi'_k(h_2) = 0$ , а коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  находятся из условий удовлетворяющих граничным условиям свободного конца стержня

$$\varphi_k''(h_1) = 0; \quad \varphi_k'''(h_1) = 0. \quad (6)$$



Тогда форма изгиба примет вид

$$Z(z) = \sum_{k=1}^r A_k \varphi_k(z). \quad (7)$$

Из условий (6) найдем значения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  для первых трех членов ряда (7):  $a_1 = -4$ ,  $b_1 = 5$ ;  $a_2 = -3,1(6)$ ,  $b_2 = 3, (6)$ ;  $a_3 = -3,4$ ,  $b_3 = 3$ .

Подставив выражение (7) в уравнение (3) и требуя его ортогональности на отрезке  $[h_1; h_2]$  по системе функций  $\{\varphi_k(z)\}$ , получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_k$ . Приравнявая к нулю определитель этой системы, получаем, для определения собственных чисел  $\lambda_n$  граничной задачи, уравнение вида

$$\det \|\alpha_{in} - \lambda^4 \beta_{in}\| = 0, \quad (i, n = 1, 2, \dots, r) \quad (8)$$

где коэффициенты в уравнении (8) выражаются интегралами от произведения функций  $\varphi_k(z)$ .

Влияние продольных нагрузок проанализируем на примере буровой башенной вышки ВБ-53-320 (рис. 2). Вышка представляет пространственную ферменную стержневую конструкцию в виде квадратной усеченной пирамиды и имеет следующие характеристики: высота вышки  $l=53,3$  м, ширина нижнего основания  $b=10$  м, верхнего  $b_1=2$  м ( $h_1=1$  м,  $h_2=5$  м,  $k=0,075$ ), масса вышки  $M=40$  т, принимаем погонный вес вышки практически постоянным и равным  $q=Mg/l=7,5$  кН/м ( $m=750$  кг/м), площадь поперечного сечения грузонесущих стоек  $F=351,4$  см<sup>2</sup>, грузоподъемность вышки 320 т ( $N=3,2$  МН). Вычислим основную собственную

частоту колебаний  $\omega_1 = \lambda_1^2 k^2 \sqrt{\frac{EF}{m}}$ , при

$r=1,2,3$  получаем соответственно значения  $\omega_1^{(r)}$ :

$$\omega_1^{(1)} = 16,617 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_1^{(2)} = 15,48 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_1^{(3)} = 15,341 \text{ с}^{-1},$$

откуда видим, что увеличение числа членов ряда (7) не целесообразно, так как даст уточнение менее 1%.

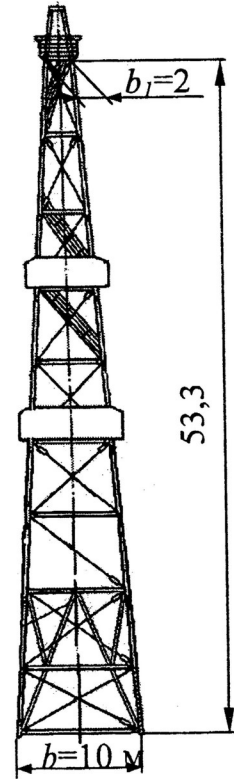


Рис. 2. Расчетная схема вышки

Вычисления показали, что различия при изменении  $N$  и  $q$ , в пределах допускаемых значений для данной конструкции, составляют не более 1%, так например, если принять  $N=0$  и  $q=0$ , то  $\omega_1 = 15,274 \text{ с}^{-1}$ .

Рассмотрим частный случай ( $q=0$ ,  $N=0$ ) тогда уравнение (3) принимает вид

$$z^2 Z^{IV} + 4z Z''' + 2Z'' - \lambda^4 Z = 0 \quad (9)$$

Выражение (9) имеет аналитическое решение в функциях Бесселя [9]

$$Z(z) = C_1 J_0(2\lambda\sqrt{z}) + C_2 Y_0(2\lambda\sqrt{z}) + C_3 I_0(2\lambda\sqrt{z}) + C_4 K_0(2\lambda\sqrt{z}) \quad (10)$$

Из формулы (10), используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя [10], можно определить производные  $Z'(z)$ ,  $Z''(z)$  и  $Z'''(z)$ :

$$Z'_z(z) = -C_1 \frac{\lambda}{\sqrt{z}} J_1 - C_2 \frac{\lambda}{\sqrt{z}} Y_1 +$$

$$+ C_3 \frac{\lambda}{\sqrt{z}} I_1 - C_4 \frac{\lambda}{\sqrt{z}} K_1$$

$$Z''_{zz}(z) = C_1 \left( \frac{\lambda}{z^{3/2}} J_1 - \frac{\lambda^2}{z} J_0 \right) +$$

$$+ C_2 \left( \frac{\lambda}{z^{3/2}} Y_1 - \frac{\lambda^2}{z} Y_0 \right) -$$

$$- C_3 \left( \frac{\lambda}{z^{3/2}} I_1 - \frac{\lambda^2}{z} I_0 \right) +$$

$$+ C_4 \left( \frac{\lambda}{z^{3/2}} K_1 + \frac{\lambda^2}{z} K_0 \right) \quad (11)$$

$$Z'''_{zzz}(z) = C_1 \left( \left( \frac{\lambda^3}{z^{3/2}} - 2 \frac{\lambda}{z^{5/2}} \right) J_1 + 2 \frac{\lambda^2}{z^2} J_0 \right) +$$

$$+ C_2 \left( \left( \frac{\lambda^3}{z^{3/2}} - 2 \frac{\lambda}{z^{5/2}} \right) Y_1 + 2 \frac{\lambda^2}{z^2} Y_0 \right) +$$

$$+ C_3 \left( \left( \frac{\lambda^3}{z^{3/2}} + 2 \frac{\lambda}{z^{5/2}} \right) I_1 - 2 \frac{\lambda^2}{z^2} I_0 \right) -$$

$$- C_4 \left( \left( \frac{\lambda^3}{z^{3/2}} + 2 \frac{\lambda}{z^{5/2}} \right) K_1 + 2 \frac{\lambda^2}{z^2} K_0 \right)$$

Из выражений (10) и (11), учитывая зависимости (1), следуют граничные условия с учетом замены  $z = kx + h_1$  для консольного стержня

$$\begin{cases} Z_{x=l} (2\lambda\sqrt{h_2}) = 0 \\ Z'_{x=l} = kZ'_z (2\lambda\sqrt{h_2}) = 0 \\ M_{x=0} = EFk^2 h_1^2 Z''_{zz} (2\lambda\sqrt{h_1}) = 0, \\ Q_{x=0} = EFk^3 h_1^2 Z'''_{zzz} (2\lambda\sqrt{h_1}) + \\ + 2EFk^3 h_1 Z''_{zz} (2\lambda\sqrt{h_1}) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Система (12) представляет собой линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Приравняв ее определитель к нулю, получаем уравнение для нахождения собственных чисел  $\lambda_n$ , которые вычислялись

численным методом, а соответствующие им частоты определяются по формуле

$$\omega_n = \lambda_n^2 k^2 \sqrt{\frac{EF}{m}} \quad (13)$$

Так, например, для конструкции башенной вышки ВБ-53-320 (рис. 2), описание которой приведено выше, первые три собственных частоты будут:

$$\omega_1 = 15,272 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 72,94 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_3 = 185,637 \text{ с}^{-1}.$$

Проанализируем влияние величины уклона  $k$  на значение первой собственной частоты  $\omega_1$ , для исключения влияния прочих геометрических параметров представим выражение (13) в виде

$$\omega_n = \frac{\bar{\lambda}_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{m}} \quad (14)$$

где  $\bar{\lambda}_n = \lambda_n \sqrt{h_2} \frac{l}{l_1}$  – безразмерная величина, зависит только от условий закрепления стержня (при  $k = 0$  для консольного стержня  $\bar{\lambda}_1 = 1,875$ ),  $J_0 = h_2^2 F$  – момент инерции в основании.

На рис. 3 представлен график изменения  $\bar{\lambda}_1$  в зависимости от уклона  $k$ , который меняется в пределах от 0 (соответствует стержню постоянной жесткости) до 0,09 (соответствует конусному стержню для рассматриваемой конструкции). Как видно из графика, полученную кривую можно с достаточной точностью (в пределах 5%) аппроксимировать прямой, вида

$$\bar{\lambda}_1(k) = 1,889 - 2,761k \quad (15)$$

Таким образом, для консольного стержня все значения  $\bar{\lambda}_1$  будут находиться в пределах от 1,598 до 1,875, промежуточные значения можно находить путем линейной аппроксимации, при этом вид уравнения (15) и точность получаемых результатов будет зависеть от предела изменения  $k$  (чем выше значение  $k_{\max}$  тем точнее результат).

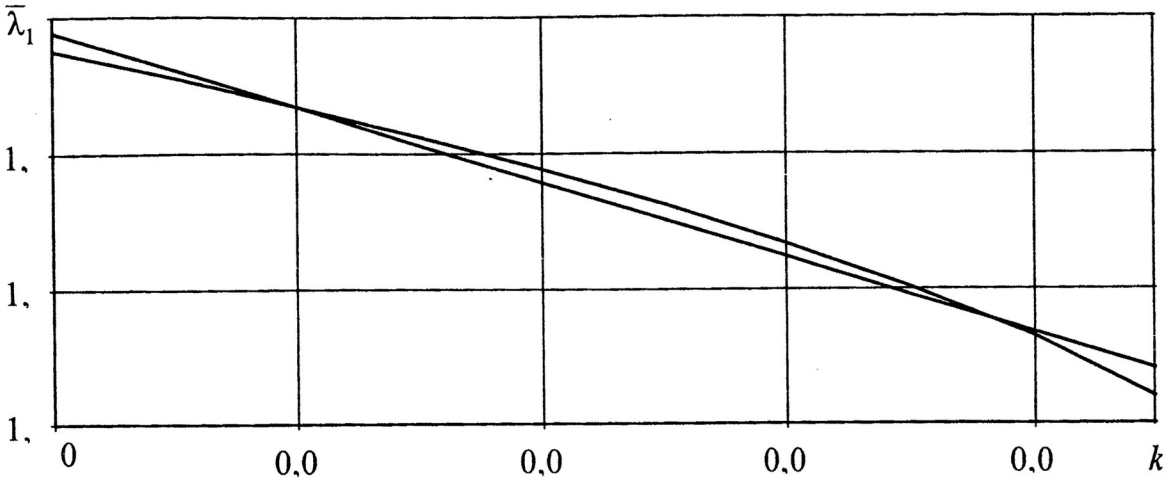
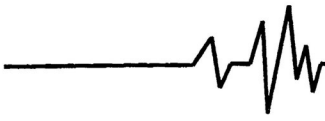


Рис. 3. График изменения параметра  $\bar{\lambda}_1$  в зависимости от уклона  $k$

### Выводы

1. Исследование колебаний металлических конструкций башенного типа на основе математической модели упругого весомого стержня переменной изгибной жесткости при наличии сосредоточенной продольной нагрузки с использованием метода Бубнова-Галеркина показали, что изменении нагрузок  $N$  и  $q$  (рис. 1), в пределах допускаемых значений, оказывает весьма малое влияние на значение собственных частот (в пределах 1%). Что в свою очередь позволило в значительной степени упростить расчетную зависимость (3) и привести ее к виду (9), для которой известно аналитическое решение.

2. На основе анализа влияния величины уклона  $k$  на значение частоты главного тона колебаний получена линейная зависимость для определения значений собственного числа  $\bar{\lambda}_1$

в пределах изменения  $k$  от 0 до  $k_{\max} = \frac{h_2}{l}$ .

Использование найденной зависимости позволяет определять значения первой собственной частоты колебаний для различных конструктивных исполнений башни в виде усеченного конуса.

### Литература

1. Соколов А.Г. Анализ причин аварий АМС и организация обследования конструкций

// Эксплуатация и контроль антенно-мачтовых и башенных сооружений (Сборник докладов) - Рига: Всесоюзное совещание по эксплуатации антенно-мачтовых и башенных сооружений, 1983 - с. 17-27.

2. Editor Madugula. Dynamic response of lattice towers and guyed masts (Committee rapport). - M.K.S. Reston (US): ASCE, 2002 - 266 p.

3. СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия».

4. Smith B.W. Communication structures. - Thomas Telford, 2007 - 352 p.

5. ДБН В.1.2-2:2006 «Нагрузки и воздействия». Нормы проектирования.

6. Филиппов А.П. Колебания механических систем / Филиппов А.П. - К.: «Наукова думка», 1965. - 716 с.

7. Шевченко Ф.Л. Будівельна механіка. Спеціальний курс. Динаміка пружних стержневих систем. - Донецьк: РІА ДонНТУ, 2000. - 293 с.

8. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений / Киселев В.А. - М.: Стройиздат, 1964. - 332 с.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. - М.: Наука, 1976. - 576 с.

10. Ватсон Г.И. Теория бесселевых функций / Ватсон Г.И. - М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. - 798 с.