УДК 662.61: 662.987

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА СИТЕМЫ КОНТРОЛЯ СОСТОЯНИЯ ФУТЕРОВКИ ГОРНА И ЛЕЩАДИ

А.Д.Маркин, Р.С.Думбур
ДНТУ, Черметавтоматика

В работе рассмотрены особенности анализа многомерных обратных задач теплопроводности в условиях эксплуатации доменных печей.

Большое количество аварий на доменных печах (ДП), до 5÷7 в год, связано с быстрым интенсивным разрушением футеровки горна (углеродистых блоков) и лещади (высокоглиноземистых блоков). Убытки народному хозяйству от одной аварии на ДП полезным объемом 1700 м3 составляют сотни тысяч гривен.

Принимаемые оперативные технологические мероприятия по предотвращению аварии, как правило, запоздалые и проводятся интуитивно.

На сегодняшний день в отрасли нет общепринятых методов непосредственного контроля состояния футеровки, а также моделей прогноза и расчета движения износа. Известные модели построены на большом количестве допускаемых констант и решают одномерную задачу переноса тепла в одном направлении (по длине блока). Расчеты построены на показаниях термоэлектрических преобразователей, установленных у холодильников кожуха доменной печи.

Приведенные ниже теоретические рассуждения и предлагаемая математическая модель построены на показаниях термоэлектрических преобразователей, расположенных в нескольких точках по длине углеродистых блоков (многомерная задача).

Проанализируем общепринятую постановку двумерной обратной задачи (для упрощения анализа ограничимся прямоугольными областями определения искомых функций – рис.1) [2].

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right),\ \tau \geq 0,\ x_0 \leq x \leq x_1,\ y_0 \leq y \leq y_1\ ;$$

известна – t/Γ_1, определить t/Γ_2 или $\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{\Gamma_2}$ и $\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{\Gamma_2}$.

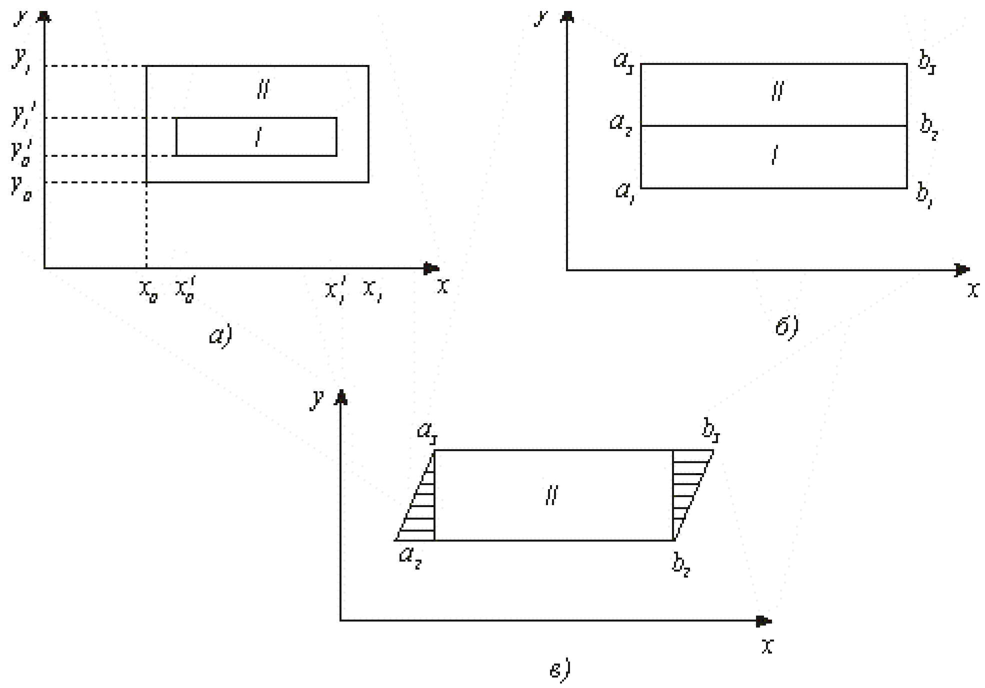


Рисунок 1.

Для такой постановки или аналогичной для произвольных областей с границами Γ_1 и Γ_2 в трехмерном случае подход к получению решения различными методами – аналитическими или численными показан в работе [1]. На первый взгляд простейший метод экстраполяции решения из области, ограниченной контуром Γ_1, во внешнюю не вызывает никаких принципиальных возражений. Если есть решение двумерного уравнения теплопроводности, то пять неизвестных параметров интегрирования можно определить с помощью 4-х граничных и одного начального условий. Дальнейший расчет поля температур в области, ограниченной контуром Γ_2, с использованием полученного решения технически не встречает трудностей. Однако, такой подход в принципе ошибочен (хотя возможно в каких-то частных случаях и дает правдоподобные результаты). Обосновать этот вывод можно различными способами. Остановимся на одном, который представляется наиболее наглядным.

Пусть внутренняя область с границей Γ_1, оставаясь внутри области с границей Γ_2, увеличится таким образом, что три стороны внутренней области стали близки к соответствующим сторонам внешней (рис.1*а*). В этом случае граничные условия на этих сторонах можно считать тождественными. Формулировка обратной задачи остается прежней. Только в качестве неопределенной выступает граница ($Г_2$ – $Г_1$). Рассмотрим для области I следующую прямую задачу с граничными условиями (начальные условия - нулевые):

$$Г_{a_1-a_2} : q = 0; \quad Г_{a_2-b_2} : q = 0; \quad Г_{b_2-b_1} : q = 0; \quad Г_{a_1-b_1} : q = 0 = q^* = const;$$

Очевидная особенность ожидаемого решения – одномерность в направлении оси y (изотермы параллельны оси x). Полученную из решения температурную зависимость от времени на границе a_2 - b_2 используем для переопределения этой границы и формулировки обратной задачи в области II

$Г_{a_2-b_2}$: известны: $t / a_2 - b_2$ и $q = 0$;

определить: поле температур в области II или

$$t / Г_2 - Г_1 \text{ или } \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{Г_2-Г_1} \text{ и } \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{Г_2-Г_1}.$$

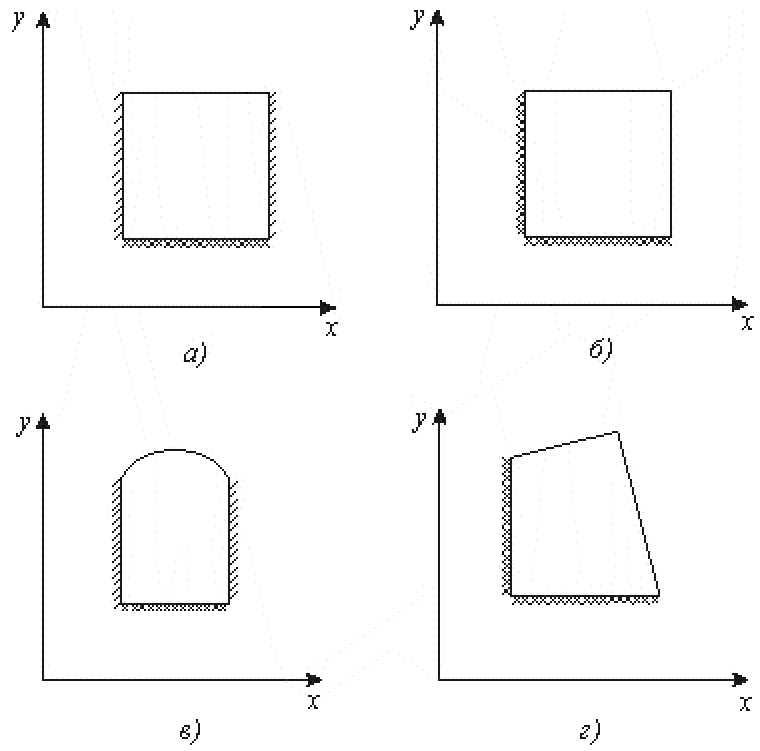
Совершенно очевидно, что в общем случае эта задача не имеет решения, т.к. не определена. Действительно, для произвольных дополнительных условий на границах a_2 - a_3 и b_2 – b_3 можно решить поставленную задачу, каждый раз удовлетворяя условиям на границе a_2 – b_2 (например, рис.1*в*). В этом случае в области II поле температур будет определяться двумя координатами и, естественно, никакой экстраполяцией одномерного поля области I не может быть получено.

Показать недостаточную информативность указанной постановки обратной задачи можно и следующим образом. Пусть область I не увеличивается как в предыдущем случае, а уменьшается. В пределе области II будут определены в точке температура и градиент температуры. Идентифицировать по этой информации поле температур во всей области II, очевидно, не представляется возможным. Таким образом, на основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что постановки обратных задач типа рассмотренных допускают только частичную идентификацию поля температур во внешней области (как следствие и частичную идентификацию граничных условий).

Сформулируем правило, позволяющее на стадии постановки задачи определить возможность полной идентификации температурного поля из решения граничной обратной задачи теплопроводности:

Необходимым условием полной идентификации поля температур в граничной обратной задаче в выпуклых областях определения является равенство сумм проекций неопределенных и переопределенных границ на все координатные плоскости.

Поясним это правило на некоторых примерах. На рис.2 *а, б* показаны двумерные области определения, в которых возможна полная идентификация поля температур по информации на переопределенных границах. Легко убедиться, что правило выполняется, то есть суммы проекций неопределенных и переопределенных границ на все оси координат равны.



(/// - определено одно условие, × - определены два условия)

Рисунок 2. – Двумерные области определения для полной и неполной идентификации поля температур

Все приведенные выше рассуждения справедливы и для трехмерного случая. Только при анализе трехмерных задач под границами области определения понимаются поверхности.

На рис. 2 *в, г* показаны двумерные области, у которых сформулированное правило не выполняется. Соответственно для этих областей определения возможна только частичная идентификация температурного поля (например, по явной схеме экстраполяции многомерных полей температур). Следует отметить, что во многих практических случаях оказывается полезной даже частичная идентификация поля температур при решении обратной задачи. Например, при исследовании локальных характеристик теплообмена, температурных полей в некоторых характерных зонах и др. Остановимся более подробно на многомерных граничных обратных задачах (ОЗТ), допускающих полную идентификацию полей температур в анализируемых областях определения искомых функций.

При моделировании различных теплотехнологических процессов (в частности, в черной металлургии: затвердевание слитка в изложнице, нагрев и регламентированное охлаждение слябов, разрушение кладки сталеплавильных агрегатов и доменных печей и т.д.) появляется необходимость решения ОЗТ в многомерной постановке с учетом ее нелинейного характера. Следует подчеркнуть, что вопрос о свойствах и реализации решений многомерных ОЗТ пока является открытым и требует изучения как в чисто математическом аспекте, так и с точки зрения создания расчетных алгоритмов для практического использования.

Анализ метода возмущений показал возможность его применения к решению многомерных нелинейных обратных задач и получению достаточно простых алгоритмов применительно к ЭВМ.

Метод возмущений относится к асимптотическим методам. Широкое применение метод возмущений (метод малого параметра) нашел в небесной механике при анализе задачи «многих тел». Возможность применения асимптотических методов к различным задачам нелинейного теплопереноса анализируется во многих работах. В них убедительно показано, что идея разложения искомого решения и краевых условий в формальный ряд по степени некоторого малого параметра в большинстве случаев приводит к достаточно надежным решениям. Однако не известна ни одна попытка применения малого параметра к решению обратной граничной задачи теплопроводности (по крайней мере, в литературе). Учитывая достоинства метода возмущений и особенно возможность эффективной алгоритмизации решения применительно к ЭВМ, в настоящей работе рассмотрена возможность его применения к решению нелинейных многомерных обратных задач нестационарной теплопроводности. Рассмотри особенности регуляризации математической постановки многомерной ОЗТ методом возмущений. Пусть задано сплошное тело в трехмерном пространстве с определенными теплофизическими характеристиками и распределением внутри объемными источниками тепла, находящееся в тепловом взаимодействии с окружающей средой. Рассматриваемое тело определено в области трехмерного пространства $Д$ и ограничено теплообменной поверхностью *Г*. Уравнение, определяющее перенос энергии в этом случае, имеет вид [2]:

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right) + q(x, y, z, \tau) \qquad (1)$$

При определенном распределении температур в начальный момент времени

$$t(\eta,0) = \psi_1(\eta), \qquad \eta \in Д \qquad (2)$$

можно сформулировать как прямую, так и обратную задачу:

- если известно граничное условие I-го или II-го рода на границе *Г*

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\Big|_Г = \psi_2(\omega,\tau) \text{ или } t_Г = \varphi_2(\omega,\tau) \qquad (3)$$

$$\omega \in Г, \tau \geq 0$$

то прямая задача сводится к нахождению функции $t(\eta,\tau)$ в области *Д*, удовлетворяющей уравнению теплопроводности (1), начальному (2) и граничному (3) условиям. Следствием определения поля температур можно считать нахождение поля градиентов температур $\frac{\partial t}{\partial n}(\eta,\tau)$ в области *Д* и, в частности, на границе области $\frac{\partial t}{\partial n}\Big|_Г(\omega,\tau)$; $(\omega \in Г)$. Допустим, часть границы *Г* не определена условиями теплообмена $Г_Н$, а вторая часть – переопределена $Г_П$, т.е. на ней определены граничные условия как I-го, так и II-го родов. Границы области $Д\text{-}Г_Н$ и $Г_П$ пусть удовлетворяют правилу, определяющему возможность полной идентификации поля температур в *Д*. В этом случае обратная задача сводится к нахождению температуры или градиента температуры в исследуемой области в начальный момент времени и условиям теплообмена на переопределенной границе.

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\Big|_{Г_П} = \psi_2(\omega,\tau), \quad \omega \in Г_П \in Г; \quad t/Г_П = \varphi_2(\omega,\tau), \quad \tau \geq 0 \qquad (5)$$

Математическая формулировка ОЗТ таким образом включает уравнения (1), (2) и (4) и сводится к идентификации

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n}\Big|_{Г_Н}(\omega,\tau) \quad \text{или} \quad t/Г_Н(\omega,\tau) \qquad (5)$$

Как уже отмечалось выше, эта задача эквивалентна задаче полной идентификации температур в области *Д*.

$$t(\eta,\upsilon) \quad \text{при} \quad \eta \in Д\,,\ \tau \geq 0 \tag{6}$$

Формулировки прямой и обратной задач теплопроводности для самых различных случаев достаточно подробно описаны в литературе. В связи с этим их краткое описание применительно к многомерным задачам, приведенным выше, следует считать скорее введением соответствующих обозначений и понятий.

Прейдем непосредственно к регуляризации математической постановки многомерной нелинейной ОЗТ методом возмущений.

Проинтегрируем трижды по направлению координатных осей *x, y* и *z* уравнение теплопроводности. Интегрирование выполним в пределах неопределенной и переопределенной границ. Получим

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{Г_П} - \lambda\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{Г_Н} = \int_{Г_Н}^{Г_П}\left[\rho c_p\frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right) - q_v\right]dx\,, \tag{7}$$

по *y* и *z* – аналогично (в дальнейшем также рассматриваем только уравнения относительно *x*). Преобразуем систему трех уравнений с учетом соотношений (4) и введем перед интегральным слагаемым параметр ε $(a\leq\varepsilon\leq 1)$

$$-\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{Г_Н} = \psi_2(\omega,\tau) - \int_{Г_Н}^{Г_П} q_v dx + \varepsilon\int_{Г_Н}^{Г_П}\left[\rho c_p\frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right]\right]dx \tag{8}$$

Формально определив границу $Г_Н$, получили структуру прямой задачи для области *Д*. Ее математическая формулировка включает уравнения (1), (2), (4) и (8). Естественно, решение задачи в такой форме не представляется возможным из-за полной неопределенности подынтегральных выражений. Поэтому представим искомое решение $t(x, y, z, \tau)$ в виде разложения по степеням параметра ε.

$$t[x,y,z,\tau] = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m t_m(x,y,z,\tau) \tag{9}$$

Опираясь на теорему об аналитической зависимости решения от параметра ε, можно сделать вывод о том, что решения системы уравнений (1), (2), (4) и (8) будут аналитическими функциями параметр ε, если интегралы системы (8) непрерывны по своим аргументам и аналитически зависят от функции t (и ее производных) в ее области определения и от ε.

Можно с достаточным основанием положить, что все эти условия выполняются, поскольку анализируется свойство функционала, имеющего вид определенного интеграла и зависящего от непрерывного, дважды дифференцируемого по пространству и один раз по времени (как минимум) поля температур. Поэтому представим искомое решение $t(x, y, z, \tau)$ в виде разложения по степеням параметра ε:

$$t(\varepsilon)\,\big|_{\varepsilon=1} = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(x,y,z,\tau), \qquad (10)$$

а окончательное решение исходной задачи, очевидно, получим при $\varepsilon = 1$.

$$t(\varepsilon)\,\big|_{\varepsilon=1} = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(x,y,z,\tau) \qquad (11)$$

(При $\varepsilon = 1$ система уравнений (8) принимает первоначальный вид).

Подставим в уравнения (1), (2), (4) ряд (10), продифференцируем его необходимое количество раз и приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε. В результате получим систему дифференциальных уравнений, последовательное решение которых дает возможность определить функции t_m, начиная с t_0. Приравнивая слагаемые, имеющие ε с одинаковыми степенями, получим систему уравнений для определения $t_0, t_1, t_2 \ldots t_m$:

$$\begin{aligned}
&\rho c \frac{\partial t_0}{\partial \tau} = div(\lambda grad t_0) + q_v\ ;\\
&t_0(\eta,0) = \psi_1(\eta), \qquad \eta \in Д;\\
&t_0(\omega,\tau) = \varphi_2(\omega,\tau), \qquad \omega \in Г_П;\\
&-\lambda \frac{\partial t_0}{\partial x}\,\Big|_{Г_Н} = \psi_2(\omega,\tau) - \int_{Г_Н}^{Г_П} q_v dx\,;\\
&-\lambda \frac{\partial t_0}{\partial y}\,\Big|_{Г_Н} = \psi_2(\omega,\tau) - \int_{Г_Н}^{Г_П} q_v dy\,;\\
&-\lambda \frac{\partial t_0}{\partial z}\,\Big|_{Г_Н} = \psi_2(\omega,\tau) - \int_{Г_Н}^{Г_П} q_v dz\,;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (13)$$

Последовательное решение системы уравнений (13) для $m = 0, 1, 2\ldots$ дает возможность найти систему функций $t_0, t_1, t_2 \ldots t_m$, определяющих в соответствии с (11) при $\varepsilon = 1$ приближенное решение задачи в постановке (1 - 8). Нахождение указанной системы функций не встречает принципиальных трудностей, поскольку для определения любой функции t_m необходимо решить обычную прямую задачу для рекуррентной системы дифференциальных уравнений.

В общем виде дать ответ о сходимости ряда крайне сложно, а иногда и невозможно, поскольку это связано с нахождением общего члена ряда, определяемого решением системы уравнений для некоторого m . Как показывает анализ практического применения метода возмущений, в инженерных расчетах достаточно ограничиться доказательством так называемой практической сходимости, если это возможно. Если же ряд (11) расходится, то и в этом случае можно получить полезную информацию, ограничивая ряд несколькими слагаемыми и оценивая погрешность отброшенных членов.

Выводы

Можно отметить удобство предлагаемого подхода к анализу ОЗТ любой пространственной мерности, поскольку для последовательного вычисления системы функций t_m достаточно иметь один алгоритм или программу для ЭВМ решения прямой задачи и несколько раз их использовать с соответствующей корректировкой условий однозначности. Такие программы для ЭВМ, в которых поиск решения задачи сводится к многократному обращению к одному и тому же блоку (алгоритму), является наиболее рациональным с точки зрения их организации, отладки и возможной корректировки при решении различных практических задач.

Литература

1. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975.- 228с.
2. Алифанов О.М. идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979.- 219с.
3. Коздоба Л.А., Крутковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. – Киев: Наукова думка, 1982.- 360с.
4. Симбирский Д.М. Тепловая диагностика двигателей. – Киев: Техника, 1976.- 208с.