К.ф-м.н.. ГАЛИАХМЕТОВ А.М., ВАЗАНКОВ Д.В., НАСАЧЕНКО Р.М.

Донецкий национальный технический университет, Украина

Точно интегрируемая анизотропная модель в общей теории относительности

В работе в рамках проблемы существования точно интегрируемых космологических моделей в общей теории относительности (ОТО) с неминимально связанным скалярным полем рассматриваются анизотропные модели для духового (ghost) скалярного поля с учетом его потенциала и ультрарелятивисткого газа. Интерес к потенциалу скалярного поля $V(\Phi)$ в общерелятивистских теориях гравитации обусловлен рядом обстоятельств: его ролью в изотропизации анизотропных космологических моделей, его учетом в моделях с частицеподобными решениями; модели с $V(\Phi)$ естественно возникают в альтернативных теориях гравитации и супергравитации, в теориях струн и бран; скалярный потенциал управляет инфляцией и активно используется в моделях темной материи и темной энергии (виды применявшихся $V(\Phi)$ приведены в обзорах [1, 2]).

Присутствие ультрарелятивистского газа в качестве дополнительного источника гравитационного поля обусловлено как тем фактом, что Вселенная, вообще говоря, является многокомпонентной системой, так и ранее полученными результатами (см., например, [3,4]), полученными в ОТО и показавшие важность учета этой компоненты в эволюции космологических моделей.

Точные общие решения аналогичной задачи без учета потенциала скалярного поля и ультрарелятивистского газа были получены в [5]. Было обнаружено, что решения возможны лишь для фиксированного параметра неминимальной связи $\xi = 1/6$ и они описывают сингулярные модели, в которых расширение достигает максимума и затем происходит сжатие и реколлапс.

Лагранжиан модели выбираем в виде:

$$L = -R/2æ - (1/4\pi)\{(1/2)[\Phi_{,k}\Phi^{,k} + \xi R\Phi^2] + V(\Phi)\} + L_p . \qquad (1)$$

Здесь R – скалярная кривизна; $æ = 8\pi\mathrm{G}$ – гравитационная постоянная Эйнштейна, L_p - лагранжиан ультрарелятивистского газа.

Отметим, что уравнение скалярного поля, соответствующее лагранжиану (1), при $\xi = 1/6$ и $V(\Phi) = 0$ будет конформно-инвариантным.

Варьируя действие с лагранжианом (1) по g_{ij} и Φ получим

$$G_{ij} = æ(T_{ij}^s + T_{ij}^p) , \qquad (2)$$

$$g_{ik}\nabla^i\nabla^k\Phi - \xi\Phi R - V' = 0 , \qquad (3)$$

где

$$T_{ij}^s = -(1/4\pi)\{\Phi_{,i}\Phi_{,j} - (1/2)[\Phi_{,m}\Phi^{,m} + \xi R\Phi^2 + 2V(\Phi)]g_{ij} + \xi[-\nabla_i\nabla_j + g_{ij}\nabla_k\nabla^k + R_{ij}]\Phi^2\} ,$$

$$T_{ij}^p = (\varepsilon_p + P_p)U_iU_j - P_p g_{ij} . \qquad (4)$$

Здесь $V' = \partial V/\partial\Phi$; ε_p, P_p - плотность энергии и давление ультрарелятивистского газа.

В метрике однородной анизотропной модели типа I по Бианки

$$ds^2 = -a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 + dt^2 \qquad (5)$$

для ультрарелятивистского газа справедливо

$$\varepsilon_p = 3P_p = C_p\tau^{-4/3} , \qquad C_p = const , \qquad \tau = abc \qquad (6)$$

Потенциал скалярного поля возьмем в виде

$$V(\Phi) = C_2(4\pi + \xi æ\Phi^2)^2 , \qquad C_2 = const \qquad (7)$$

Из полевых уравнений ОТО следуют выражения для масштабных факторов:

$$a(t) = (D_1^2 D_3)^{1/3}\tau^{1/3}\exp\left[(2x_1 + x_3)3^{-1}\int(\tau Z)^{-1}dt\right], \qquad (8)$$

$$b(t) = (D_1^{-1} D_3)^{1/3}\tau^{1/3}\exp\left[(x_3 - x_1)3^{-1}\int(\tau Z)^{-1}dt\right], \qquad (9)$$

$$c(t) = (D_1 D_3^2)^{-1/3}\tau^{1/3}\exp\left[-(x_1 + 2x_3)3^{-1}\int(\tau Z)^{-1}dt\right], \qquad (10)$$

где D_1, D_3, x_1, x_3 - постоянные интегрирования; $Z = 4\pi + \xi æ\Phi^2$.

Нетрудно показать, что система уравнений поля допускает первый интеграл

$$\tau \dot{\Phi} Z^{(1-6\xi)/2} = C_1, \quad C_1 > 0. \tag{11}$$

Для $\xi = 1/6$, $C_2 < 0$ при наложении следующих условий:

$$(x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2) C_3^2 (6æC_1^2)^{-1} + |C_2| = \pi C_3^2, \qquad 4\pi C_p (C_3 / C_1)^{4/3} = 3|C_2|, \tag{12}$$

получено точное частное решение

$$a_\mu(t) = a_{0\mu}(C_1 / C_3)^{1/3} (4\pi)^{-1/2} W^{1/2} \exp\left[A_\mu (4\pi)^{1/2} (C_3 / C_1) \int W^{-1/2} dt\right]$$

$$\tau = (4\pi)^{-3/2} (C_1 / C_3) W^{3/2}, \qquad \Phi = 8\pi^{3/2} C_3 t W^{-1/2} \tag{13}$$

где C_3 - постоянная интегрирования $(C_3 > 0)$, $\mu = 1,2,3,$

$$a_{01} a_{02} a_{03} = 1, \qquad A_1 + A_2 + A_3 = 0, \qquad W(t) = 1 - \frac{8\pi^2 æ}{3} C_3^2 t^2. \tag{14}$$

Решение (13) справедливо при $\frac{8\pi^2 æ}{3} C_3^2 t^2 \le 1$, оно описывает космологическую модель, которая расширяется от начальной сингулярности, достигает максимума ($\tau_{\max} = (4\pi)^{-3/2} (C_1 / C_3)$, $\Phi = 0$), а затем начинает сжиматься к финальной сингулярности.

Следует отметить, что в литературе наряду с $V(\Phi) > 0$ рассматривались модели с $V(\Phi) < 0$ [6-8].

Сравнительный анализ полученного решения (13) с точным общим решением, найденным в работе [5], показывает, что учет потенциала скалярного поля и ультрарелятивистского газа не сказывается на качественном характере эволюции моделей.

Литература:

1. Sahni V., Starobinsky A.A. // IJMP. - 2000. – v. D 9. – P. 373.
2. Peebles P.J.E., Ratra B. // Rev. Mod. Phys. – 2003. – v. 75. – P. 599.
3. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975.

4. Захаров А.В. // ЖЭТФ. – 1979. – т. 77. - № 2. – С. 434.

5. Galiakhmetov A. M. // Gravitation and Cosmology. - 2007. – v.13 – № 3 (51). – P. 217.

6. Felder G.N., Frolov A., Kofman L., Linde A. // Phys. Rev. D. – 2002. – v. 66, 023507; hep-th / 0202017.

7. Kallosh R., Linde A., Prokushkin S., Shmakova M. // Phys. Rev. D. – v. 66, 1235503; hep-th / 0208156.

8. Alam U., Sahni V., Starobinsky A.A., "Can dark energy be decaying?", astro-ph / 0302302.