

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУР В ЖИДКОЙ И ТВЕРДОЙ ФАЗАХ МЕТАЛЛА С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ФРОНТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ.

Дремов В.В.¹, Минакова О.А.²

1 – Донбасская Национальная Академия Строительства и Архитектуры, г. Макеевка, Украина

2 – Донецкий Национальный Технический Университет, г. Донецк, Украина

Вариационным методом решена нестационарная задача затвердевания металла в изложницах с различной теплопроводностью стенок. Выполнены численные расчеты движения фронта затвердевания в чугуночной изложнице и песчаной форме на любой момент времени. Влияние теплопроводности стенок изложницы на процесс затвердевания изучалось как теоретически [2], так и экспериментально [3]. В приближенных теоретических методах распределение температуры в твердой фазе представлялось степенной функцией и задавался закон движения фронта затвердевания, а из уравнения теплового баланса определялась зависимость координаты затвердевания от времени. При этом в окончательном решении присутствует много коэффициентов, которые задаются произвольно, что снижает ценность полученных решений. Рассматривается затвердевание металла в клинообразной изложнице, представляющей собой в поперечном сечении вертикально вытянутую трапецию с малыми углами конусности α [4]. Предполагается, что все тепло отводится через боковые стенки, площадь которых намного больше площади дна и верха. Кроме того, ввиду больших размеров изложницы по длине, для отливки плоских слитков, площадь торцевых поверхностей будет много меньше площади боковых поверхностей, поэтому не учитываются потоки тепла через торцевые поверхности изложницы. Ввиду того, что рассматривается движение фронта затвердевания, который, в основном, параллелен боковой стенке, то в погранслое, прилегающем к фронту затвердевания, можно пренебречь поперечной составляющей скорости V_φ по сравнению с продольной составляющей V_r . В решении задачи используется цилиндрическая система координат (r, φ, z) . На боковой поверхности $\varphi = \alpha$ и на цилиндрической поверхности $r = R_1$ принимаем $T = T_{\text{п}} = \text{const} < T_{\text{кр}}$ (температура кристаллизации). На поверхности $r = R_2$ полагаем $T = \text{const}$. Боковая поверхность $\varphi = \alpha$ при $t \geq 0$ имеет температуру $T_{\text{п}}$. При $t > 0$ начинается процесс кристаллизации и на фронте кристаллизации $T = T_{\text{к}}$. Уравнение теплопереноса в области жидкого металла запишется в следующем виде

$$\rho_1 c_{v1} \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right), \quad (1)$$

при $0 < \varphi < \varphi_\phi$; $r_\phi < r < R_2$.

Аналогичное уравнение теплопереноса в твердой фазе

$$\rho_2 c_{v2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} \right) = \lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (2)$$

при $\varphi_\phi < \varphi < \alpha$; $R_1 < r < r_\phi$.

Фронт кристаллизации движется от боковой поверхности изложницы к центру; для малых углов конусности толщину затвердевшей корки можно найти по формуле

$$\varepsilon(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = r_\phi(t_\phi)(\alpha - \varphi_\phi(t_\phi)). \quad (3)$$

В момент времени $t = 0$ твердая фаза отсутствует, а $T_1(\varphi, 0) = T_{\text{п}}$ при $R_1 < r < R_2$ и $0 < \varphi < \alpha$. При $t > 0$ и $\varphi = \alpha$ имеем

$$T_2(\alpha, t) = T_{\text{п}}. \quad (4)$$

На фронте кристаллизации

$$T_1(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_2(r_\phi, \varphi_\phi, t_\phi) = T_{\text{к}}. \quad (5)$$

На движущемся фронте теплового перехода выделяется скрытая теплота кристаллизации L_1 , которая отводится через твердую фазу вместе с теплом перегрева. Поэтому

$$\lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_\phi + L_1 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)_\phi. \quad (6)$$

Данное уравнение теплового баланса на фронте кристаллизации используется для определения $\varepsilon(\varphi, t)$. Из уравнений

(1) – (3) и граничных условий (4) – (6) найдем функции $T_1(\varphi, t)$, $T_2(\varphi, t)$ и $\varepsilon(\varphi, t)$.

Уравнение (1) перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_r \frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right), \quad (7)$$

где $a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_{v1}}$ - температуропроводность жидкого металла. (8)

Найдем точное решение по r , т.е. $T_1 \left(\tilde{r} \right)$. Полагая $\frac{\partial T_1}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} = 0$, $V_r = 0$ перепишем уравнение (7) и в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = 0, \quad (9)$$

Его решением является функция $T_1 = C_1 \ln r + C_2$. Используя граничные условия $T_1 = T_H$ при $r = R_2$ и $T_1 = T_K$ при $r = r_\phi$, найдем константы

$$C_1 = \frac{T_H - T_K}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}}; \quad C_2 = \frac{T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}}.$$

Таким образом, точное решение по r имеет вид

$$T_1(r) = \frac{(T_H - T_K) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}}. \quad (10)$$

Далее приближенное решение по φ уравнения (7) ищем вариационным методом, постепенно усложняя задачу.

Вначале найдем зависимость по φ для стационарного случая $\left(\frac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \right)$

$$V_r \frac{\partial T_1}{\partial r} = a_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (11)$$

Введем новые обозначения производных: $\frac{\partial T_1}{\partial r} = T_r$, $\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = T_{rr}$, $\frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} = T_{\varphi\varphi}$. Тогда уравнение (11) можно записать в виде

$$\frac{V_r}{a_1} r T_r - T_r - r T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi} = 0. \quad (12)$$

Функционал, соответствующий уравнению (12) запишется в виде

$$L = \int_{r_\phi}^{R_2} \int_0^{\varphi_\phi} \left(2 \frac{V_r}{a_1} r T_r^0 T + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 \right) dr d\varphi, \quad (13)$$

где $T_r^0 = \frac{\partial T^0}{\partial r}$, а индекс ноль при T_r обозначает неварьируемую производную от температуры. Проверим, что

вариация от L по T дает уравнение (12). Для этого запишем уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial L}{\partial T_r} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial T_\varphi} = 0. \quad (14)$$

Вычислим соответствующие производные, подставим в (14) и опуская нулевой индекс при T_r получим (12). Значит функционал (13) соответствует уравнению (12) и функция, минимизирующая его, будет наилучшим приближением решения уравнения (12). Функцию, минимизирующую функционал (13) ищем в виде

$$T \left(\tilde{r}, \overset{\sim}{\varphi} \right) = \frac{(T_H - T_K) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \cdot f \left(\overset{\sim}{\varphi} \right). \quad (15)$$

Найдем производные T_r , T_r^0 , T_φ , подставим их в (11) и, проинтегрировав по r , получим

$$L = \int_0^{\varphi_0} \left(A_1 f^0 \left(\frac{r}{r_\phi} \right) f \left(\frac{r}{r_\phi} \right) + B_1 f^2 \left(\frac{r}{r_\phi} \right) + C_1 \left(f' \left(\frac{r}{r_\phi} \right) \right)^2 \right) d\varphi, \quad (16)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{2V_r T_H - T_K}{a_1 \ln^2 \frac{R_2}{r_\phi}} \left(\left(T_H R_2 - T_K r_\phi \right) \ln \frac{R_2}{r_\phi} - \left(T_H - T_K \right) \left(R_2 - r_\phi \right) \right), \quad B_1 = \frac{\left(T_H - T_K \right)^2}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}},$$

$$C_1 = \frac{1}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \left(\frac{\left(T_H - T_K \right)^2 \left(R_2^2 + \ln R_2 \ln r_\phi + \ln^2 r_\phi \right)}{3} - \left(T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi \right) \left(T_H \ln R_2 - T_K \ln r_\phi \right) \right).$$

Функцию $f \left(\frac{r}{r_\phi} \right)$ выбираем так, чтобы интеграл (16) был минимальным, что соответствует выполнению уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial f \left(\frac{r}{r_\phi} \right)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial L}{\partial f' \left(\frac{r}{r_\phi} \right)} = 0. \quad (17)$$

Возьмем производные от (16) и подставим в уравнение (17). В результате получим

$$f'' \left(\frac{r}{r_\phi} \right) - K_1 f \left(\frac{r}{r_\phi} \right) = 0, \quad (18)$$

$$\text{где } K_1 = \sqrt{\frac{A_1 + 2B_1}{2C_1}}.$$

$$\text{Решением (18) будет } f \left(\frac{r}{r_\phi} \right) = C_1 \operatorname{ch} \left(K_1 \varphi \right) + C_2 \operatorname{sh} \left(K_1 \varphi \right). \quad (19)$$

Используя граничные условия $T = T_K$, $\varphi = \varphi_\phi$ при $r = r_\phi$ и $\left(\frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = 0$, найдем константы $C_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} \left(K_1 \varphi_\phi \right)}$,

$C_2 = 0$. Тогда, из уравнения (19) имеем

$$f \left(\frac{r}{r_\phi} \right) = \frac{\operatorname{ch} \left(K_1 \varphi \right)}{\operatorname{ch} \left(K_1 \varphi_\phi \right)}. \quad (20)$$

Итак, решением по r и по φ является функция

$$T_1 \left(r, \varphi \right) = \frac{\left(T_H - T_K \right) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(K_1 \varphi \right)}{\operatorname{ch} \left(K_1 \varphi_\phi \right)}. \quad (21)$$

Поиск полного нестационарного решения уравнения теплопроводности в жидкой фазе осуществляется аналогично нахождению зависимости по φ . Функционал, соответствующий уравнению (7) имеет вид

$$L = \int_0^{t_\phi} \int_0^{\varphi_A} \int_{r_\phi}^{R_2} \left(\frac{2V_r}{a_1} r T_r^0 T + \frac{2r}{a_1} T T_t^0 + r T_r^2 + \frac{1}{r} T_\varphi^2 \right) dr d\varphi dt, \quad (22)$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$T_1 \left(r, \varphi, t \right) = \frac{\left(T_H - T_K \right) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \left(K_1 \varphi \right)}{\operatorname{ch} \left(K_1 \varphi_\phi \right)} \cdot f \left(t \right). \quad (23)$$

Вычислим производные $T_r, T_\varphi, T_t, T_r^0, T_t^0$ и подставим их в уравнение (22). Проинтегрировав по r и по φ , получим

$$L = \int_0^{t_\phi} \left(N_1 f^0 \left(t \right) + M_1 f \left(t \right) f' \left(t \right) + P_1 f^2 \left(t \right) + Q_1 f^2 \left(t \right) \right) dt, \quad (24)$$

где N_1, M_1, P_1, Q_1 - константы интегрирования по r и φ . Варьируя (24) по $f \left(t \right)$, получим

$$f' \left(t \right) + f \left(t \right) \frac{G_1}{M_1} = 0, \quad (25)$$

где $G_1 = N_1 + 2P_1 + 2Q_1$. Решением (25) будет функция

$$f(\xi) = Ce^{-\frac{G_1 t}{M_1}}. \quad (26)$$

Найдем константу С, используя граничные условия $T = T_K$, $r = r_\phi$ при $t = t_\phi$ и $\varphi = \varphi_\phi$: $C = e^{\frac{G_1 t_\phi}{M_1}}$. Значит

$f(\xi) = e^{-\frac{G_1 (t-t_\phi)}{M_1}}$. Итак, решением уравнения (1) будет функция

$$T_1(\xi, \varphi, t) = \frac{(T_H - T_K) \ln r + T_K \ln R_2 - T_H \ln r_\phi}{\ln \frac{R_2}{r_\phi}} \cdot \frac{ch(K_1 \varphi)}{ch(K_1 \varphi_\phi)} \cdot e^{-\frac{G_1 (t-t_\phi)}{M_1}} \quad (27)$$

Аналогичным образом находится распределение температуры в твердой фазе металла. Решением уравнения (2) будет функция

$$T_2(\xi, \varphi, t) = \frac{(T_K - T_{II}) \ln r + T_{II} \ln r_\phi - T_K \ln R_1}{\ln \frac{r_\phi}{R_1}} \times \frac{\frac{T_{II}}{T_K} sh(K_2 (\varphi - \varphi_\phi)) + sh(K_2 (\alpha_1 - \varphi))}{sh(K_2 (\alpha_1 - \varphi_\phi))} \cdot e^{-\frac{G_2 (t-t_\phi)}{M_2}} \quad (28)$$

где $K_2 = \sqrt{\frac{A_2}{B_2}}$, $A_2 = \frac{(T_K - T_{II})}{\ln \frac{r_\phi}{R_1}}$, $G_2 = 2P_2 + 2Q_2$,

$$B_2 = \frac{1}{\ln \frac{r_\phi}{R_1}} \left(\frac{(T_K - T_{II}) (r_\phi^2 + \ln r_\phi \ln R_1 + \ln^2 R_1)}{3} + (T_{II} \ln r_\phi - T_K \ln R_1) (T_K \ln r_\phi - T_{II} \ln R_1) \right),$$

M_2, P_2, Q_2 - константы интегрирования по r и по φ .

Чтобы вычислить скорость кристаллизации, преобразуем уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{L_1 \rho} \left[\lambda_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \right)_\phi - \lambda_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \right)_\phi \right], \quad (29)$$

учитывая, что $\varepsilon = r_\phi (\alpha - \varphi_\phi)$. (30)

Вычислив производные от уравнений (27), (28) и подставив их в уравнение (29), получим скорость кристаллизации по радиусу

$$r_\phi \frac{dr_\phi}{dt} (\alpha - \varphi_\phi) = \frac{T_K}{L_1 \rho} \left[\lambda_1 K_1 th(K_1 \varphi_\phi) - \lambda_2 K_2 \frac{T_{II} - ch(K_2 (\alpha_1 - \varphi_\phi))}{sh(K_2 (\alpha_1 - \varphi_\phi))} \right]. \quad (31)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через C_* , тогда

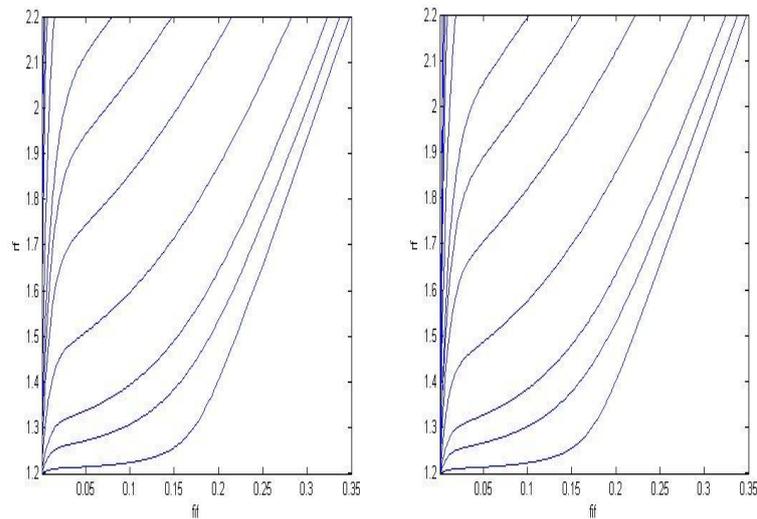
$$r_\phi \frac{dr_\phi}{dt} (\alpha - \varphi_\phi) = \frac{T_K}{L_1 \rho} \cdot C_*, \quad (32)$$

откуда, проинтегрировав, найдем

$$r_\phi = \sqrt{\frac{2T_K C_*}{L_1 \rho (\alpha - \varphi_\phi)}} t + R_1^2, \quad (33)$$

где $R_1^2 = const$, при $r_\phi = R_1$ и $t = 0$.

По полученной формуле (33) выполнены численные расчеты для следующих параметров металла, изложницы, окружающей среды: $R_1=1,2$ м, $R_2=2,2$ м, $\alpha_1=10^\circ$, $\alpha_2=12^\circ$, $T_{II}=1833$ К, $T_K=1733$ К, $T_{cp}=300$ К, $\rho=7,31 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1=26,5$ Вт/м·К, $\lambda_2=30,1$ Вт/м·К, $a_1=4,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $V_1=10^{-1}$ м/с, $L_1=2,72 \cdot 10^5$ Дж/кг. Для чугунной изложницы: $\alpha=68$ Вт/м²·К, $\lambda_3=58,7$ Вт/м·К. Для песчаной изложницы: $\alpha=17$ Вт/м²·К, $\lambda_3=0,325$ Вт/м·К.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

На графиках показано положение фронта затвердевания в чугунной изложнице и песчаной форме в одинаковые моменты времени. Из сравнения видно, что затвердевание в песчаной форме происходит медленнее, чем в чугунной изложнице. Это связано с малой теплопроводностью стенок песчаной формы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Вейник А.И. Теплообмен между слитком и изложницей. – М. –Металлургиздат. –1959. –С.265.
2. Самойлович Ю.А. Стальной слиток / Ю.А. Самойлович, В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, В.В. Филиппов. Т.2. Затвердевание и охлаждение. – Минск. Белорусская наука, 2000. –С.640.
3. Раддл Р.У. Затвердевание отливок. – Москва. – Машгиз. –1960. – С.391.
4. Дремов В.В., Недопекин Ф.В., Минакова О.А. Влияние теплопроводности стенок изложницы на движение фронта затвердевания плоского слитка./ Металлургическая теплотехника. – Сборник научных трудов. Национальная металлургическая академия Украины. – Днепропетровск. “Пороги”. –2009. –С.67-72.
5. Александров В.Д., Голоденко Н.Н., Дремов В.В., Недопекин Ф.В. Математическое моделирование затвердевания металла в песчаной и чугунной изложницах./ Математическое моделирование. – Днепропетровск. Гос. Унив. –2010. –1(22). – С.24 – 31.