К.ф-м.н. Галиахметов А.М., Домашев Д.В.

Донецкий национальный технический университет, Украина

Точно интегрируемая однородная изотропная космологическая модель в общей теории относительности

В работе в рамках проблемы существования точно интегрируемых космологических моделей в общей теории относительности (ОТО) с неминимально связанным скалярным полем рассматриваются однородные изотропные модели для духового (ghost) скалярного поля с учетом его потенциала и ультрарелятивистского газа. Интерес к потенциалу скалярного поля $V(\Phi)$ в общерелятивистских теориях гравитации обусловлен рядом обстоятельств: его ролью в изотропизации анизотропных космологических моделей, его учетом в моделях с частицеподобными решениями; модели с $V(\Phi)$ естественно возникают в альтернативных теориях гравитации и супергравитации, в теориях струн и бран; скалярный потенциал управляет инфляцией и активно используется в моделях темной материи и темной энергии (виды применявшихся $V(\Phi)$ приведены в обзорах [1, 2]).

Присутствие ультрарелятивистского газа в качестве дополнительного источника гравитационного поля обусловлено как тем фактом, что Вселенная, вообще говоря, является многокомпонентной системой, так и ранее полученными результатами (см., например, [3,4]), полученными в ОТО и показавшие важность учета этой компоненты в эволюции космологических моделей.

Лагранжиан модели выбираем в виде:

$$L = -R/2æ - (1/4\pi)\{(1/2)[\Phi_{,k}\Phi^{,k} + \xi R\Phi^2] + V(\Phi)\} + L_p . \qquad (1)$$

Здесь R – скалярная кривизна; æ $= 8\pi G/c^4$ – гравитационная постоянная Эйнштейна, ξ – постоянная неминимальной связи; L_p – лагранжиан ультрарелятивистского газа.

Отметим, что уравнение скалярного поля, соответствующее лагранжиану (1), при $\xi = 1/6$ и $V(\Phi) = 0$ будет конформно-инвариантным.

Варьируя действие с лагранжианом (1) по g_{ij} и Φ получим

$$G_{ij} = æ\,(T^s_{ij} + T^p_{ij}), \tag{2}$$

$$g_{ik}\nabla^i\nabla^k\Phi - \xi\,\Phi R - V' = 0, \tag{3}$$

где

$$T^s_{ij} = -(1/4\pi)\{\Phi_{,i}\Phi_{,j} - (1/2)[\Phi_{,m}\Phi^{,m} + \xi R\Phi^2 + 2V(\Phi)]g_{ij} +$$
$$+\xi[-\nabla_i\nabla_j + g_{ij}\nabla_k\nabla^k + R_{ij}]\Phi^2\},$$

$$T^p_{ij} = (\varepsilon_p + P_p)U_iU_j - P_p g_{ij}. \tag{4}$$

Здесь $V' = \partial V/\partial\Phi$; ε_p, P_p - плотность энергии и давление ультрарелятивистского газа.

Для однородных изотропных открытых моделей с метрикой

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-dr^2 - sh^2r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + d\eta^2\right], \tag{5}$$

уравнения (2) и (3) принимают вид

$$2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} - 1 = \Psi\left[2\xi\hat{O}\hat{O}'' + 2\xi\frac{a'}{a}\hat{O}\hat{O}' + (-\frac{1}{2} + 2\xi)\hat{O}'^2 - a^2V(\hat{O})\right] + 4\pi a^2\Psi P_p, \tag{6}$$

$$\frac{a'^2}{a^2} - 1 = \Psi\left[\frac{1}{6}\hat{O}'^2 + 2\xi\frac{a'}{a}\hat{O}\hat{O}' - \frac{1}{3}a^2V(\hat{O})\right] - \frac{4\pi}{3}a^2\Psi\varepsilon_p, \tag{7}$$

$$\hat{O}'' + 2\frac{a'}{a}\hat{O}' - a^2V' + 6\xi(\frac{a''}{a} - 1)\hat{O} = 0, \tag{8}$$

где $\Psi = æ(4\pi\alpha_s - æ\xi\hat{O}^2)^{-1}$, штрих означает дифференцирование по η.

В метрике (5) для ультрарелятивистского газа справедливо

$$\varepsilon_p = 3P_p = C_p a^{-4}, \qquad C_p = \mathrm{const} > 0. \tag{9}$$

Потенциал скалярного поля V(Φ) выберем в виде

$$V(\hat{O}) = -C_2(4\pi + æ\xi\hat{O}^2)^2, \tag{10}$$

где $C_2 = \mathrm{const} > 0$. Здесь следует отметить, что в литературе наряду с $V(\Phi) > 0$ рассматривался модели с $V(\Phi) < 0$ [6 - 8].

Для $\xi = \frac{1}{6}$ получено точное частное решение

$$a(t) = A\sqrt{1-(t/t_0)^2}, \qquad \hat{O} = \sqrt{\frac{24\pi}{æ}}\frac{t/t_0}{\sqrt{1-(t/t_0)^2}}, \tag{11}$$

где t – космическое синхронное время $(a(\eta)d\eta = cdt)$; A, t_0 – постоянные интегрирования, на которые накладываются условия:

$$\frac{2æ}{3}C_p t_0^2 A^{-4} + c^2 t_0^2 A^{-2} = 3, \qquad 1 + c^2 t_0^2 A^{-2} = \frac{8\pi æ}{3}c^2 t_0^2 C_2. \tag{12}$$

Решение (11) справедливо для $t \in [-t_0, t_0]$, оно описывает космологическую модель, которая расширяется от начальной сингулярности ($t = -t_0$), достигает максимума ($a_{max} = A,\ \hat{O} = 0,\ t=0$), а затем начинает сжиматься к финальной сингулярности $(t = t_0)$.

В классической монографии [9] приведено точное решение аналогичной задачи без учета скалярного поля:

$$a = a_1 \mathrm{sh}\eta, \qquad t = \frac{a_1}{c}(\mathrm{ch}\eta - 1), \tag{13}$$

где $a_1 = \mathrm{const}$

Сравнительный анализ полученного решения (11) с (13) показывает, что скалярное поле с потенциалом вида (10) создает эффект типа кривизны [10], так как эволюция модели (11) характерна не для открытой, а для закрытой космологической модели.

Литература:

1. Sahni V., Starobinsky A.A. // IJMP. - 2000. – v. D 9. – P. 373.
2. Peebles P.J.E., Ratra B. // Rev. Mod. Phys. – 2003. – v. 75. – P. 599.
3. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975.
4. Захаров А.В. // ЖЭТФ. – 1979. – т. 77. - № 2. – С. 434.
5. Galiakhmetov A. M. // Gravitation and Cosmology. - 2007. – v.14 – № 3. – P. 190.
6. Felder G.N., Frolov A., Kofman L., Linde A. // Phys. Rev. D. – 2002. – v. 66, 023507; hep-th / 0202017.
7. Kallosh R., Linde A., Prokushkin S., Shmakova M. // Phys. Rev. D. – 2002. – v. 66, 1235503; hep-th / 0208156.
8. Alam U., Sahni V., Starobinsky A.A., "Can dark energy be decaying?", astro-ph / 0302302.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.
10. Галиахметов А.М.// Изв. вузов. Физика. – 2003. – №7. – с.23