УДК 621.9+519.8+629.11

**Мельникова Е.П., д.т.н., Быков В.В.**

**АДИ ГВУЗ «ДонНТУ», г. Горловка**

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Рассматривается процесс создания математической модели зависимости объекта адаптивного управления от основных технологических факторов процесса резания при двухрезцовой обработке тормозных дисков транспортных средств категории $M_1$. Проанализирована возможность создания системы адаптивного управления размерами тормозных дисков, обрабатываемых на малогабаритном токарном станке непосредственно на транспортном средстве. Для математического описания объекта адаптивного управления используются статистические методы планирования эксперимента.*

## *Введение*

На современном этапе развития технологии машиностроения предъявляются повышенные требования к качеству и надежности транспортных машин, улучшению их эксплуатационных свойств. Для решения этих задач необходимо совершенствовать и развивать методы обработки резанием, формирующие поверхностный слой деталей, который определяет их эксплуатационные свойства. На сегодняшний день уровень развития металлообработки, которая характеризуется широким внедрением высокопродуктивного оборудования и адаптивных систем управления, выдвигает принципиально новые требования к проектированию технологических систем. Успешная реализация этих требований связана с использованием знаний по оптимизации принятых проектных решений.

***Целью*** данного исследования является создание математической модели зависимости объекта управления от основных технологических факторов процесса резания при восстановлении проточкой тормозных дисков транспортных средств категории $M_1$.

## *Основное содержание работы*

Эксплуатационные свойства элементов тормозной системы автомобиля во многом определяются качеством поверхностного слоя. Требования к качеству поверхностного слоя устанавливаются конструкторской документацией и техническими условиями на автомобиль.

Для надежного и безопасного функционирования транспортных машин необходимо повысить эффективность тормозной системы. Этого можно достичь, если в процессе эксплуатации техническое состояние рабочей тормозной системы поддерживать на уровне требований нормативных документов, которые устанавливают требования к техническому состоянию транспортного средства по условиям безопасности. Одним из вариантов поддержания тормозной системы на уровне требований безопасности является восстановление рабочих поверхностей тормозных дисков при каждой замене тормозных колодок [1].

Проточка тормозных дисков транспортных машин категории $M_1$ производится на малогабаритных токарных станках. Выбор рациональных режимов резания влияет на производительность процесса и качество обработанной поверхности.

Повышение качества обработки тормозных дисков резанием требует решения задач оптимизации, что возможно осуществить на основе математических моделей, связывающих параметры материала и условия обработки. Вопросы математического моделирования технологических параметров процесса резания и их оптимизации отражены в работах Ю. М. Соломенцева, В. Д. Цветкова, В. В. Павлова, Г. К. Горянского, В. Н. Подураева [2], А. А. Спиридонова [3] и других.

Однако в этих работах недостаточно внимания уделено экспериментальным исследованиям технологических процессов с использованием статистических методов планирования эксперимента. В связи с этим актуальна разработка системы адаптивного управления размерами тормозных дисков, обрабатываемых на малогабаритном токарном станке и математическое описание объекта управления. В качестве выхода объекта управления принимаем величину упругого перемещения $A'_Д$ режущего инструмента относительно обрабатываемого диска. Математическое описание объекта адаптивного управления получаем, используя статистические методы планирования эксперимента [3, 4].

Рассмотрим зависимость упругого перемещения $A'_Д$ режущего инструмента от основных технологических факторов процесса резания на малогабаритном токарном станке для проточки тормозных дисков. При обработке тормозных дисков точением на величину упругого перемещения оказывают влияние величина припуска *Z,* подача S и скорость резания *V.* Предположим, что математическая модель, характеризующая влияние указанных факторов на величину упругого перемещения может быть представлена уравнением регрессии степенного вида:

$$A'_Д = \mathrm{C} \cdot \mathrm{v}^{\alpha_1} \cdot \mathrm{s}^{\alpha_2} \mathrm{z}^{\alpha_3}, \tag{1}$$

где $\mathrm{C}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — параметры модели, подлежащие определению.

Выражение 1 после логарифмирования линеаризуется:

$$\lg A'_Д = \lg \mathrm{C} + \alpha_1 \lg \mathrm{v} + \alpha_2 \lg \mathrm{s} + \alpha_3 \lg \mathrm{z}. \tag{2}$$

Последнее выражение можно записать следующим образом:

$$y = \mathrm{b}_0 x_0 + \mathrm{b}_1 x_1 + \mathrm{b}_2 x_2 + \mathrm{b}_3 x_3, \tag{3}$$

где $y = \lg A_Д$,

$\mathrm{x}_0$ — фиктивная переменная $(x_0 = 1)$;

$\mathrm{x}_1, x_2, x_3$ — кодированные значения факторов.

Кодирование переменных осуществляем по соотношениям [5]:

$$x_1 = \frac{2(\lg \mathrm{v} \text{-} \lg \mathrm{v}_{\max})}{\lg \mathrm{v}_{\max} - \lg \mathrm{v}_{\min}} + 1, \tag{4}$$

$$x_2 = \frac{2(\lg \mathrm{s} \text{-} \lg \mathrm{s}_{\max})}{\lg \mathrm{s}_{\max} - \lg \mathrm{s}_{\min}} + 1, \tag{5}$$

$$x_3 = \frac{2(\lg \mathrm{z} \text{-} \lg \mathrm{z}_{\max})}{\lg \mathrm{z}_{\max} - \lg \mathrm{z}_{\min}} + 1. \tag{6}$$

Верхние ($\mathrm{v}_{\max}$, $\mathrm{s}_{\max}$, $\mathrm{z}_{\max}$), нижние ($\mathrm{v}_{\min}$, $\mathrm{s}_{\min}$, $\mathrm{z}_{\min}$) и основные ($\mathrm{v}_0$, $\mathrm{s}_0$, $\mathrm{z}_0$) уровни факторов указаны в табл. 1.

Таблица 1

Уровни варьирования факторов

| Факторы | Кодовое обозначение факторов | Натуральные значения, соответствующие уровням кодированных факторов | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Верхний +1 | Основной 0 | Нижний -1 |
| V, *м/мин* | $\mathrm{x}_1$ | 100,0 | 80,0 | 60,0 |
| S, *мм/об* | $\mathrm{x}_2$ | 0,15 | 0,12 | 0,09 |
| Z, *мм* | $\mathrm{x}_3$ | 0,2 | 0,15 | 0,1 |

Для определения коэффициентов уравнения (2) поставлен эксперимент, который заключался в протачивании дисков на лабораторной установке [5]. Были взяты тормозные диски из серого чугуна, твердостью НВ 240, диаметром 280 *мм* и толщиной 22 *мм*. Протачивание производилось резцом с главным углом в плане $\varphi = 60^{\circ}$, оснащенным пластинкой из твердого сплава ВК6 [6]. Условия эксперимента определялись некомпозиционным планом второго порядка [4], матрица которого и результаты опытов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Матрица планирования и результаты опытов

| Номер опыта | Матрица некомпозиционного плана | | | | | | | | | | Значение функции отклика | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | Эксперимен-тальные | | Расчет-ные |
| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1^2$ | $x_2^2$ | $x_3^2$ | $A'_Д$, *мм* | $y_j=\lg A'_Д$ | $y'_j$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,23 | -0,644 | -0,652 |
| 2 | 1 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,15 | -0,821 | -0,836 |
| 3 | 1 | -1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,28 | -0,548 | -0,576 |
| 4 | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0,17 | -0,777 | -0,76 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,19 | -0,719 | -0,706 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0,26 | -0,590 | -0,576 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0,13 | -0,889 | -0,912 |
| 8 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0,33 | -0,488 | -0,5 |
| 9 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0,15 | -0,827 | -0,836 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,19 | -0,706 | -0,706 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0,36 | -0,450 | -0,446 |
| 12 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0,16 | -0,810 | -0,782 |
| 13 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0,24 | -0,620 | -0,63 |
| 14 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0,11 | -0,971 | -0,966 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,21 | -0,695 | -0,706 |

В нашем случае информация о порядке полинома отсутствует, следовательно модель исследуемого процесса подбираем, начиная с простейшего линейного уравнения (3), последовательно увеличивая степень полинома до получения адекватной модели (7). Для трех факторов рассмотрим некомпозиционные планы второго порядка типа $3^k$. Этот план предусматривает проведение 15 опытов. По результатам опытов, поставленных согласно рассмотренным некомпозиционным планам, оцениваем коэффициенты полинома вида:

$$y = \mathrm{b}_0 x_0 + \mathrm{b}_1 x_1 + \mathrm{b}_2 x_2 + \mathrm{b}_3 x_3 + \mathrm{b}_{12} x_1 x_2 + \mathrm{b}_{13} x_1 x_3 + \mathrm{b}_{23} x_2 x_3 + \mathrm{b}_{11} x_1^2 + \mathrm{b}_{22} x_2^2 + \mathrm{b}_{33} x_3^2 . \quad (7)$$

Коэффициенты уравнения (7) находим по следующему выражению [5]:

$$B = (\mathrm{X}^T \mathrm{X})^{-1} (X^T Y), \quad (8)$$

где $B$ — вектор-столбец, состоящий из коэффициентов уравнения (7);

$X$ — матрица условий эксперимента (таблица 2);

$X^T$ — матрица, транспонированная к матрице X;

$(X^* X)^{-1}$ — матрица, обратная матрице-произведению $(X^* X)$;

$Y$ — вектор-столбец результатов наблюдений ($y_j$ — экспериментальный, таблица 2).

На основании произведенных расчетов в соответствии с формулой (8) получаем следующие значения коэффициентов вектора-столбца B:

$$(X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y) = \begin{pmatrix} -0{,}706 \\ -0{,}038 \\ 0{,}092 \\ 0{,}168 \\ -0{,}013 \\ -9{,}768 \cdot 10^{-3} \\ 1{,}802 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}011 \\ -2{,}72 \cdot 10^{-3} \\ -3{,}274 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{33} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $b_o$ = - 0,706; $b_1$ = - 0,038; $b_2$ = 0,092; $b_3$ = 0,168; $b_{12}$ = - 0,013; $b_{13}$ = - 0,00098; $b_{23}$ = 0,00018; $b_{11}$ = 0,011; $b_{22}$ = -0,00027; $b_{33}$ = - 0,00033. Дисперсию $s_y^2$ воспроизводимости эксперимента по результатам трех опытов в центре плана ($y_j$-опыты 5, 10, 15) определяем с помощью табл.3.

Таблица 3

Расчет дисперсии $s_y^2$

| $y_j$ | $y'$ | $(y_j - y')^2$ | $s_y^2$ |
|---|---|---|---|
| -0,71897 | $\frac{1}{3}\sum_1^3 y_u =$ =-0,70638 | 0,000158 | $\frac{1}{n_0 - 1}\sum (y_u - y')^2 =$ =0,000148 |
| -0,70553 | | 7,21E-07 | |
| -0,69465 | | 0,000138 | |
| $\sum_1^3 y_u = -2{,}11915$ | | $s_E = \sum (y_u - y')^2 = 0{,}000297$ | |

Дисперсии $s^2\{b_i\}$ коэффициентов регрессии находим по выражению:

$$s^2\{b_i\} = c_{ii} s_y^2, \tag{9}$$

где $c_{ii}$ — диагональные элементы матрицы $(X^T X)^{-1}$

$$s^2\{b_0\} = \frac{1}{3} s_y^2 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}000148 = 0{,}0000495;$$

$$s^2\{b_1\} = s^2\{b_2\} = s^2\{b_3\} = \frac{1}{8} s_y^2 = \frac{1}{8} \cdot 0{,}000148 = 0{,}0000185;$$

$$s^2\{b_{12}\} = s^2\{b_{13}\} = s^2\{b_{23}\} = \frac{1}{4}s_y^2 = \frac{1}{4}\cdot 0,000148 = 0,000037;$$

$$s^2\{b_{11}\} = s^2\{b_{22}\} = s^2\{b_{33}\} = \frac{13}{48}s_y^2 = \frac{13}{48}\cdot 0,000148 = 0,0000401.$$

Статистическую значимость коэффициентов уравнения регрессии проверяем по t-критерию Стьюдента, для чего определяем соответствующие значения этого критерия: $t_1 = \frac{|b_1|}{s\{b_1\}} = 8{,}82$, $t_2 = \frac{|b_2|}{s\{b_2\}} = 21{,}36$, $t_3 = \frac{|b_3|}{s\{b_3\}} = 39$, $t_{12} = \frac{|b_{12}|}{s\{b_{12}\}} = 2{,}13$, $t_{13} = \frac{|b_{13}|}{s\{b_{13}\}} = 1{,}6$, $t_{23} = \frac{|b_{23}|}{s\{b_{23}\}} = 0{,}295$, $t_{11} = \frac{|b_{11}|}{s\{b_{11}\}} = 1{,}74$, $t_{22} = \frac{|b_{22}|}{s\{b_{22}\}} = 0{,}43$, $t_{33} = \frac{|b_{33}|}{s\{b_{33}\}} = 0{,}51$.

При 5%-ном уровне значимости и числе степеней свободы 2 табличное значение критерия $t_T = 4{,}3$. Оно больше наблюдаемых значений критерия t для коэффициентов $b_{12}$, $b_{13}$, $b_{23}$, $b_{11}$, $b_{22}$, $b_{33}$, следовательно, указанные коэффициенты можно признать статистически незначимыми и исключить их из уравнения регрессии.

Среди незначимых оказались коэффициенты при квадратичных членах, поэтому оставшиеся коэффициенты были пересчитаны по формуле (4). В результате получили следующее уравнение регрессии:

$$y = -0,706 - 0,038\cdot x_1 + 0,092\cdot x_2 + 0,168\cdot x_3\,. \tag{10}$$

Для проверки адекватности модели (10) вычислили дисперсию $s^2_{A_д}$ адекватности по выражению

$$s^2_{A_д} = (s_R - s_E)/f,$$

где $s_R$ — сумма квадратов отклонений расчетных средних $y_i$ от экспериментальных $y_i$ значений функции отклика во всех точках плана.

Расчетные значения $y_i$ функции отклика, найденные по выражению (10), приведены в табл. 2. $s_E$ — сумма квадратов, использованная для определения дисперсии $sy^2$ воспроизводимости эксперимента по результатам опытов в центре плана, $s_E = 0{,}000297$, $f$ — число степеней свободы,

$$f = N - k' - (n_0 - 1),$$

где $N$ — число опытов в матрице планирования;

$\kappa'$ — число коэффициентов уравнения (10);

$n_0$ — число параллельных опытов в центре плана.

Сумму $s_R$ находим по формуле:

$$s_R = \sum_{j=1}^{N}(y_j - y'_j)^2 = \sum_{j=1}^{15}(y_j - y'_j)^2 = 0{,}003495.$$

Тогда
$$s^2_{A_д} = \frac{s_R - s_E}{N - k' - (n_0 1)} = 0{,}000355.$$

При 5%-ном уровне значимости и числах степеней свободы $f_1 = 9$ и $f_2 = 2$, $F_T = 19{,}35$.

Линейное уравнение регрессии (10) адекватно, так как $F_P = 1{,}97 < F_T = 19{,}35$. Заменяя в уравнении (10) кодированные значения факторов натуральными, получаем

$$\lg A'_Д = -0,706 - 0,038 \cdot \left[ \frac{2(\lg v - \lg 150)}{\lg 150 - \lg 40} + 1 \right] + 0.092 \cdot \left[ \frac{2(\lg s - \lg 0,55)}{\lg 0,55 - \lg 0,2} + 1 \right] +$$

$$+0,168 \cdot \left[ \frac{2(\lg z - \lg 4)}{\lg 4 - \lg 1} + 1 \right] = -0,256 - 0,133 \lg v + 0,42 + 0,56 \lg z.$$

Потенцируя последнее выражение, находим искомую модель в виде уравнения

$$A'_Д = 0,555 \frac{s^{0,42} + z^{0,56}}{v^{0,133}} \ мм. \qquad (11)$$

Уравнение представляет собой математическое описание объекта управления. Оно необходимо для создания системы адаптивного управления размерами тормозных дисков, предназначенного для обработки на данном станке. Согласно уравнению (11) на величину упругого перемещения существенное влияние оказывают припуск (z) и подача (s), причем степень влияния припуска на эту величину больше степени влияния подачи. Можно считать, что скорость (v) резания не оказывает существенного влияния на величину упругого перемещения.

***Выводы***

Данное исследование позволяет с помощью статистического планирования эксперимента математической модели, характеризующей зависимость объекта управления от основных технологических факторов процесса резания и некомпозиционного плана второго порядка для четырех факторов, получить модель, характеризующую зависимость упругого перемещения от припуска, подачи, скорости резания и твердости (НВ 240) обрабатываемого материала на малогабаритном токарном станке непосредственно на автомобиле.

***Список литературы***

1. Мельникова Е.П. Анализ причин выхода из строя элементов тормозной системы автомобилей / Е.П. Мельникова, В.В. Быков // Машиностроение и техносфера XXI века; сборник трудов XIV международной научно-технической конференции. — Донецк: ДонНТУ, 2007. — 313 с.

2. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания/ В.Н.Подураев. — М.: Машиностроение, 1977. — 304 с.

3. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента / А.А. Спиридонов, Н.Г. Васильев. — Свердловск: УПИ Кирова, 1975. — 149 с.

4. Налимов В.В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В.В. Налимов, Н.А. Чернова. — М.: Наука, 1965. — 340 с.

5. Мельникова Е.П. Исследование процесса резания при восстановлении рабочих поверхностей элементов тормозной системы автомобилей / Е.П. Мельникова, В.В. Быков // Важке машинобудування. Проблеми та перспективи розвитку: матеріали VII Міжнародної науково-технічної конференції. — Краматорськ: ДДМА, 2009. — С. 64.

6. Металлорежущие инструменты: учебник для вузов по специальностям «Технология машиностроения», «Металлорежущие станки и инструменты» / Г.Н. Сахаров, О.Б. Арбузов, Ю.Л. Боровой и др. — М.: Машиностроение, 1989. — 328 с.

Рецензент: д.т.н., проф., Л.П. Вовк, АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»

Стаття надійшла до редакції 16.02.10