

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Чигиринский В.В. (ЗНТУ, г. Запорожье)

Получено замкнутое решение плоской задачи в рамках обобщенной теории пластичности. Предложен метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций. Проведен анализ решения задачи для простой упрочняющейся среды.

Предлагаемый метод базируется на замкнутом решении плоской задачи теории пластичности, который опубликован в работах [1]...[6]. Их применение показывает, что имеет место ряд особенностей, позволяющих расширить возможности анализа напряженно-деформированного состояния металла, подойти, с теоретической точки зрения, к механическим характеристикам деформируемой среды.

Прежде всего, это появление в полях напряжений и деформаций (скоростей деформаций) одинаковых координатных функций, позволяющих реализовать теоретическую связь между их обобщенными характеристиками.

Привлечь к аналитическому решению деформационную и теорию пластического течения и с позиций данного метода получить общее решение в рамках сложной упрочняющейся среды.

Температурные поля могут быть представлены с помощью тех же координатных функций, что связывает параметры напряженного, деформированного состояний с температурой среды в каждой точке очага деформации.

Предлагается следующая постановка задачи, исходные уравнения [6], [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 &= 4 \cdot k^2; \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} &= F_1; \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = F_2; \\ \xi_x + \xi_y &= 0; \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0; \\ \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma'_{xy}}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Модель сложной пластической среды:

$$T_i = \chi \cdot (H_i)^{m_1} \cdot (\Gamma_i)^{m_2} \cdot (T)^{m_3}. \quad (2)$$

В систему (1) включены уравнения деформационной теории пластичности и теории течения. Кроме этого добавлено уравнение теплопроводности, [8]. Уравнения связи напряжений скоростей деформаций и деформаций показывают, что напряжения реагируют как на деформационные, так и на скоростные параметры процесса. Модель (2) - это реальная упрочняющаяся среда.

Граничные условия для напряжений [10]:

$$\begin{aligned} \tau_n &= -T_i \cdot \sin[A\Phi - 2 \cdot \alpha], \quad T_i = k \\ \text{или } \tau_n &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2 \cdot \alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2 \cdot \alpha \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Дополнительные условия заданы контактными удельными силами (3) трения, изменяющимися по синусоидальному закону с деформационным и скоростным упрочнением. Все интенсивности и температура зависят от координат очага деформации

Для получения модели (2) рассмотрим три уравнения второго порядка в частных производных, неоднородных, гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{1}{F_1} \cdot \xi_x, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{1}{F_2} \cdot \varepsilon_x, \end{aligned} \quad (4)$$

Для удовлетворения граничным условиям вида (3) необходимо принять связь между касательным напряжением и сопротивлением пластической деформацией на сдвиг в виде, т.е. $\tau_{xy} = k \cdot \sin A\Phi$. Для сложной пластической среды $k = f(\Gamma_i, H_i, T, x, y)$. При этом $k = C_\sigma \cdot \exp \theta'$, где $\theta' = f(\Gamma_i, H_i, T, x, y)$, или

$$\left\{ (\theta'_n \cdot H_x + \theta'_2 \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x)_x + [(\theta'_n \cdot H_x + \theta'_2 \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x) + A\Phi_y]^2 - (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y)_y - [(\theta'_n \cdot H_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y) - A\Phi_x]^2 + 2A\Phi_{xy} \right\} \cdot \sin(A\Phi) + \left\{ 2 \cdot [(\theta'_n \cdot H_x + \theta'_2 \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x) + A\Phi_y] \cdot [A\Phi_x - (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y)] + A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy} - 2 \cdot (\theta'_{nn} \cdot H_x \cdot H_y + \theta'_n \cdot H_{xy} + \theta'_{22} \cdot \Gamma_x \cdot \Gamma_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_{xy} + \theta'_{tt} \cdot T_x \cdot T_y + \theta'_t \cdot T_{xy}) \right\} \cdot \cos(A\Phi) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) тождественно равно нулю, если выражения, стоящие в квадратных скобках равны нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \theta'_n \cdot H_x + \theta'_2 \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x &= -A\Phi_y, \quad \theta'_n \cdot H_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y = A\Phi_x, \\ (\theta'_n \cdot H_x + \theta'_2 \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x)_x &= -A\Phi_{yx}, \quad (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y)_y = A\Phi_{xy}, \\ A\Phi_{yy} &= -(\theta'_{nn} \cdot H_x \cdot H_y + \theta'_n \cdot H_{xy} + \theta'_{22} \cdot \Gamma_x \cdot \Gamma_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_{xy} + \theta'_{tt} \cdot T_x \cdot T_y + \theta'_t \cdot T_{xy}), \\ A\Phi_{xx} &= (\theta'_{nn} \cdot H_x \cdot H_y + \theta'_n \cdot H_{xy} + \theta'_{22} \cdot \Gamma_x \cdot \Gamma_y + \theta'_2 \cdot \Gamma_{xy} + \theta'_{tt} \cdot T_x \cdot T_y + \theta'_t \cdot T_{xy}) \end{aligned}$$

Показатель экспоненты, в этом случае, определяется как сумма трех функций, учитывающие влияние степени, скорости деформации и температуры $\theta' = \theta'_1 + \theta'_2 + \theta'_3$. Имеют место соотношения $\theta'_x = -A\theta = \theta'_1 + \theta'_2 + \theta'_3 = -(A'_1\theta + A'_2\theta + A'_3\theta)$.

Сопротивление сдвигу и составляющие тензора напряжений [11]:

$$\begin{aligned} \kappa &= C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta) \cdot \exp(-A'_2\theta) \cdot \exp(-A'_3\theta), \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta) \cdot \exp(-A'_2\theta) \cdot \exp(-A'_3\theta) \cdot \sin(A\Phi), \\ \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta) \cdot \exp(-A'_2\theta) \cdot \exp(-A'_3\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta) \cdot \exp(-A'_2\theta) \cdot \exp(-A'_3\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(x) + C, \quad (6) \\ \text{при } \theta'_x &= (\theta'_1)_x + (\theta'_2)_x + (\theta'_3)_x = -A\Phi_y, \\ \theta'_y &= (\theta'_1)_y + (\theta'_2)_y + (\theta'_3)_y = A\Phi_x. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение связи значения напряжений, получим:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \operatorname{ctg} A\Phi; \quad \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = \operatorname{ctg} B_1\Phi$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} A \Phi &= \operatorname{ctg} B_1 \Phi = F_1, \\ \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} &= \operatorname{ctg} B_2 \Phi, \\ \operatorname{ctg} A \Phi &= \operatorname{ctg} B_2 \Phi = F_2. \end{aligned}$$

Это, позволяет установить связь между сдвигами и линейными показателями скоростей деформаций и деформаций. С учетом уравнений несжимаемости имеем:

$$\gamma'_{xy} = 2 \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \xi_x = 2 \cdot \xi_x \cdot \operatorname{tg} B_1 \Phi, \quad \gamma_{xy} = 2 \cdot \frac{1}{F_2} \cdot \varepsilon_x = 2 \cdot \varepsilon_x \cdot \operatorname{tg} B_2 \Phi$$

С целью упрощений имеем:

$$\xi_x = C_\xi \cdot \exp \theta_1'' \cdot \operatorname{Cos} B_1 \Phi; \quad \varepsilon_x = C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' \cdot \operatorname{Cos} B_2 \Phi.$$

Подставляя последние соотношения в уравнения неразрывности скоростей деформаций и деформаций (1) или (4) получаем:

$$\begin{aligned} & \left[-\theta_{1xx}'' - (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_y)'' + \theta_{1yy}'' + (\theta_{1y}'' - B_1 \Phi_x)'' \right] \cdot \operatorname{Sin} B_1 \Phi + \\ & + \left[2 \cdot (B_1 \Phi_x - \theta_{1y}'') \cdot (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_y) + (B_1 \Phi_{xx} - B_1 \Phi_{yy}) \right] \cdot \operatorname{Cos} B_1 \Phi = \quad (6) \\ & = 2 \cdot B_1 \Phi_{xy} \cdot \operatorname{Sin} B_1 \Phi + 2 \cdot \theta_{1xy}'' \cdot \operatorname{Cos} B_1 \Phi, \end{aligned}$$

также

$$\begin{aligned} & \left[-\theta_{2xx}'' - (\theta_{2x}'' + B_2 \Phi_y)'' + \theta_{2yy}'' + (\theta_{2y}'' - B_2 \Phi_x)'' \right] \cdot \operatorname{Sin} B_2 \Phi + \\ & + \left[2 \cdot (B_2 \Phi_x - \theta_{2y}'') \cdot (\theta_{2x}'' + B_2 \Phi_y) + (B_2 \Phi_{xx} - B_2 \Phi_{yy}) \right] \cdot \operatorname{Cos} B_2 \Phi = \quad (7) \\ & = 2 \cdot B_2 \Phi_{xy} \cdot \operatorname{Sin} B_2 \Phi + 2 \cdot \theta_{2xy}'' \cdot \operatorname{Cos} B_2 \Phi. \end{aligned}$$

В уравнениях (6) и (7), появляются аналогичные скобки, как и в (5). При условии

$$(\theta_1'')_x = -B_1 \Phi_y, \quad (\theta_1'')_y = -B_1 \Phi_x, \quad (\theta_2'')_x = -B_2 \Phi_y, \quad (\theta_2'')_y = B_2 \Phi_x,$$

уравнения превращаются в тождества, где $\theta_1'' = -B_1 \theta$, $\theta_2'' = -B_2 \theta$ - показатели экспонент функций, определяющих поля скоростей деформаций и деформаций; $B_1 \Phi$ и $B_2 \Phi$ - аргументы тригонометрических функций, определяющие поля скоростей деформаций и деформаций.

Выражения для скоростей деформаций и деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned}\xi_x = -\xi_y &= C_\xi \cdot \exp \theta_1'' \cdot \text{Cos} B_1 \Phi = C_\xi \cdot \exp(-B_1 \theta) \cdot \text{Cos} B_1 \Phi, \\ \gamma_{xy}' &= C_\xi \cdot \exp \theta_1'' \cdot \text{Sin} B_1 \Phi = C_\xi \cdot \exp(-B_1 \theta) \cdot \text{Sin} B_1 \Phi, \quad (8)\end{aligned}$$

$$H_i = 2 \cdot C_\xi \cdot \exp \theta_1'' = 2 \cdot C_\xi \cdot \exp(-B_1 \theta)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = -\varepsilon_y &= C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' \cdot \text{Cos} B_2 \Phi = C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2 \theta) \cdot \text{Cos} B_2 \Phi, \\ \gamma_{xy} &= C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' \cdot \text{Sin} B_2 \Phi = C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2 \theta) \cdot \text{Sin} B_2 \Phi, \quad (9)\end{aligned}$$

$$\Gamma_i = 2 \cdot C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' = 2 \cdot C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2 \theta)$$

$$\text{при } (\theta_1'')_y = B_1 \Phi_x, (\theta_1'')_x = -B_1 \Phi_y, (\theta_2'')_y = B_2 \Phi_x, (\theta_2'')_x = -B_2 \Phi_y.$$

Сопоставляя формулы (8), (9) и (6), убеждаемся, что во всех выражениях присутствуют функциональные зависимости от координат θ и Φ (показатели экспонент, и аргументы тригонометрических функций).

Для завершения рассмотрим температурную задачу, решение которой также может определяться указанными выше зависимостями. Аналогичные условия были наложены на функции при решении задачи теории пластичности (6)...(9). Рассмотрим дифференциальное уравнение для стационарного температурного поля:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

В этом случае решение ищем в виде:

$$\begin{aligned}T &= C_T \cdot \exp(\theta_3'') \cdot (\text{Sin} B_3 \Phi + \text{Cos} B_3 \Phi), \quad (10) \\ \text{при } (\theta_3'')_x &= -B_3 \Phi_y, \quad (\theta_3'')_y = B_3 \Phi_x.\end{aligned}$$

Покажем, что выражение (10) является решением уравнения Лапласа. Подставив производные от (10) в уравнение теплопроводности, после упрощений, получим:

$$\begin{aligned}& \{(\theta_3'')_{xx} + [(\theta_3'')_x + B_3 \Phi_y] \cdot [(\theta_3'')_x - B_3 \Phi_y] + (\theta_3'')_{yy} + [(\theta_3'')_y + B_3 \Phi_x] \cdot \\ & \cdot [(\theta_3'')_y - B_3 \Phi_x]\} \cdot (\text{Sin} B_3 \Phi + \text{Cos} B_3 \Phi) + [2 \cdot (\theta_3'')_x \cdot B_3 \Phi_x + B_3 \Phi_{xx} + 2 \cdot \\ & \cdot (\theta_3'')_y \cdot B_3 \Phi_y + B_3 \Phi_{yy}] \cdot (\text{Cos} B_3 \Phi - \text{Sin} B_3 \Phi) = 0. \quad (11)\end{aligned}$$

Можно показать, что

$$(\theta_3'')_{xx} = -B_3 \Phi_{yx}, (\theta_3'')_{yy} = B_3 \Phi_{xy}, B_3 \Phi_{xx} = (\theta_3'')_{yx}, B_3 \Phi_{yy} = (\theta_3'')_{xy}.$$

Последние соотношения соответствуют условию Коши-Римана. Они являются теми функциями, которые определяются уравнением Лапласа, что и соответствует (10).

Сопоставляя решения (6)...(10) (условия, накладываемые на функции) приходим к выводу, что $\theta_3'' = -B_3\theta$. Это позволяет деформационные параметры и температуру математически выразить друг через друга. Таким образом,

$$\exp(-\theta) = \left(\frac{H_i}{2 \cdot C_\xi}\right)^{\frac{1}{B_1}} = \left(\frac{\Gamma_i}{2 \cdot C_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{B_2}} = \left(\frac{T}{C_T \cdot (\sin B_3 \Phi + \cos B_3 \Phi)}\right)^{\frac{1}{B_3}}.$$

Подставляя в выражение для сопротивления деформации $k = T_i$, получим:

$$k = \frac{C_\sigma}{\left(\frac{1}{2 \cdot C_\xi}\right)^{\frac{A_1'}{B_1}} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot C_\varepsilon}\right)^{\frac{A_2'}{B_2}} \cdot \left[\frac{1}{C_T \cdot (\sin B_3 \Phi + \cos B_3 \Phi)}\right]^{\frac{A_3'}{B_3}}} \cdot (H_i)^{\frac{A_1'}{B_1}} (\Gamma_i)^{\frac{A_2'}{B_2}} (T'')^{\frac{A_3'}{B_3}} \text{ и}$$

ли

$$T_i = \chi \cdot (H_i)^{\frac{A_1'}{B_1}} \cdot (\Gamma_i)^{\frac{A_2'}{B_2}} \cdot (T'')^{\frac{A_3'}{B_3}}. \quad (12)$$

Что соответствует выражению аналогичное (2). Зависимость (12) по своей форме соответствует определению напряжения текучести от скорости, степени деформации и температуры, представленной в работах [6], [12], [13]. Если задачу привести к более простой математической модели ($A_2' = A_3' = 0$), то выражения (6) соответствует решениям [7]:

$$\begin{aligned} \kappa &= C_\sigma \cdot \exp(-A_1' \theta), \quad \tau_{xy} = C_\sigma \cdot \exp(-A_1' \theta) \cdot \sin(A\Phi), \\ \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp(-A_1' \theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp(-A_1' \theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(x) + C, \end{aligned} \quad (13)$$

Для анализа полученного результата использовали выражения (13) для анализа напряженного состояния пластической среды при плоской осадке на шероховатых плитах.

Из условия пластичности $\sigma_0 = -2 \cdot k \cdot \text{Cos}A\Phi$, $C = k_0$. Функции $A\Phi$ и θ гармонические. Из уравнения Лапласа, имеем $A\Phi = AA_6 \cdot x \cdot y - AA_{13} \cdot x \cdot y \cdot (x^2 - y^2)$,

$$\theta' = -\left\{0.5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2) - AA_{13} \cdot [0.25 \cdot (x^4 + y^4) - 1.5 \cdot x^2 \cdot y^2]\right\}.$$

Из граничных условий

$$AA_6 = 4 \cdot \frac{\psi_0}{l \cdot h}, \quad AA_{13} = 16 \cdot \psi_1 \cdot \frac{l - 2 \cdot h}{l^3 \cdot h \cdot (l + h)},$$

$$\psi_0 = \arctg[2 \cdot f \cdot (1 - f)], \quad \psi_1 = \arctg[2.2 \cdot f \cdot (1 - f)],$$

где l и h - длина, и высота очага деформации при осадке полосы;
 f - коэффициент трения;

k_0 - сопротивление сдвигу в начале очага деформации на контакте. При этом

$$C_\sigma = \frac{k_0}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \exp(-\theta'_0), \quad A\Phi_0 = AA_6 \cdot \frac{l \cdot h}{4} - AA_{13} \cdot \frac{l \cdot h}{4} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4}\right),$$

$$\theta'_0 = -A\theta_0 = -\left\{0.5 \cdot AA_6 \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4}\right) - AA_{13} \cdot \left[0.25 \cdot \left(\frac{l^4}{16} + \frac{h^4}{16}\right) - 1.5 \cdot \frac{l^2 \cdot h^2}{16}\right]\right\}.$$

Компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_x = -k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0, \quad \sigma_y = -3 \cdot k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0,$$

$$\tau_{xy} = k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\text{Cos}A\Phi_0} \cdot \text{Sin}A\Phi. \quad (14)$$

Результаты расчета по формулам (14) приведены на рис 1...4. Показано, что распределение контактных напряжений реагирует на фактор формы очага деформации $\frac{l}{h}$ и коэффициент трения. Относительные нормальные напряжения $\sigma_y/2k_0$, относительные касательные напряжения τ_{xy}/k_0 . Результаты расчетов совпадают с реальными эпюрами контактных напряжений [14]..[16]. Следует подчеркнуть, что выражения (14) едины для всего очага деформации и нет необходимости разбивать его на отдельные зоны контактного трения [17], [18].

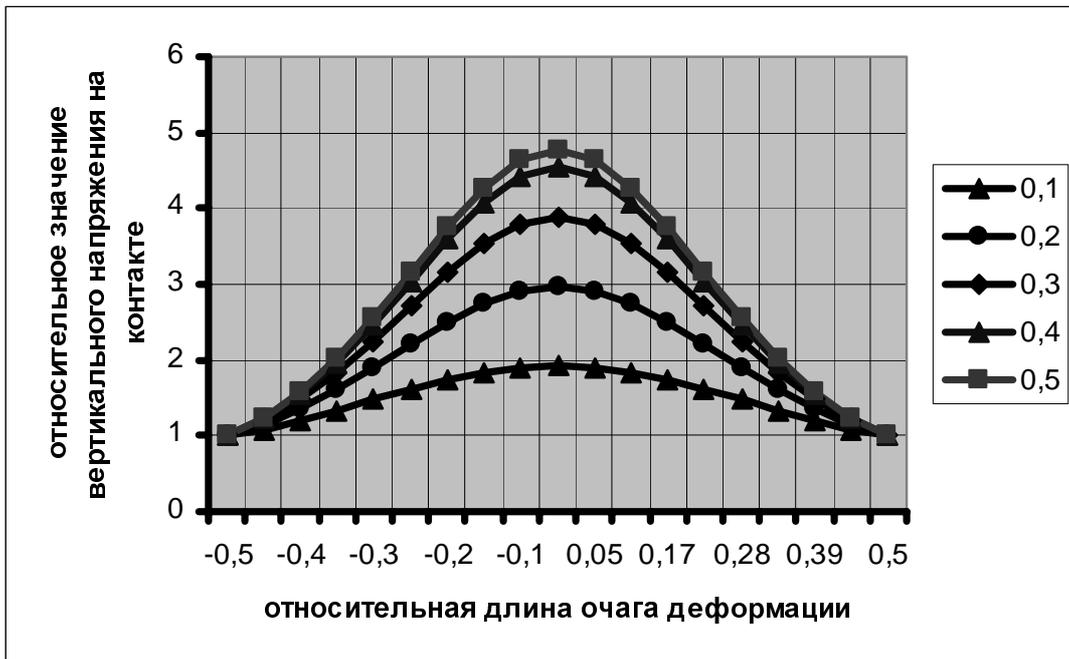


Рисунок 1 – Распределение нормальных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках $\frac{l}{h} = 8$, $f = 0,1 \dots 0,5$.

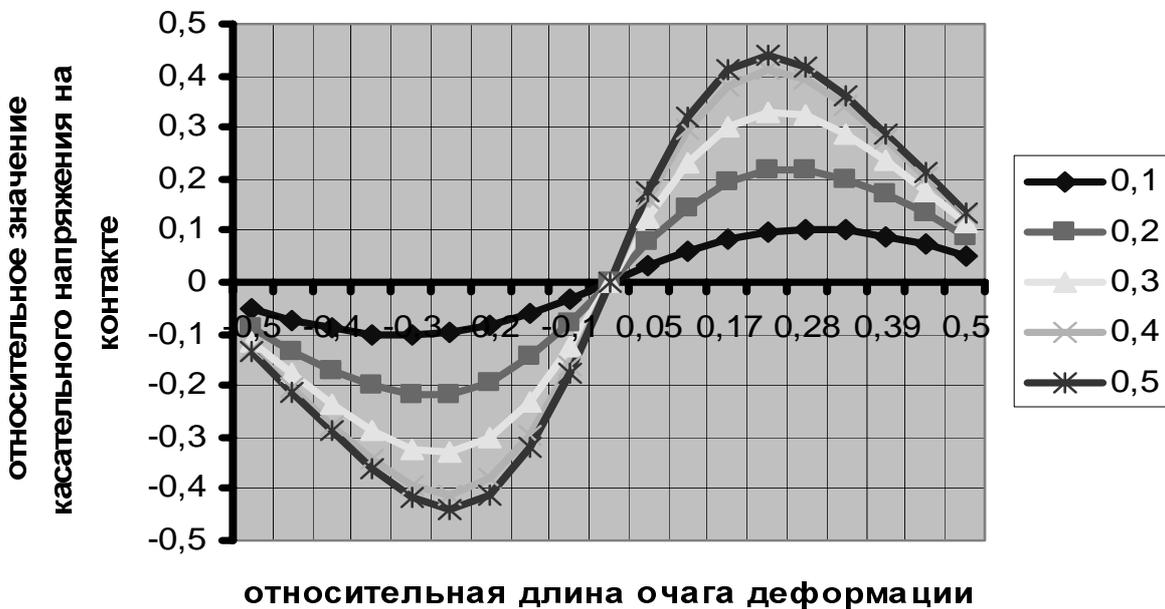


Рисунок 2 – Распределение касательных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках $\frac{l}{h} = 8$, $f = 0,1 \dots 0,5$

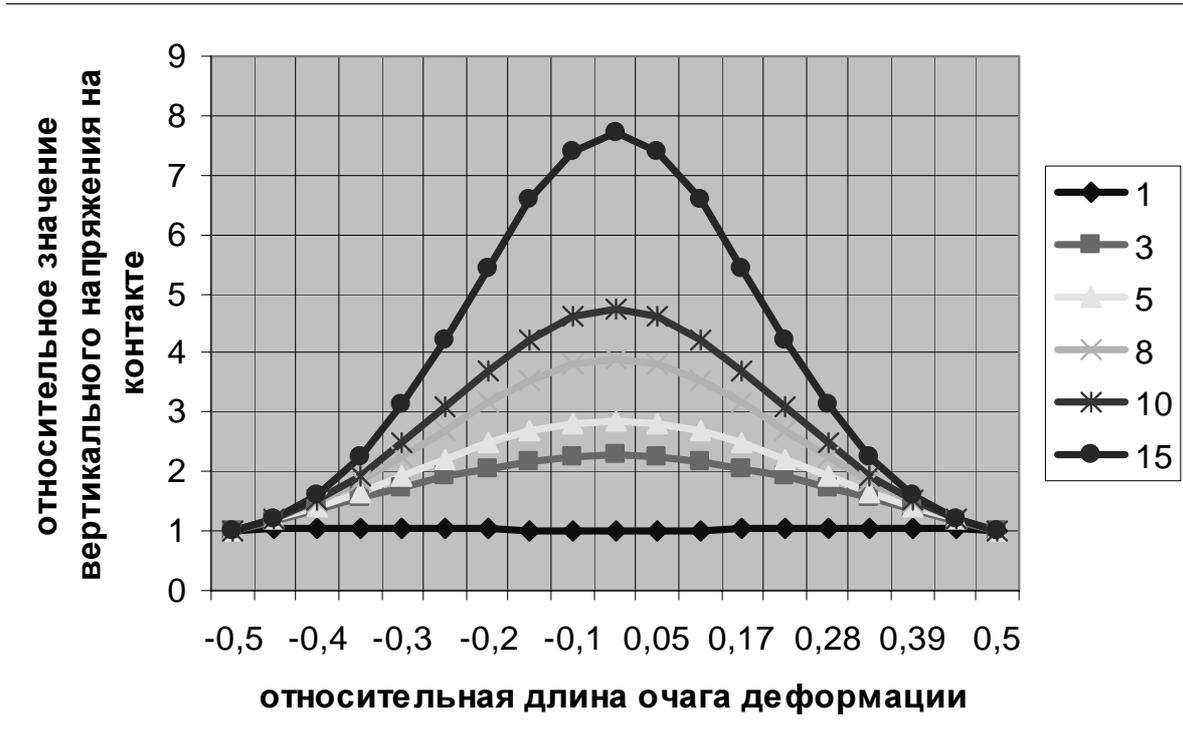


Рисунок 3 – Распределение нормальных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках, $f = 0,3$, $\frac{l}{h} = 1...15$

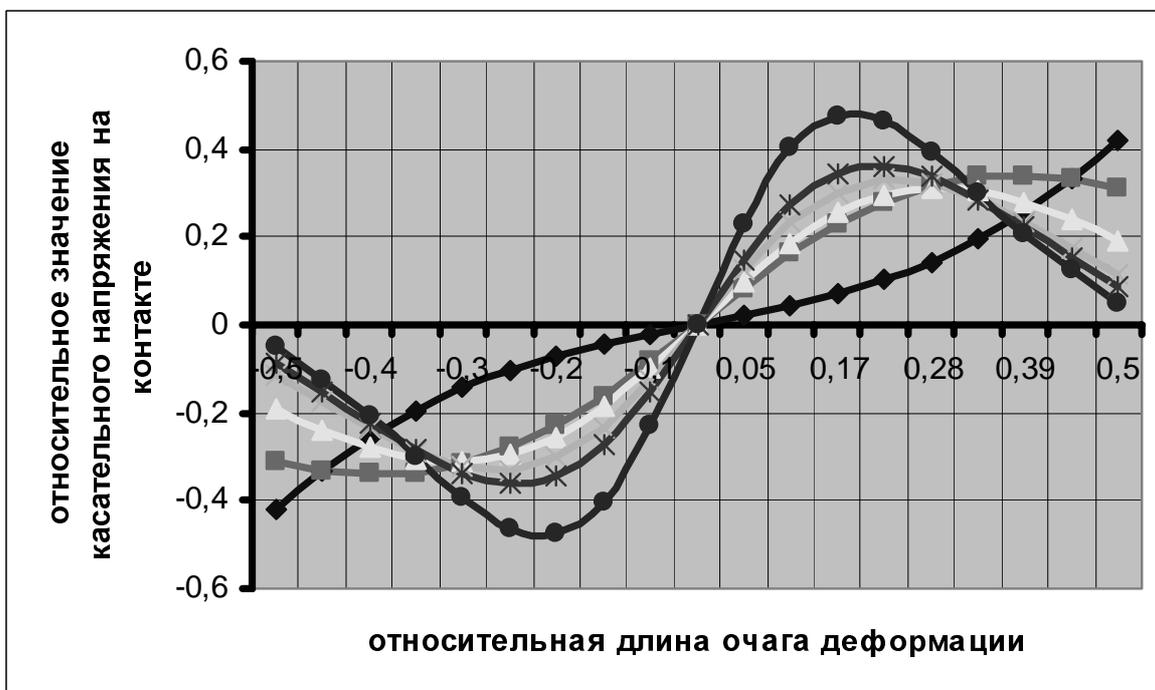


Рисунок 4 – Распределение касательных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках, $f = 0,3$, $\frac{l}{h} = 1...15$

Таким образом, представлен новый аналитический метод и его возможности для решения задачи теории пластичности, определяющий теоретическую зависимость между обобщенными показателями напряжений, деформаций (скоростей деформаций) и температуры. Очевидно, можно утверждать о решении задачи в рамках обобщенной теории пластичности, позволяющий выйти на сложную модель пластической среды.

В дальнейшем появляется возможность учета степени, скорости и температуры на сопротивление сдвигу, согласно выражению (12), по всему очагу деформации.

Литература

1. Чигиринский В.В. *Определение напряженного состояния пластического тела в условиях плоской деформации // Изв.вузов. Черная металлургия.-1990.-№7.- С.48-49.*
2. Чигиринский В.В. *Определение деформированного состояния пластического тела в условиях плоского течения // Изв.вузов. Черная металлургия.-1990.-№9.-С.32-33.*
3. Чигиринский В.В. *Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессам ОМД// Тр.науч.-техн. конф. «Теория и технология процессов пластической деформации-96».- М.: МИСиС, 1997.- С.568-572.*
4. Чигиринский В.В. *Исследование напряженно-деформированного состояния металла с учетом пространственных параметров очага деформации // Теория и практика металлургии. – 1997.- № 4.- С.39-40.*
5. Чигиринский В.В. *Исследование влияния пространственных параметров деформированного объема на сопротивление пластической деформации сдвига// Теория и практика металлургии.-1997.- № 3.-С.31-32.*
6. V.V. Chygyryns'kyu, I. Mamuzic, G.V. Bergeman *Analysis of the State of Stress of a Medium under Conditions of Inhomogeneous Plastic Flow// Metallurgija. Zagreb.- 2004.-vol.43, br.2.-P.87-93.*
7. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. *Теория пластичности. – М.: Металлургия, 1987.- 251 с.*
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.-М.: Наука,1977.-735 с.*
9. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности.-М.: Наука,1969,-419 с.*
10. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести.-М.: Машиностроение, 1975.-399 с.*
11. Чигиринский В.В., Левченко В.Н. *Некоторые особенности замкнутого решения для плоской задачи теории пластичности // Наукові вісті. Сучасні проблеми металургії „Пластична деформація металів”. ВАТ „Синельниківська Теплоізоляція”. - 2005.- С. 138-143.*

12. Чигиринский В.В., Бергеман Г.В. Теоретическое прогнозирование модели пластической среды в условиях сложного напряженного состояния // Технологические системы «Научные разработки и результаты исследований». 2002.-№ 2(13).- С. 44-47.

13. Андреюк Л.В., Тюленев Г.П. // Сталь.-1972.-9.-С. 825...828.

14. Чекмарев А.П., Клименко П.Л. Экспериментальное исследование удельных давлений на контактной поверхности при прокатке в калибрах // Обработка металлов давлением: Сб.тр. Днепропетровского металлургического ин-та.- Харьков, М., 1960.- Вып. 39

15. Чекмарев А.П., Каптуров Л.Е., Клименко П.Л. Экспериментальное исследование распределения удельных давлений при прокатке в гладких валках // Обработка металлов давлением: Сб.тр. Днепропетровского металлургического ин-та.- Харьков, М., 1960.- Вып. 39

16. Чекмарев А.П., Нефедов А.А., Николаев В.А. Теория продольной прокатки.- Харьков.: Изд. Харьковского Государственного Университета, 1965.

17. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением.- М.: Машиностроение, 1977. - 422 с.

18. Громов Н.П. Теория обработки металлов давлением.- М.: Металлургия, 1978.- 359 с.

© Чигиринский В.В. 2008