УДК 528.94

С.Г. РАДОВ, д-р техн.наук, доц., О.А. КОСОГОВА, ас. (Луганський національний аграрний університет)

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩ ДІЛЯНОК ЗЕМНОЇ КУЛІ ПО ПЛОСКИМ ПРЯМОКУТНИМ КООРДИНАТАМ В ПРОЕКЦІЇ ГАУССА

Розглянуто питання врахування спотворень площ ділянок поверхні сфери по плоским прямокутним координатам в проекції Гаусса.

Постановка проблеми

Однією з основних геодезичних задач в землеустрої є визначення площ окремих земельних ділянок. Завжди важливим також було забезпечення необхідної точності обчислення площ значних територій – населених пунктів, районів, областей тощо.

Традиційна методика визначення площі ділянки пов’язана з її проектуванням на площину, при якому виникають спотворення, що залежать від обраної проекції та системи координат, положення та розміру ділянки, відхилення проекцій геодезичних ліній від сторін ділянки на площині та інших факторів. Тому обчислена площа земельної ділянки може суттєво відрізнятися від фактичної. Особливо це стосується площ великих територій, коли неможливо досягнути необхідної точності без врахування цих спотворень.

Вивчення спотворень площ земельних ділянок особливо актуально в цей час в зв’язку з проведенням земельної реформи.

Мета статті та постановка завдання досліджень

Характер спотворень площ поверхні сфери та еліпсоїда в проекції Гаусса на площину виражається аналогічними вихідними залежностями, але для еліпсоїда кінцеві алгоритми суттєво ускладнюються і, як правило, не мають точного рішення. З огляду на це вважається доцільним одержати характеристики спотворення сферичних ділянок в системі координат Гаусса-Крюгера, які в подальшому можуть бути використані для обчислення площ ділянок поверхні земного еліпсоїду.

Метою цієї статті є розробка теоретичних та практичних основ визначення площ ділянок поверхні сфери по плоским прямокутним координатам їх вершин в проекції Гаусса.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Протягом останніх років опубліковано ряд робіт, що стосуються обчислення площ великих територій [1], врахування спотворення площ ділянок земної поверхні при їх проектуванні на площину [2], [5, с. 339.], точності визначення площ земельних ділянок в залежності від обраної картографічної проекції [7].

Найбільш повне дослідження спотворення площ ділянок поверхні еліпсоїду при їх проектуванні на площину наведене в роботі [1], в якій розглянуті методи обчислення площ по геодезичним та по плоским прямокутним координатам точок. Показано, що при відстані між суміжними точками більше 5-10 км необхідно обчислювати координати проміжних точок геодезичних ліній через 0,01”-2” (30 см – 60 м), що потребує великого обсягу обчислень навіть для незначних територій. Найефективнішими методами в роботі [1] визнані числове інтегрування за точним контуром по геодезичним координатам та дискретне обчислення площ у прямокутній системі координат рівновеликої картографічної проекції.

В геодезичних та землевпорядних роботах обов'язковим є використання системи координат Гаусса-Крюгера [6], але спотворення площ в проекції Гаусса не враховується нормативно-правовою базою для геодезичного та землевпорядного виробництва.

Незважаючи на те, що ця система координат використовується понад 100 років в багатьох країнах світу, до цього часу не запропоновані методики для надійного врахування спотворень площ і визначення їх з достатньою точністю. Це пов'язано з використанням наближених формул спотворення площ та з обчисленням площ без врахування кривизни зображення геодезичних ліній на площині в проекції Гаусса. [2], [5, с. 339.]. При цьому залишкове значення спотворення площ значно більше граничних похибок, які можуть бути досягнуті по результатах геодезичних вимірів.

Виклад основного матеріалу

Положення точок на поверхні сфери однозначно визначається географічними координатами: широтою φ та довготою λ (рис. 1).

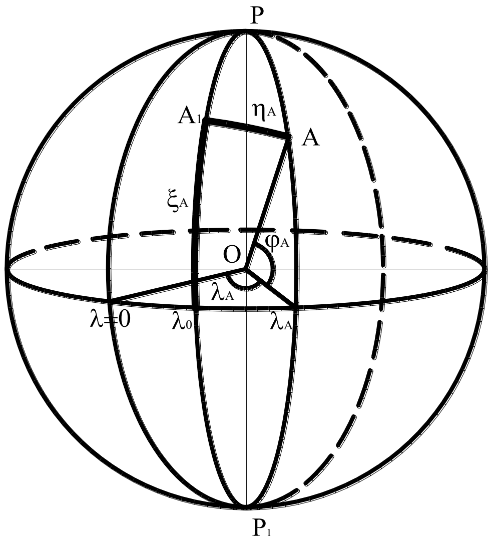

Рис. 1. Системи географічних та сферичних прямокутних координат

Введемо систему сферичних прямокутних координат ξ та η, в якій положення точки визначається дугами великих кругів відносно екватору та осьового меридіану з довготою λ_0 (рис. 1). Встановимо, що в лінійній мірі ці координати позначаються як X та Y та обчислюються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} X &= R\cdot\xi \\ Y &= R\cdot\eta \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де R – радіус сфери; ξ та η – сферичні прямокутні координати, що виражені в радіанах.

Сферичні прямокутні координати точки A відносно екватору (ξ_A) та осьового меридіану (η_A) можуть визначатись із сферичного трикутника APK за формулами (рис. 1) [10, с. 217]

$$\left.\begin{aligned} tg\xi_A &= \frac{tg\varphi_A}{cos\,\Delta\lambda_A} \\ sin\,\eta_A &= cos\,\varphi_A \cdot sin\,\Delta\lambda_A \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

де φ_A – географічна широта даної точки; $\Delta\lambda_A = \lambda_A - \lambda_0$ - різниця географічних довгот даної точки (λ_A) та осьового меридіану (λ_0).

Для контролю сферичні абсцису (ξ_A) та ординату (η_A) точки можна обчислити за формулами

$$\left.\begin{aligned} cos\,\xi_A &= tg\eta_A \cdot ctg\Delta\lambda_A \\ tg\eta_A &= cos\,\xi_A tg\Delta\lambda_A \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

При проектуванні точок на площину в проекції Гаусса маємо таку залежність між плоскими прямокутними координатами Гаусса-Крюгера (x, y) та сферичними прямокутними координатами (X, Y) [4, с. 102]:

$$x = X; \qquad y = \int_0^Y m_y\, dy, \tag{4}$$

де $m_y = sec\,\eta = sec\frac{Y}{R}$ - масштаб проекції даної точки.

Враховуючи, що

$$\int sec\, y\, dy = ln\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) + const, \tag{5}$$

одержимо формулу для визначення ординати точок на площині

$$y = \int_0^Y sec\frac{Y}{R}\, dy = R \cdot ln\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{Y}{2R}\right). \tag{6}$$

Таким чином, точні формули для обчислення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера (***x***, ***y***) по сферичним прямокутним координатах (ξ , η) мають вигляд:

$$x = R \cdot \xi; \qquad y = R\int_0^\eta sec\,\eta\, d\eta = R \cdot ln\, tg\left(45^0 + \frac{\eta}{2}\right). \tag{7}$$

Крім того, наведемо наближені формули обчислення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера (***x***, ***y***) по географічним координатам ($\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\lambda}$):

$$x = R\,[\,\varphi + \frac{1}{2} l^2 \cos\varphi \sin\varphi + \frac{1}{24} l^4 \cos^3\varphi \sin\varphi (5 - tg^2\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{720} l^6 \cos^5\varphi \sin\varphi (61 - 58 tg^2\varphi + tg^4\varphi) + \qquad (7а)$$
$$+ \frac{1}{40320} l^8 \cos^7\varphi \sin\varphi (1385 - 3111 tg^2\varphi + 543 tg^4\varphi - tg^6\varphi)];$$

$$y = R[\,l \cos\varphi + \frac{1}{6} l^3 \cos^3\varphi (1 - tg^2\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{120} l^5 \cos^5\varphi (5 - 18 tg^2\varphi + tg^4\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{5040} l^7 \cos^7\varphi (61 - 479 tg^2\varphi + 179 tg^4\varphi - tg^6\varphi) + \qquad (7б)$$
$$+ \frac{1}{362880} l^9 \cos^9\varphi (1385 - 19028 tg^2\varphi + 18270 tg^4\varphi -$$
$$- 1636 tg^6\varphi + tg^8\varphi)],$$

де φ , λ – географічні координати, що виражені в радіанній мірі.

Ці формули можуть бути виведені по похідним ізометричної широти [10, с. 189]

$$q_c = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln tg\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \qquad (8)$$

для конформного зображення поверхні сфери на площину [4, с. 108] або одержані з формул обчислення плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера точок земного еліпсоїду при ексцентриситеті $e = 0$.

На площині площа ділянки поверхні обчислюється за формулами [наприклад, 3, с. 125]

$$P = \frac{1}{2} \sum_1^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_1^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}), \qquad (8)$$

де x_i, y_i – (i=1,2,…..,n) – плоскі прямокутні координати Гаусса-Крюгера вершин ділянки, порядок яких зростає за ходом годинникової стрілки.

Вважаючи кожний добуток $y_i(x_{i-1} - x_{i+1})$ за площу P_i елементарної ділянки на площині, врахуємо масштаб спотворення площі в проекції Гаусса M_{Pi} та обчислимо її площу на поверхні сфери за формулою

$$P_{i\,сф.} = \frac{y_i}{M_{P_i}} (x_{i-1} - x_{i+1}). \qquad (9)$$

Як відомо, в проекції Гаусса масштаб зображення площі в даній точці можна виразити формулою

$$m_P = m_x \cdot m_y = sec^2 \frac{Y}{R} = sec^2 \eta. \qquad (9)$$

Тому інтегральне значення масштабу зображення площі ділянки поверхні сфери при її проектуванні на площину в проекції Гаусса обчислюється за формулою

$$M_P = \int_0^Y m_P dY = \int_0^Y sec^2 \frac{Y}{R} dY = \int_0^\eta sec^2 \eta \, d\eta = \frac{tg\eta}{\eta}, \qquad (10)$$

де $\eta = \frac{Y}{R}$ - сферична ордината ***i*** точки в формулі (9).

Для елементарних площ $x_i(y_{i+1} - y_{i-1})$ на поверхні сфери маємо

$$P_{i\,сф.} = x_i \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{M'_{P_i}}. \qquad (11)$$

де M'_{Pi} – масштаб зображення площ на площині в проекції Гаусса, який в цьому випадку обчислюється за формулою

$$M'_{Pi} = \frac{tg\eta_{i+1} - tg\eta_{i-1}}{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}. \qquad (12)$$

Таким чином, площа всієї ділянки на поверхні сфери з урахуванням масштабу спотворення площ в проекції Гаусса обчислюється по плоским прямокутним координатах Гаусса-Крюгера за формулами [12]:

$$P_{сф.} = \sum_1^n P_{i\,сф.} = \frac{1}{2}\sum_1^n \frac{y_i(x_{i-1} - x_{i+1})}{M_{Pi}} = \frac{1}{2}\sum_1^n \frac{x_i(y_{i+1} - y_{i-1})}{M'_{Pi}}. \qquad (13)$$

Розглянемо, наприклад, обчислення площі сферичного трикутника ABC з географічними координатами вершин {$\varphi_A=20^0$, $\lambda_A=4^0$; $\varphi_B=30^0$, $\lambda_B=5^0$; $\varphi_C=10^0$, $\lambda_C=6^0$}, який розташований в першій координатній зоні з довготою осьового меридіану $\lambda_0=3^0$

Точне значення площі сферичного трикутника визначається за формулою:

$$P_{сф.} = \varepsilon R^2, \qquad (14)$$

де ε_1 - сферичний надлишок трикутника; ***R*** – радіус сфери (при розрахунках прийнято, що ***R*** = 6378245,0 м).

Для заданого сферичного трикутника за формулою (14) одержимо площу 17884428,9 га. Площа проекції сферичного трикутника на площину при використанні формул (8) та з урахуванням масштабу спотворення площі (13) дорівнює відповідно

17412012,2 га (похибка складає -2,6 % від фактичної площі цього трикутника) та 17393536,4 га (похибка -2,7 %).

Середня квадратична похибка визначення площі по координатах вершин полігону може бути обчислена за формулою [9, с. 23]

$$m_P = m\sqrt{\frac{1}{8}\sum_i^n D_{i-1,i+1}^2}, \tag{15}$$

де m - середня квадратична похибка положення вершин полігону; n - кількість вершин полігону; $D_{i-1,i+1}$ - довжина ліній між попередньою та наступною вершинами.

Для попереднього приклада довжини ліній $D_{i-1,i+1}$ дорівнюють 1,1; 2,2 та 1,1 тис. км. Тому при $m = 0{,}01$ м середня квадратична похибка визначення площі складає 0,97 га, або 0,0000054 % від фактичної площі сферичного трикутника.

Таким чином, на площині спотворення площ ділянок Земної кулі можуть значно перевищувати граничні похибки. А при значних довжинах сторін вони залежать, головним чином, від відхилення проекцій геодезичних ліній та сторін ділянки на площині. Саме тому в роботі [1] вказано на необхідність обчислювати координати проміжних точок геодезичних ліній.

Обчислення площі ділянки сфери по плоских прямокутних координатах в проекції Гаусса можливо методом числового інтегрування за формулою Сімпсона [8, с. 697]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[\frac{y_0+y_n}{2} + (y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) + 2(y_{0,5}+y_{1,5}+\ldots+y_{n-0,5})\right], \tag{16}$$

$$\Delta_{гр.} = \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}M_4, \tag{17}$$

де M_4 – максимальне значення модуля четвертої похідної $f^{IV}(x)$ в інтервалі (a, b).

Для цього необхідно по кожній стороні ділянки знайти, наприклад, розв'язанням прямої засічки на сфері [11, с. 101], такі проміжні точки проекції геодезичної лінії на площині (табл. 1), для яких

$$\Delta x = \frac{x_к - x_n}{2n}, \tag{18}$$

де $\boldsymbol{x_n}$ та $\boldsymbol{x_к}$ – абсциси початкової та кінцевої точок лінії;2$\boldsymbol{n}$ – кількість проміжних відрізків лінії.

Тоді площа ділянки може бути обчислена за формулою:

$$P = \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \sum \frac{x_{i+1} - x_i}{3n}\left[\frac{y_{i,0} + y_{i,n}}{2} + (y_{i,1} + y_{i,2} + \ldots + y_{i,n-1}) + 2(y_{i,0.5} + y_{i,1.5} + \ldots + y_{i,n-0.5})\right]. \quad (19)$$

Табл. 1. Координати вершин трикутника ABC та проміжних точок вздовж його ліній

Номера точок	X, м	Y, м	Номера точок	X, м	Y, м
A	2226739,771	104611,944	8	2228017,533	264971,598
1	2412503,891	119612,918	9	1856915,213	287324,114
2	2598268,012	134511,794	10	1485812,894	308701,540
3	2784032,132	149295,868	C	1114710,574	329031,764
4	2969796,252	163952,539	11	1300048,773	292160,573
5	3155560,372	178469,322	12	1485386,973	255033,064
B	3341324,493	192833,856	13	1670725,172	217681,659
6	2970222,173	217646,409	14	1856063,372	180139,040
7	2599119,853	241719,488	15	2041401,571	142438,108

Якщо взяти на кожній лінії раніше заданого трикутника по 6 проміжних відрізків, то одержимо результати, які суттєво будуть залежати від способу розрахунку площі (табл. 2).

Збільшення проміжних точок поступово вирівнює результати обчислень з урахуванням спотворень площ в проекції Гаусса, але результати за формулою Сімпсона стабілізуються вже при 14-20 проміжних відрізках довжиною до 100 км. Дискретне обчислення за формулою (8) потребує значно менші відрізки (до 60-100 м), що суттєво збільшує обсяг обчислень (табл. 2).

Табл. 2. Результати розрахунків площі ділянки при $\lambda_0=3^0$

Спосіб розрахунку	Площа, га / похибка, %		
	$2n = 6$	$2n = 1000$	$2n = 10000$
По формулі (8)	17891260,4 +0,038	17904919,8 +0,115	17904920,3 +0,115
По формулі (13)	17870820,3 -0,076	17884422,2 $-3{,}7 \cdot 10^{-5}$	17884422,7 $-3{,}5 \cdot 10^{-5}$
По формулі Сімпсона (19)	17884426,5 $-1{,}3 \cdot 10^{-5}$	17884422,7 $-3{,}5 \cdot 10^{-5}$	17884422,7 $-3{,}5 \cdot 10^{-5}$

Треба визначити, що при виборі осьового меридіану по середині ділянки спотворення зменшуються. В нашому прикладі візьмемо меридіан з довготою 5^0 за осьовий. Одержані результати наведені в табл. 3.

Табл. 3. Результати розрахунків площі ділянки при $\lambda_0=5^0$

Спосіб розрахунку	Площа, га / похибка, %		
	$2n = 6$	$2n = 1000$	$2n = 10000$
По формулі (8)	17881398,5 -0,017	17885278,1 +0,0047	17885278,25 +0,0047
По формулі (13)	17880527,38 -0,022	17884428,74 $-9{,}1 \cdot 10^{-7}$	17884428,88 $-1{,}2 \cdot 10^{-7}$
По формулі Сімпсона (19)	17884429,75 $-4{,}7 \cdot 10^{-6}$	17884428,88 $-1{,}2 \cdot 10^{-7}$	17884428,88 $-1{,}2 \cdot 10^{-7}$

Таким чином, врахування масштабу спотворення площі в проекції Гаусса в декілька разів підвищує точність розрахунків. Але помилка ще лишається досить значною. Це пов'язане з тим, що геодезичні лінії на площині в проекції Гаусса також є кривими лініями, а проекції кінцевих точок з'єднуються на площині прямими. Для зниження помилки обчислення площі ділянки по плоских прямокутним координатах Гаусса-Крюгера її вершин необхідно ще врахувати площі сегментів між проекціями сторін ділянки та прямими, що з'єднують їх кінцеві точки. Найбільш простим та достатньо точним способом числового інтегрування є розрахунки за формулою Сімпсона з урахуванням спотворень площ.

Висновки

Аналіз точності визначення площ ділянок сфери на площину в проекції Гаусса показує, що для ділянок площею до 500 га достатньо врахування масштабу спотворення площ за формулою (13). При площах до 1000 га можна вибрати 1 або 3 проміжні точки та обчислити площу за формулою Сімпсона (19). Для одержання похибки $<2*10^{-5}$ % від площі ділянки до 500000 га потрібно визначати 9-15 проміжних точок при використанні формули Сімпсона. Подальше збільшення кількості проміжних точок майже не змінює значення площі, а відхилення від фактичної площі пояснюється, в основному, остаточним членом числового інтегрування.

Бібліографічний список

1. Барановський В.Д. Про цифрові методи обчислення площ великих територій / В.Д. Барановський, В.М. Трюхан // Вісник геодезії та картографії. – 2005. - № 4. – С. 17-21.
2. Войславский Л.К. Искажение площадей в системе плоских прямоугольных координат Гаусса / Л.К. Войславский // Проблеми розвитку земельних відносин, землеустрою і земельного кадастру в умовах ринкової економіки. – Х.: ХНАУ ім. В.В. Докучаєва. – 2005. – С. 139-142.
3. Геодезія. Ч. І. ;за загальною редакцією професора, д.т.н. Могильного С.Г. і професора, д.т.н. Войтенко С.П.. - Донецьк, 2003. – 458 с.
4. Высшая геодезия / В.Г. Зданович, Н.Г. Келль, К.А. Звонарев [и др.]. – М.: Госгортехиздат, 1961. - 607 с.
5. Инженерная геодезия: учебник для вузов / Е.Б. Клюшин, М.И. Киселев, Д.Ш. Михелев; под ред. Д.Ш. Михелева. - М.: Высшая школа, 2001. – 464 с.
6. Інструкція з топографічного знімання в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500 (ГКНТА-2.04-02-98). – Київ: ГУГКтаК України, 1998. – 97 с.
7. Карпінський Ю.О. Дослідження картографічних проекцій для геопросторових даних для об'єктів земельного кадастру / Ю.О. Карпінський, А.А. Ляшенко, Т.В. Щербина // Вісник геодезії та картографії.– 2003. - № 2. – С. 41-47.
8. Корн Г. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
9. Маслов А.В. Геодезия. Часть Ш. / А.В. Маслов, Г.И. Горохов. - М.: Госгортехиздат, 1959. - 172 с.
10. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1969. - 304 с.
11. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1979. - 296 с.
12. Радов С.Г. К вопросу определения искажения площадей в проекции Гаусса / С.Г. Радов, Е.А. Косогова // Інженерна геодезія: науково-технічний збірник. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 52. – С. 159-163.

Надійшла до редколегії 17.10.2009

С.Г. РАДОВ, О.А. КОСОГОВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ УЧАСТКОВ ЗЕМНОГО ШАРА ПО ПЛОСКИМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА

Рассмотрен вопрос учета искажений площадей участков поверхности сферы по плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса.

S. RADOV, O. KOSOGOVA

DEFINING THE AREA OF THE PARTS OF THE GLOBE BY FLAT RECTANGULAR COORDINATES IN GAUSS PROJECTION

The problem of defining the distortion of an area on the sphere surface by two-dimensional rectangular coordinates in Gauss projection is considered.