ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ И ДОСТОВЕРНОСТИ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПРОКАТКЕ

Белевитин В.А. (*филиал ЮУГУ, г. Кыштым*),
Смирнов Е.Н. (*ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк)*

Изложена усовершенствованная методика математической обработки данных метода координатных сеток. Показано, что для вертикально-продольной плоскости симметрии физических моделей с деформированной сеткой, частная производная f_x функциональной зависимости у = f (х, У) представляет собой тангенс угла наклона α линий тока $У_i$. Изменение угла наклона α линий тока $У_i$ = const позволяет непосредственно из эксперимента получать значения частной производной f_x без дифференцирования и, тем самым, повысить точность расчета статических и кинематических параметров пластического формоизменения деформируемого металла.

Определение кинематических и статических параметров пластического формоизменения, а именно характеристик напряженно-деформированного состояния, сдерживается недостаточным развитием способов получения, интерпретации и обработки исходной экспериментальной информации в рамках используемых методов экспериментальной механики, особенно с позиции достигаемой точности и достоверности.

Как было показано в работах [1, 2], одним из способов повышения точности и достоверности результирующей информации о параметрах пластического формоизменения является получение и интерпретация данных метода координатных сеток, а именно, функциональных зависимостей Эйлеровых координат x и y узлов первоначально прямоугольной координатной сетки в смешанном Эйлерово-Лагранжевом представлении. При этом, появляется возможность решения не только пространственных задач, но и их частных случаев – двухмерных, в плоскостях симметрии, на боковой грани.

С учетом вышеизложенного целью настоящей работы является дальнейшее развитие существующих способов получения и обработки исходных экспериментальных данных, полученных с помощью метода координатных сеток, обеспечивающих повышение точности расчета кинематических и статических параметров пластического формоизменения деформируемого металла.

Для вертикально-продольной плоскости симметрии после получения недоката с деформированной координатной сеткой (рисунок 1) получаем посредством её измерения две экспериментальные функции:

$$y = f\,(x,\ У); \tag{1 а}$$

$$x = \varphi(X, y), \tag{1 б}$$

где x и y – конечные (Эйлеровы), а X и Y – начальные (Лагранжевы) координаты произвольного i -того узла координатной сетки.

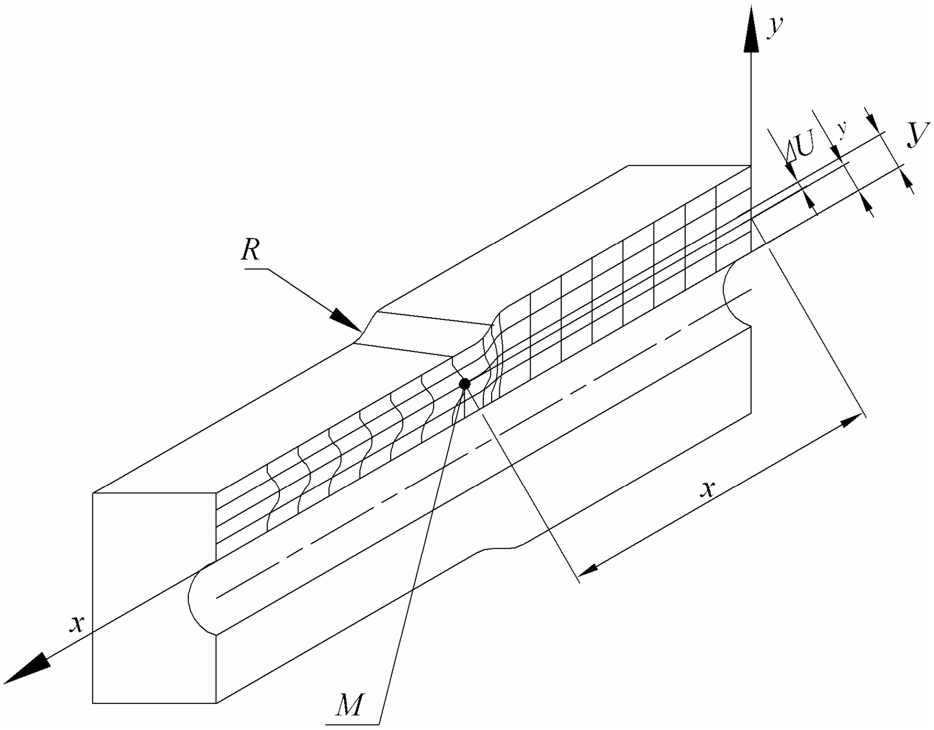

Рисунок 1 – Схема определения функциональных зависимостей $y = f\,(x,\ У)$ и $x = \varphi(X, y)$

Дифференцирование функциональных зависимостей в смешанном Эйлерово-Лагранжевом представлении по x и y:

$$\partial y/\partial x=0=(\partial f/\partial x)(\partial x/\partial x) + (\partial f/\partial У)(\partial У/\partial x), \tag{2 а}$$

$$\partial y/\partial y=1=(\partial f/\partial x)(\partial x/\partial y) + (\partial f/\partial У)(\partial У/\partial y), \tag{2 б}$$

$$\partial x/\partial x=1=(\partial \varphi/\partial X)(\partial X/\partial x) + (\partial \varphi/\partial y)(\partial y/\partial x), \tag{2 в}$$

$$\partial x/\partial y=0=(\partial \varphi/\partial X)(\partial x/\partial y) + (\partial \varphi/\partial y)(\partial y/\partial y), \tag{2 г}$$

позволяет из (2 *а*) и (2 *б*) вычислить значения частных производных начальных (Лагранжевых) координат $\partial У/\partial x = У_x = -(\partial f/\partial x)/(\partial f/\partial У) = -f_x/f_У$, $\partial У/\partial y=У_y=1/f_У$, а из (2 *в*) и (2 *г*) – значения частных производных начальных координат $\partial X/\partial x = X_x = 1/\varphi_X$, $\partial X/\partial y = X_y = \varphi_y/\varphi_X$. При этом можно заметить, что для рассматриваемого случая $У_x = -\,У_y\, f_x$, а $X_y = \varphi_y\, X_x$.

Для несжимаемой среды в условиях плоской деформации, реализуемой в вертикально-продольной плоскости симметрии недоката, компоненты вектора скорости течения металла V_x, V_y, V_z соответственно в направлении прокатки x, обжатия валков y и уширения z могут быть вычислены из уравнений:

$$V_x = V_o\, У_y = V_o/f_У\,; \tag{3 а}$$

$$V_y = -\,V_o\, У_x = V_o\, f_x/f_У = V_x\, f_x\,; \tag{3 б}$$

$$V_z = 0 \tag{3 в}$$

через определяемые из эксперимента частные производные $У_y$ и $У_x$, т.е. в эксперименте можно ограничиться измерениями функциональной зависимости (1 *а*), где V_o – начальная скорость заготовки в направлении прокатки за пределами фактического очага деформации.

Дальнейшее развитие предложенного в работе [2] подхода возможно в направлении уточнений расчета кинематических и статических параметров пластического формоизменения деформируемого металла [3] и использования измерений угла наклона α линий тока $У_i$ =const., i = 1, 2, 3, …, n (n – количество фиксированных линий тока в вертикально-продольной плоскости симметрии недоката, на рисунке 1 их четыре), в частности, в виде:

$$\alpha = \Theta\,(x,\, У) \tag{4 а}$$

или

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \Theta\,(x,\, У). \tag{4 б}$$

Поскольку частная производная f_x функциональной зависимости (1 *а*) представляет собой тангенс угла наклона α линий тока $У_i$, i = 1, 2, 3, …, n, то:

$$f_x\,(x,\, У) = \mathrm{tg}\,\alpha\,(x,\, У) = \Theta\,(x,\, У), \tag{5}$$

Измерение угла наклона α линий тока $У_i$ =const., i = 1, 2, 3, …, n и представление их в виде (4 *а*) или (4 *б*) позволяет, непосредственно из эксперимента, получать значения частной производной f_x без дифференцирования, что позволяет повысить точность расчета кинематических и статических параметров пластического формоизменения деформируемого металла, поскольку, по меньшей мере: а) процесс дифференцирования, исключаемый в данном случае, является расходящимся; б) измерение угла наклона α линий тока $У_i$ =const., i = 1, 2, 3, …, n вместо их линейных координат x и у отличается бóльшей точностью.

С учетом выражения (5) необходимая для вычисления частных производных $У_x$ и $У_y$, а, следовательно, компонент вектора скорости течения металла V_x и V_y и других характеристик напряженно-деформированного состояния деформируемого металла, производная $f_У$ может быть вычислена посредством использования сходящегося, в отличие от дифференцирования, процесса интегрирования по x непосредственно определяемого измерениями из эксперимента производной f_x :

$$f_У = f_У^o + \int_{x^o}^{x} \frac{\partial}{\partial У} f_x(x,У)dx = f_У^o + \int_{x^o}^{x} \frac{\partial}{\partial У}(tg\alpha)dx =$$

$$= f_У^o + \int_{x^o}^{x}(tg\alpha)_У\, dx. \qquad (6)$$

Учитывая тот факт, что в начале фактического очага деформации при $x = x^o$ производная $f_У^o = 1$, выражение (6.6) принимает вид:

$$f_У = 1 + \int_{x^o}^{x}(tg\alpha)_У\, dx. \qquad (7)$$

При этом формулы для вычисления частных производных $У_x$ и $У_y$ в смешанной или комбинированной Эйлерово-Лагранжевой системе координат примут вид:

$$У_y = 1/\, f_У = \left[(1 + \int_{x^o}^{x}(tg\alpha)_У\, d\,x\right]^{-1}, \qquad (8\,а)$$

$$У_x = -f_x\, /\, f_У = -\left[(1 + \int_{x^o}^{x}(tg\alpha)_У\, d\,x\right]^{-1} tg\,\alpha. \qquad (8\,б)$$

Подстановка выражений (8 *а*) и (8 *б*) в (3 *а*) и (3 *б*) позволяет получить формулы для вычисления компонент вектора скорости течения металла V_x и V_y:

$$V_x = V_o = \left[1 + \int_{x^o}^{x}(tg\alpha)_У\, d\,x\right]^{-1}, \qquad (9\,а)$$

$$V_y = V_o\left[1 + \int_{x^o}^{x}(tg\alpha)_У\, d\,x\right]^{-1} tg\,\alpha = V_x tg\,\alpha. \qquad (9\,б)$$

Вычисления других характеристик напряженно-деформированного состояния деформируемого металла при использовании такого подхода также отличается повышенной точностью.

Развитие предложенного в работах [5, 6] подхода возможно также в направлении уточнений расчета кинематических и статических параметров пластического формоизменения деформируемого металла посредством дифференцирования выражений (3) для вычисления компонент тензора скоростей деформаций T_ξ не только как функций конечных (Эйлеровых) координат

$$V_x=V_x\,(x,y); \qquad (10\ а)$$
$$V_y=V_y\,(x,y), \qquad (10\ б)$$

но и как сложных функций в комбинированном Эйлерово-Лагранжевом представлении

$$V_x=F\,(x,У); \qquad (11\ а)$$
$$V_y=\Phi\,(x,У), \qquad (11\ б)$$

а также

$$V_x=P\,(X,y); \qquad (12\ а)$$
$$V_y=G\,(X,y). \qquad (12\ б)$$

Такой подход позволяет определить компоненты тензора скоростей деформаций T_ξ:

1) дифференцированием зависимостей (10 *а*) и (10 *б*) в виде:

$$\xi_{xx}=dV_x/dx, \quad \xi_{yy}=dV_y/dy, \quad \xi_{xy}=(\partial V_x/\partial y+\partial V_y/\partial x)/2, \qquad (13)$$

или, с учетом (3 *а*) и (3 *б*):

$$\xi_{xx}=V_oУ_{xy}, \quad \xi_{yy}=-V_oУ_{xy}, \quad \xi_{xy}=V_o\,(У_{yy}+У_{xx})/2; \qquad (14)$$

2) дифференцированием зависимостей (11 *а*) и (11 *б*) в виде:

$$\xi_{xx}=dV_x/dx=(\partial F/\partial x)(\partial x/\partial x)+(\partial F/\partial У)(\partial У/\partial x)=F_x+F_УУ_x=F_x-F_Уf_x/f_У, \qquad (15\ а)$$

$$\xi_{yy}=dV_y/dy=(\partial\Phi/\partial x)(\partial x/\partial y)+(\partial\Phi/\partial У)(\partial У/\partial y)=\Phi_УУ_y=\Phi_У/f_У, \qquad (15\ б)$$

$$\xi_{xy}=(\partial V_x/\partial y+\partial V_y/\partial x)/2=[(\partial F/\partial x)(\partial x/\partial y)+(\partial F/\partial У)(\partial У/\partial y)+$$
$$+(\partial\Phi/\partial x)(\partial x/\partial x)+(\partial\Phi/\partial У)(\partial У/\partial x)]/2=(F_УУ_y+\Phi_x+\Phi_УУ_x)/2=$$
$$=(\Phi_x+F_У/f_У-\Phi_Уf_x/f_У)/2=[\Phi_x+(F_У-\Phi_Уf_x)/f_У)]/2, \qquad (15\ в)$$

так как $\partial x/\partial x=1, \partial x/\partial y=0$, а $\partial У/\partial x=У_x=-f_x/f_У, \partial У/\partial y=У_y=1/f_У$ из (2 *а*) и (2 *б*);

3) дифференцированием зависимостей (12 *а*) и (12 *б*) в виде:

$$\xi_{xx}=dV_x/dx=(\partial P/\partial X)(\partial X/\partial x)+(\partial P/\partial y)(\partial y/\partial x)=P_XX_x=P_X/\varphi_X, \qquad (16\ а)$$

$$\xi_{yy}=dV_y/dy=(\partial G/\partial X)(\partial X/\partial y)+(\partial G/\partial y)(\partial y/\partial y)=G_XX_y+G_y=G_X\varphi_y/\varphi_X+G_y, \qquad (16\ б)$$

$$\xi_{xy}=(\partial V_x/\partial y+\partial V_y/\partial x)/2=[(\partial P/\partial X)(\partial X/\partial y)+(\partial P/\partial y)(\partial y/\partial y)+$$
$$+(\partial G/\partial X)(\partial X/\partial x)+(\partial G/\partial y)(\partial y/\partial x)]/2=(P_XX_y+P_y+G_XX_x)/2=$$
$$=(P_y+P_X\varphi_y/\varphi_X+G_X/\varphi_X)/2=[P_y+(P_X\varphi_y+G_X)/\varphi_X]/2, \qquad (16\ в)$$

так как $\partial y/\partial y=1$, $\partial y/\partial x=0$, а $\partial X/\partial x=X_x=1/\varphi_X$, $\partial X/\partial y=X_y=\varphi_y/\varphi_X$ из (2 *в*) и (2 *г*).

Воспользовавшись условием несжимаемости

$$\mathrm{div}\ V=\xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}=0 \qquad (17)$$

получаем выражения для вычисления компоненты ξ_{zz} тензора скоростей деформаций T_ξ для зависимостей (11 *а*) и (11 *б*):

$$\xi_{zz}=-(\xi_{xx}+\xi_{yy})=F_Y f_x/f_Y-\Phi_Y/f_Y-F_x \qquad (18)$$

и для зависимостей (6 *а*) и (6 *б*):

$$\xi_{zz}=-(\xi_{xx}+\xi_{yy})=-(P_X/\varphi_X+G_X\varphi_y/\varphi_X+G_y). \qquad (19)$$

В дальнейшем, с учетом весовых коэффициентов, назначаемых соответственно величинам накапливаемых ошибок, в результате вычислительных операций, значения компонент тензора скоростей деформации ξ_{xx}, ξ_{yy}, ξ_{zz} и ξ_{xy} могут быть определены как средневзвешенные величины соответствующих выражений (14) – (16) и (18) – (19).

Таким образом, представлены новые подходы к интерпретации и обработки исходной экспериментальной информации в рамках используемых методов экспериментальной механики. Показано, что как получение значений частной производной f_x непосредственно из эксперимента без применения операции дифференцирования, так и вычисление компонент тензора скоростей деформации T_ξ дифференцированием сложных функций в комбинированном Эйлерово-Лагранжевом представлении, позволяет повысить точность расчета статических и кинематических параметров пластического формоизменения деформируемого металла.

Литература

1. *Смирнов-Аляев Г.А., Розенберг В.М. Теория пластических деформаций металлов (механика конечного формоизменения). - М.-Л.: Машгиз, 1956. – 367 с.*

2. *Минаев А.А., Белевитин В.А., Смирнов Е.Н. Расчет параметров пластического формоизменения сортовых заготовок // Известия ВУЗов. Черная металлургия. – 1990. - №12. – С. 26-28.*

3. *Белевитин В.А., Смирнов Е.Н., Слугин Н.Н. К вопросу о расширении возможностей комбинированного Эйлерово-Лагранжевого метода исследования процессов пластической деформации // Ресурсозберігаючі технології виробництва та обробки тиском матеріалів у машинобудуванні: Зб. наук. праць. Луганськ: вид-во СНУ ім.. В.Даля, - 2002. – Т1. – С 64-68.*