

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАССОПЕРЕНОСА В УПРАВЛЯЕМОМ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ С ДВУХЭЛЕКТРОДНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Герасименко Ю.Я., д.т.н., профессор, Герасименко Е.Ю. к.т.н., доцент,
Скакунова Т.П., аспирантка

(Южно-Российский государственный технический университет (НПИ),
г. Новочеркасск, Россия)

Рассмотрена математическая модель управляемого электрохимического сопротивления, построенная на основе исследования в нем физических полей. Предложена методика расчета плотности тока на границе раздела фаз, позволяющая оценить распределение электрохимического осаждения металла и учесть влияние на это управляющего тока.

Управляемое электрохимическое сопротивление (УЭХС) представляет собой устройство (рис. 1), состоящее из диэлектрической емкости, в которую помещен угольный электрод и две медные пластины (управляющие электроды). Здесь I_1 – рабочий ток в основной цепи угольной пластины; I_{21} и I_{22} – токи управления. Под действием токов I_{21} и I_{22} на границах раздела «электрод – электролит» выделяется некоторый слой меди. Толщина этого слоя зависит от искомого распределения плотности тока $\delta(x; t)$ и времени.

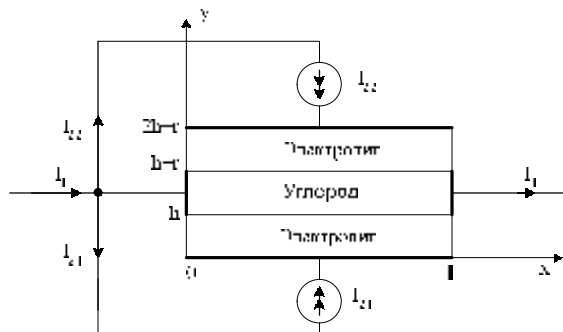


Рисунок 1 – Устройство и схема включения УЭХС

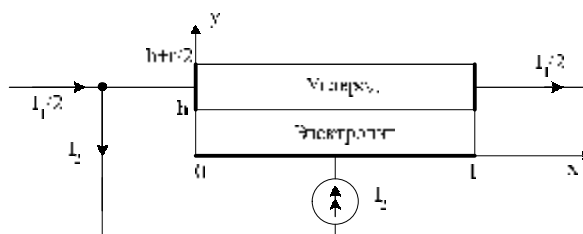


Рисунок 2 – Расчетный модуль УЭХС

В представленной работе рассмотрена модель УЭХС с неравномерным распределением плотности тока на границе раздела «угольный электрод- электролит». Были совместно рассмотрены концентрационное поле электролита и электрические поля в электролите и угольном электроде.

При моделировании рассматриваемого устройства принимаются следующие физические допущения: электрические поля в электролите и угольном электроде – потенциальные; все физико-химические характеристики системы являются постоянными величинами; все физические поля являются плоско-

параллельными и зависят от двух координат – x и y ; электродная кинетика контролируется стадией молекулярной диффузии в электролите.

Рассмотрены математические модели концентрационного поля электролита $C(x, y, t)$, электрического поля в электролите $\varphi_e(x, y, t)$ и электрического поля в угольном электроде $\varphi_r(x, y, t)$. Краевые задачи для всех рассматриваемых полей решались операторным методом Лапласа.

Стремятся, чтобы токи управления I_{21} и I_{22} были равными, т.е. $I_{21} = I_{22} = I_2$.

Если при этом окажется, что одинаковыми будут и толщины слоев электролита, то при моделировании УЭХС можно рассматривать лишь нижнюю половину конструкции относительно горизонтальной оси симметрии (Рисунок 2)

Концентрация электролита $C(x, y, t)$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad x \in [0; l], \quad y \in [0; h] \quad (1)$$

$$C(x, y, t) = C_0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0; y; t), \quad y \in [0; h], \quad (3) \quad \frac{\partial C}{\partial x}(l; y; t), \quad y \in [0; h] \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x; 0; t) = \frac{N I_2(t)}{l S} \equiv M I_2(t), \quad x \in [0; l] \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(x; h; t) = N \delta(x; t), \quad x \in [0; l] \quad (6)$$

$\delta(x; t)$ - подлежит определению при заданных $I_1(t)$ и $I_2(t)$.

Электрическое поле в электролите $\varphi_e(x; y; t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial y^2} = 0, \quad x \in [0; l], \quad y \in [0; h] \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial x}(0; y; t) = 0, \quad y \in [0; h] \quad (8) \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial x}(l; y; t) = 0, \quad y \in [0; h] \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial y}(x; 0; t) = \frac{-I_2(t)}{l S \gamma}, \quad x \in [0; l] \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial y}(x; h; t) = -\frac{\delta(x; t)}{\gamma}, \quad x \in [0; l] \quad (11)$$

Электрическое поле в угольном электроде $\varphi_r(x; y; t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial y^2} = 0, \quad x \in [0; l], \quad y \in \left[h; h + \frac{r}{2} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x}(0; y; t) = -\frac{I_1(t)/2 - I_2(t)}{r S \gamma_r}, \quad y \in \left[h; h + \frac{r}{2} \right] \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x}(l; y; t) = -\frac{I_1(t)/2}{rS\gamma_r}, \quad y \in \left[h; h + \frac{r}{2} \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial y}(x; h + \frac{r}{2}; t) = 0, \quad x \in [0; l] \quad (15)$$

где D – коэффициент диффузии, C_0 – начальная концентрация, N – электрохимическая константа, γ_r – удельная электропроводность угольного электролита, S – размер системы в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа.

Решением задачи (1) – (6) является функция

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}(x; y; p) = & \left(\frac{N}{\sqrt{l} S \sqrt{\frac{p}{D}}} \overset{\circ}{I}_2(p) \frac{sh \sqrt{\frac{p}{D}} \left(y - \frac{h}{2} \right)}{ch \sqrt{\frac{p}{D}} \frac{h}{2}} + \frac{C_0}{p} \sqrt{l} \right) \frac{1}{\sqrt{l}} + \\ & + N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(p) ch \sqrt{\frac{p}{D} + \frac{k^2 \pi^2}{l^2}} y}{\sqrt{\frac{p}{D} + \frac{k^2 \pi^2}{l^2}} sh \sqrt{\frac{p}{D} + \frac{k^2 \pi^2}{l^2}} h} X_k(x), \quad y \in [0; h] \end{aligned} \quad (16)$$

задачи (7) - (11) – функция

$$\overset{\circ}{\varphi}_r(x; y; p) = \left(\frac{\overset{\circ}{I}_2(p)}{l s \gamma_r} \sqrt{l} y + \beta_0(p) \right) \frac{1}{\sqrt{l}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(p) ch \frac{k\pi}{l} y}{\gamma_r \frac{k\pi}{l} sh \frac{k\pi}{l} h} X_k(x), \quad y \in [0; h] \quad (17)$$

и задачи (12) - (15) – функция

$$\begin{aligned} \omega_r(x; y; p) = & \left(\frac{\overset{\circ}{I}_2(p)}{r s \gamma_r \sqrt{l}} y^2 - \frac{2 \overset{\circ}{I}_2(p) \left(h + \frac{r}{2} \right)}{r s \gamma_r \sqrt{l}} y + b_0(p) \right) \frac{1}{\sqrt{l}} - \frac{\overset{\circ}{I}_2(p)}{r s \gamma_r l} x^2 - \\ & - \frac{\overset{\circ}{I}_2(p) - 2 \overset{\circ}{I}_2(p)}{r s \gamma_r} x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(p) \frac{ch \frac{k\pi}{l} \left(h + \frac{r}{2} - y \right)}{ch \frac{k\pi}{l} \left(h + \frac{r}{2} \right)} X_k(x), \quad y \in \left[h; h + \frac{r}{2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь неизвестными остаются константы: $\beta_0(p)$; $b_0(p)$; $b_k(p)$,

$$\omega_k(p) = \int_0^l \delta(x; p) X_k(x) dx, \quad \text{где } X_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x, & k \neq 0. \end{cases}$$

– собственные функции рассмотренных краевых задач.

Указанные константа могут быть найдены из краевых условий сопряжения на границе раздела «медь – электролит»:

Условия непрерывности плотности электрического тока:

$$-\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1(x; h; p)}{\partial y} = -\gamma_2 \frac{\partial \varphi_2(x; h; p)}{\partial y},$$

скачка электрического потенциала – уравнения Нернста – на границе раздела фаз:

$$\varphi_1(x; h; p) - \varphi_2(x; h; p) = g_{10} + g_{11} C(x; h; p),$$

где $g_{10} > 0$, $g_{11} > 0$ – коэффициенты линейной аппроксимации уравнений Нернста.

После определения всех коэффициентов разложения можно найти распределение плотности тока на границе раздела фаз по закону Ома.

$$\delta(x; p) = -\gamma_2 \frac{\partial \varphi_2(x; h; p)}{\partial y}, \text{ где } \varphi_2(x; h; p) \text{ – определяется из (17).}$$

$$\text{Конкретно получим } \delta(x; p) = \frac{I_{\Sigma}(p)}{l s} - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(p) X_k(x).$$

Найденное распределение плотности тока позволяет найти распределение осажденного металла на поверхности угольного электрода и тем самым оценить влияние управляющего тока $J_{\Sigma}(p)$ на величину УЭХС.

Перечень ссылок

1. Герасименко Ю.Я. Математическое моделирование физических полей в электрохимических системах. – Новочеркасск: НПИ. –1980. 88 с.

УДК 621.321.7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КАБЕЛЯ С АКТИВНО-ИНДУКТИВНОЙ НАГРУЗКОЙ

Герасименко Ю.Я., д.т.н., профессор; Герасименко Е.Ю.,

Микитинский А.П., доценты к.т.н.

(Южно-Российский государственный технический университет (НПИ), г. Новочеркасск, Россия)

Электрический кабель представляет собой длинную линию, электрические процессы в которой описываются следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [1]

$$\frac{\partial U}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \quad (1) \quad \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial U}{\partial t} + Gi = 0, \quad (2)$$