

УДК 629.113:504.054:338.45

Семененко М.В., к.т.н.

КНУСА, м. Киев

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ЭКОНОМИКО-ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

*Предложен один из практических вариантов решения оптимизационной задачи моделирования производственной системы с учетом экономико-экологических показателей.*

### **Постановка проблемы**

Исследование и решение проблемы загрязнения атмосферы городов выбросами промышленных предприятий и транспорта является одной из задач современности, которую необходимо решать в рамках общих аспектов охраны окружающей среды.

Важным классом задач, которые требуют первостепенного решения, является разработка средств математического моделирования производственных систем с источниками выбросов вредных веществ и разработка численных методов оптимизации параметров с учетом экономико-экологических показателей.

### **Анализ исследований и публикаций**

Методологические вопросы экономико-математического моделирования устойчивого развития, которые включают системное изучение экономических и экологических проблем, рассматриваются в рамках научной школы профессора И.Г. Ляшенко и академика М.М. Михалевича [1]. Разработаны межотраслевые модели взаимодействия экономики с окружающей средой, макромоделли устойчивого развития, агрегированные динамические модели экологически чистых технологий, рыночные механизмы эколого-экономического взаимодействия.

Академиком Г.И. Марчуком [2] подробно рассмотрены задачи с экономическими критериями планирования, охраны и восстановления окружающей среды, отражающими стоимость потерь продуктов биосферы при загрязнении. Однако указанные критерии также носят эмпирический характер и достаточно трудно формализуемы.

В работе [3] также описан интересный подход к моделированию задач природопользования, состоящий в построении теоретико-игровых моделей охраны окружающей среды. Рассмотрена статистическая теоретико-игровая модель нормирования выбросов вредных веществ, задача оптимизации выбора размеров штрафов за загрязнение, задача нормирования выбросов с учетом влияния рынка, динамическая теоретико-игровая модель охраны атмосферы от загрязнения.

Научной основой исследований в области создания информационных технологий являются работы академиков В.М. Глушкова, В.С. Михалевича, И.В. Сергиенко, К.Л. Ющенко, А.М. Щербаня и др.

Появление перечисленных выше работ (а также многих других) позволило наметить пути решения задач оптимизации размеров и размещения источников вредных выбросов при введенных ограничениях.

Проведенный анализ научной литературы по различным аспектам математического и компьютерного моделирования процессов загрязнения воздушного бассейна выбросами от различных источников, а также основных направлений эколого-экономического моделирования показал, что комплексная задача оптимизации параметров объектов с источниками выбросов вредных веществ в атмосферу с учетом экологоэкономических факторов и на сегодня не решена в полном объеме.

Практически отсутствуют примеры завершенных разработок программных систем моделирования источников загрязнения окружающей среды с учетом современных знаний в экономической экологии. Кроме того, потребность в разработке методов математического и компьютерного моделирования задач выделенного класса на основе дальнейшего развития оптимизационных моделей и методов геометрического проектирования и принципов создания информационных технологий для поддержки принятия проектных решений на этапе проектирования или реконструкции предприятий в сложных условиях современного производства предусмотрена законодательно, является весьма существенной и определяет тематику данной статьи, которая является продолжением решения задач, поставленных автором в работе [4].

### *Цель статьи*

Решить основную оптимизационную задачу моделирования производственной системы [4] с учетом экономико-экологических показателей.

### *Основная часть*

Анализ особенностей математической модели основной оптимизационной задачи (1) позволил сделать вывод, что множество независимых переменных задачи (1) имеют различную физическую природу:

$$w^* = \arg \underset{w \in W}{extr} (\Psi_1(w), \Psi_2(w), \Psi_3(w)). \quad (1)$$

С одной стороны, это вектор параметров  $\Omega_1$ , характеризующий источники выбросов  $S_m$ , с другой стороны — параметры размещения ( $\Omega_2, \Omega_3$ ) носителей источников  $S_m, m = 1, 2, \dots, M$  и участков дополнительных автодорог. Этот факт дает возможность выделить в основной оптимизационной задаче две задачи меньшей размерности и разбить ее решение на два этапа.

Решение первой задачи — рационального размещения носителей источников вредных выбросов  $S_m$  с учетом экологических факторов при наличии автомобильных подъездных дорог  $\{l_i\}, i = 1, 2, \dots, L$  с целью минимизации максимального уровня загрязнения  $C_u$  на границе экологически значимых зон ( $j=1,2,\dots,J$ ) подробно рассмотрено в работе [4].

Рассмотрим решение второй задачи — достижение минимальных экономических затрат, а именно задача определения для каждого источника  $S_m$  такой системы очистки  $F_m$  и высоты  $H_m$  с учетом направления и среднегодовой скорости ветра ( $u$ ) для исследуемого района, чтобы максимальная суммарная концентрация выбрасываемых вредных веществ в области  $\mathfrak{X}$  не превышала ПДК, причем затраты на сооружение источника  $C_1(H_m)$  и системы очистки  $C_2(F_m)$ , а также площадь загрязненной земли  $S(I_m, H_m, F_m), m = 1, 2, \dots, M$ , были бы минимальными.

Введем обозначение через  $\Theta_m$  зону загрязнения площади  $S(I_m, H_m, F_m)$ , на границе которой достигается предельно возможное для соблюдения санитарных норм значение поля концентрации ( $C_{u_m}(\dots) + C_{\phi}$ ). Зона  $\Theta_m$ , положение которой задается вектором  $(x_m, y_m, 0)$ , моделируется геометрически в зависимости от характера выбросов, скорости ветра ( $u$ ), высоты источника  $H_m$ , степени очистки выбросов  $F_m, m = 1, 2, \dots, M$ .

Существенно снижать высоту источника выбросов и стоимость системы очистки нельзя, поскольку это приведет к увеличению площади загрязнения и повышению его уровня. Увеличение высоты источника и стоимости очистных сооружений вызовет снижение экономических показателей (увеличение затрат) при строительстве. Таким образом, речь идет об определении оптимальной высоты источника и системы очистки, которые обеспечили бы минимум загрязняемой площади и затрат на строительство.

В этих условиях наиболее целесообразно в качестве функции цели оптимизационной задачи выбрать стоимостный критерий — величину суммарных затрат  $\Psi_1(H, F, I)$ , которая для каждого производственного объекта выглядит как:

$$\Psi_{1_m}(I_m, H_m, F_m) = C_1(H_m) + C_2(F_m) + C_3 s(I_m, H_m, F_m), \quad (2)$$

где  $m = 1, 2, \dots, M$ ,

$$\Psi_1(I, H, F) = \sum_{m=1}^M \Psi_{1_m}(I_m, H_m, F_m),$$

где  $H_m$  — высота источника выброса  $m$ -го объекта;  $F_m$  — коэффициент очистки выбрасываемого  $m$ -тым объектом вещества;  $C_1(H_m)$  — стоимость материалов и работ, затрачиваемых на строительство источника высотой  $H_m$ ;  $C_2(F_m)$  — стоимость сооружения в соответствии со значением  $F_m$ ;  $C_3$  — стоимость единицы площади земли, загрязняемой  $m$ -м промышленным объектом;  $s(I_m, H_m, F_m)$  — площадь земли, загрязняемой выбросами из источника высотой  $H_m$  с коэффициентом очистки  $F_m$ ;  $M$  — число источников выбросов (размещаемых объектов).

Моделируемую систему описывают следующие ограничения (область допустимых решений  $W_1 \subset W$ ):

- высота источника загрязнения должна быть неотрицательной:  $H_m > 0$ ;
- $m = 1, 2, \dots, M$ ;
- переменная  $F_m$  может принимать следующие значения:

$$F_m = \begin{cases} 1 & \text{для газообразных вредных веществ;} \\ 2, & \text{если степень очистки не менее 90\%;} \\ 2,5, & \text{если степень очистки лежит в интервале от 75\% до 90\%;} \\ 3, & \text{если степень очистки менее 75\% и при отсутствии очистки,} \end{cases}$$

$m = 1, 2, \dots, M$ .

Высота источника загрязнения должна быть такой, чтобы при фиксированных значениях интенсивностей выбросов величина приземной концентрации не превышала санитарных норм:

$$C_{u_m}(I_m, H_m, F_m) + C_\phi \leq \Lambda,$$

где  $C_{u_m}$  — приземная концентрация выбрасываемого  $m$ -тым объектом вещества;  $C_\phi$  — фоновое загрязнение местности;  $\Lambda$  — ПДК (предельно-допустимая концентрация загрязняющего вещества).

Далее будем считать, что интенсивность вредных выбросов  $I_m$  для рассматриваемого объекта — величина постоянная, а количество вредных веществ в атмосфере зависит от качества очистки выбрасываемых веществ.

Тогда задача оптимизации экономического эффекта заключается в поиске для каждого источника таких переменных  $H_m$  и  $F_m$  при фиксированном значении  $I_m$ , которые доставляют минимум целевой функции  $\Psi_{1_m}(I_m, H_m, F_m)$  на области допустимых решений

$$W_1 = \bigcup_{m=1}^M W_{1_m}, \quad W_1 \subset W, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Таким образом, математическая модель поставленной задачи имеет вид:

$$\text{найти} \quad \Psi_{1_m}(I_m, H_m, F_m) = \{C_1(H_m) + C_2(F_m) + C_3 s(I_m, H_m, F_m)\} \rightarrow \min_{(H_m, F_m) \in W_{1_m}}, \quad (3)$$

где  $W_{1_m}$  задается системой неравенств вида

$$\begin{cases} H_m > 0, \\ C_{u_m}(I_m, H_m, F_m) + C_\phi \leq \Lambda, \\ F_m \in \{1; 2; 2,5; 3\}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{cases} \quad (4)$$

Для формализации ограничений (4) необходимо представить величину максимальной приземной концентрации в зависимости от параметров  $H_m$  и  $F_m$ .

Для решения задачи (3), (4) необходимо осуществить расчет расстояний от источника выброса, на которых наблюдается допустимое значение приземной концентрации  $C_u$ , после чего можно определить площадь зоны, на границе которой эта концентрация достигается (площадь загрязненной земли) [5].

Зону загрязнения каждого источника выбросов вредных веществ аппроксимируем восьмиугольником, каждая из вершин которого соответствует одному из направлений частей света. Расчет линий равных концентраций вредных веществ производится с учетом среднегодового значения ветра ( $u$ ) рассматриваемого географического региона по каждому направлению.

Площадь  $S$  многоугольника с вершинами в точках  $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2), \dots, X_8(x_8, y_8)$  равна:

$$s = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^8 (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) \right|. \quad (5)$$

Координаты точек  $X_1, X_2, \dots, X_8$  определяются согласно методики, изложенной в [5], в зависимости от характера выбросов, значений скорости ветра, высоты источника, степени очистки выбросов и т.д.

Определив площадь загрязненной земли, можно приступить к решению оптимизационной задачи (3), (4).

Анализ независимых переменных показал, что оптимизационная задача (3), (4) имеет дискретно-континуальный характер. Область допустимых решений  $W_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  задачи может быть представлена в виде объединения четырех подобластей  $W_m^i$ , на каждой из которых параметр  $F_m$  принимает одно из четырех возможных своих значений  $F_m \in \{1; 2; 2,5; 3\}$  [5]. Поэтому решение задачи сводится к решению конечного набора задач одномерной оптимизации.

Смысл предлагаемого метода решения заключается в последовательной оптимизации по каждому из управляемых параметров. Так, зафиксировав значение  $F_m$ , производим минимизацию функции цели,  $\Psi_m^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  по параметру  $H_m$  для каждого объекта в отдельности, т.е. решается одномерная оптимизационная задача:

$$\Psi_m^i(H_m, F_m) \rightarrow \min_{H_m \in N}, m = 1, 2, \dots, M, \quad (6)$$

где  $N$  — множество допустимых значений, определяемое из ограничений:

$$\begin{cases} C_{u_m}^i(H_m) + C_{\phi} \leq \Lambda \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} H_m > 0, \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (8)$$

Показатель экономического эффекта  $\Psi_m^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  в этом случае является функцией одной переменной  $H_m$ , а параметр  $F_m$  при этом остается неизменным:  $F_m = \text{const}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Далее реализуем процедуру поиска, позволяющую найти точку оптимума функции  $\Psi$  путем последовательного исключения частей исходного ограниченного интервала.

Для решения нелинейной многоэкстремальной оптимизационной задачи (7), (8) воспользуемся численными методами нулевого порядка (без использования производных).

Так как на области допустимых значений возможно существование нескольких локальных экстремумов функции цели, то для решения задачи разобьем исходный интервал значений высоты источника на участки длиной 10 м. Количество участков разбиения примем равным  $L$ .

Следующим шагом процесса решения является реализация процедуры преобразований интервалов разбиения с тем, чтобы уменьшить их длину до величины 0,5 м. Для достижения нахождения минимума функции цели, наиболее эффективным по сравнению с другими методами

одномерной оптимизации, является метод золотого сечения, поскольку он требует наименьшего числа оценивания значений функции при одной и той же заданной точности [6]. Заметим, что метод золотого сечения, как и все методы исключения интервалов, устраняет необходимость полного перебора всех допустимых точек. Несомненным достоинством всех поисковых методов такого рода является то, что они основаны лишь на вычислении функции. При этом не требуется, чтобы исследуемая функция была дифференцируема. Единственным требованием для применения метода золотого сечения является возможность определения значения функции цели в заданных точках с помощью прямых расчетов, что не представляет трудности.

Применяя метод золотого сечения, определяем множество значений  $\{H_m^*\}_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ , которые доставляют минимум функции цели на каждом интервале разбиения. Одна из найденных величин является решением задачи оптимизации (6).

Меняя последовательно значения коэффициента  $F_m = \{1; 2; 2,5; 3\}$ , находим точки экстремума  $H_m^{*1}, H_m^{*2}, H_m^{*3}, H_m^{*4}$ , соответственно.

Из них выбираем одну по признаку

$$\Psi_{l_m}(H_m, F_m) \rightarrow \min_{H_m \in R},$$

где  $R = \{H_m^{*1}, H_m^{*2}, H_m^{*3}, H_m^{*4}\}$ .

Результатом решения поставленной задачи является вектор  $\Omega_1 = (H_1, F_1, H_2, F_2, \dots, H_M, F_M)$ , определяющий оптимальные характеристики каждого источника  $S_m$ .

### Выводы

1. Рассмотрена оптимизационная задача моделирования производственной системы, при ее проектировании или реконструкции. Система имеет источники выбросов вредных веществ, экологически значимые зоны, загрязнения которых вредными выбросами не должно превышать допустимые санитарные нормы [4].

2. Предложен метод оптимизации экономического показателя, который отличается от известных комплексным подходом с учетом затрат на строительство источника выброса, системы очистки и стоимости земли, которая загрязняется в результате эксплуатации промышленной единицы.

3. Предложено практическое решение основной оптимизационной задачи моделирования производственной системы с учетом экономико-экологических показателей.

### Список литературы

1. Ляшенко И.Н. Методы эколого-экономического моделирования / И.Н. Ляшенко, М.В. Михалевич, Н.У. Утеулиев. — Нукус, Билим, 1994. — 236 с.
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г.И. Марчук. — М.: Наука, 1982. — 319 с.
3. Петросян Л.А. Математические модели в экологии / Л.А. Петросян, В.В. Захаров. — СПб.:Изд-во С.-П. университета, 1997. — 253 с.
4. Міхно М.В. Математична постановка оптимізаційної задачі моделювання виробничої системи з урахуванням екологічних чинників та наявності мережі автодоріг / М.В. Міхно //Вісті Автомобільно-дорожнього інституту: науково-виробничий збірник / АДІ ДонНТУ. — Горлівка, 2008. — №1(6). — С.61 — 68.
5. Мазур И.И. Курс инженерной экологии / И.И. Мазур, О.И. Молдаванов. — М.: Высшая школа, 2001. — 509 с.
6. Карманов В.Г. Математическое программирование: учебное пособие / В.Г. Карманов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Стаття надійшла до редакції 14.12.09

© Семененко М.В., 2009