УДК 531.383

# УПРАВЛЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ГИРОДИНОВ

А.В. Гладун
*Донецкий государственный институт искусственного интеллекта*
Украина, 83050, Донецк, пр. Богдана Хмельницкого, 84
E-mail: gladun@iai.donetsk.ua

**Ключевые слова**: твердое тело, гиродин, спарка гиродинов, равномерное вращение, положение равновесия, относительная управляемость, стабилизируемость, линейное приближение
**Key words**: a rigid body, gyrodin, doubled gyrodins, uniform rotations, an equilibrium position, a relative controllability, stabilizability, a linear approximation

Исследуется задача управления и стабилизации твердого тела, которое несет два гиродина или спарку гиродинов. Получены управления, обеспечивающие заданное равномерное вращение и перевод твердого тела в противовращение в окрестности стационарных решений с заданной степенью точности. Предложен алгоритм построения управлений, которые осуществляют стабилизацию динамической системы по части переменных. При построении исходная система приводится к системе специального вида, для которой стабилизация достигается путем выбора собственных чисел матрицы линейного приближения. Как мнимые, так и действительные части собственных чисел этой матрицы подбираются таким образом, чтобы минимизировать норму управления с обратной связью. Приведены результаты численного моделирования.
**CONTROL AND STABILIZATION OF A ROTARY MOTION OF A RIGID BODY WITH THE HELP OF GYRODINS** / A.V. Gladun (Donetsk State Institute of Artifical Intelligence, 84 Bogdan, Donetsk 83050, Ukraine, E-mail: gladun@iai.donetsk.ua). The problem of control and stabilization of a rotatory movement of a rigid body which bears gyrodins, or doubled gyrodin is investigated. The algorithm which gives the explicit solution of a two-point problem with respect to part of the variables with the given degree of accuracy is offered. Controls which execute stabilization of a dynamic system with respect to part of the variables built. In order that construction the initial system is reduced in a system of a special kind for which stabilization is reached by selection of eigenvalues for linear approximation matrix. Both imaginary, and real parts of eigenvalues of this matrix are selected so that to minimize the norm of control with feedback. The controls to provide controlling and stabilization of orientation and uniform rotation of a rigid body were constructed. Results of a numerical modeling are adduced.

## 1. Введение

Рассмотрим задачу управления и стабилизации твердого тела, при решении которой используются гиродины. Гиродин − двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью. Преобразуем уравнения движения твердого тела с $s$ гиродинами, полученные в работе [1], введя переменные [2]

$$\xi_j = J_j\left(\mathbf{l}^*_{0j},\boldsymbol{\omega}\right) + J_j\dot{q}_j, \quad j = 1,\ldots,s$$

и предполагая, что ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения. Далее запишем уравнения в системе координат *Oxyz*, жестко связанной с носителем, выбрав ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\theta\boldsymbol{\omega} - \sum_{j=1}^{s} J_j\left(\mathbf{l}^*_{0j},\boldsymbol{\omega}\right)\mathbf{l}_{0j} = \left(A_1\omega_1, A_2\omega_2, A_3\omega_3\right)^*,$$

где $A_1, A_2, A_3$ − обобщенные моменты инерции.

Система уравнений, описывающая движение твердого тела несущего $s$ гиродинов, принимает вид

$$A_1\dot{\omega}_1 = \left(A_2 - A_3\right)\omega_2\omega_3 + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{J_j}h_j\xi_j\left[\sin q_j n^1_{0j} - \cos q_j k^1_{0j}\right] - \right.$$

$$\left. -\omega_2\xi_j l^3_{0j} + \omega_3\xi_j l^2_{0j} - l^1_{0j}u_j\right) \qquad (123)$$

$$\dot{q}_j = \frac{1}{J_j}\xi_j - \left(\mathbf{l}^*_{0j},\boldsymbol{\omega}\right)$$

$$\dot{\xi}_j = h_j\left[\left(\mathbf{k}^*_{0j},\boldsymbol{\omega}\right)\cos q_j - \left(\mathbf{n}^*_{0j},\boldsymbol{\omega}\right)\sin q_j\right] + u_j \qquad j = 1,\ldots,s.$$

Здесь $\theta$ − матрица тензора инерции системы носитель-гиродины; $\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)^*$ − вектор угловой скорости носителя; $\mathbf{q} = \left(q_1,\ldots,q_s\right)^*$ − вектор углов поворота гирокамер относительно носителя; $\mathbf{k}^*_{0j} = (k^1_{0j},k^2_{0j},k^3_{0j})$; $\mathbf{l}^*_{0j} = (l^1_{0j},l^2_{0j},l^3_{0j})$; $\mathbf{n}^*_{0j} = (n^1_{0j},n^2_{0j},n^3_{0j})$; $\mathbf{k}^*_{0j}$, $\mathbf{l}^*_{0j}$, $\mathbf{n}^*_{0j}$ − орты, задающие положение $j$ -го гиродина в теле носителе; $\mathbf{u} = \left(u_1,\ldots,u_s\right)^*$ − вектор управлений; $\mathbf{h} = (h_1,\ldots,h_s)^*$, $\mathbf{J} = \left(J_1,\ldots,J_s\right)^*$ − постоянные, задающие кинетические моменты гиродинов; $*$ − символ транспонирования.

Пусть на носителе (твердое тело) установлено два гиродина и ось вращения одного из них не совпадает ни с одной из координатных осей. В качестве ортов примем следующие:

$$\mathbf{k}_{01} = \left(\frac{6}{35},\frac{6}{7},-\frac{17}{35}\right)^*;\ \mathbf{l}_{01} = \left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)^*;\mathbf{n}_{01} = \left(\frac{33}{35},-\frac{2}{7},-\frac{6}{35}\right)^*;$$

$$\mathbf{k}_{02} = \left(0,0,1\right)^*;\ \mathbf{l}_{02} = \left(1,0,0\right)^*;\ \mathbf{n}_{02} = \left(0,1,0\right)^*.$$

Тогда получаем уравнения движения в форме

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{A_1}\left[\left(A_2 - A_3\right)\omega_2\omega_3 + \frac{3}{7}\omega_3\xi_1 - \frac{6}{7}\omega_2\xi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{35J_1}h_1\xi_1\left(33\sin q_1 - 6\cos q_1\right) - \frac{2}{7}u_1 - u_2\right]$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{A_2}\left[\left(A_3 - A_1\right)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi_2 - \frac{2}{7}\omega_3\xi_1 + \frac{6}{7}\omega_1\xi_1 - \right.$$

$$-\frac{2}{7J_1}h_1\xi_1\left(\sin q_1+3\cos q_1\right)+\frac{1}{J_2}h_2\xi_2\sin q_2-\frac{3}{7}u_1\Bigg]$$

(1)
$$\dot\omega_3=\frac{1}{A_3}\Bigg[\left(A_1-A_2\right)\omega_1\omega_2+\frac{2}{7}\omega_2\xi_1-\frac{3}{7}\omega_1\xi_1+\omega_2\xi_2-$$

$$-\frac{1}{35J_1}h_1\xi_1\left(6\sin q_1-17\cos q_1\right)-\frac{1}{J_2}h_2\xi_2\cos q_2-\frac{6}{7}u_1\Bigg]$$

$$\dot q_1=\frac{1}{J_1}\xi_1-\frac{2}{7}\omega_1-\frac{3}{7}\omega_2-\frac{6}{7}\omega_3$$

$$\dot q_2=\frac{1}{J_2}\xi_2-\omega_1$$

$$\dot\xi_1=\frac{h_1}{35}\big[\left(6\cos q_1-33\sin q_1\right)\omega_1+10\left(3\cos q_1+\sin q_1\right)\omega_2+$$

$$+\left(6\sin q_1-17\cos q_1\right)\omega_3\big]+u_1$$

$$\dot\xi_2=h_2\left(\omega_3\cos q_2-\omega_2\sin q_2\right)+u_2$$

Объединение гиродинов в спарки, позволяет уменьшить сложность решаемой задачи. В механических системах, состоящих из носителя и спарок гиродинов, будем управлять, изменяя угловую скорость вращения гирокамер спарки. В результате уменьшается количество уравнений, описывающих движение исследуемых механических систем, уравнения имеют более простой вид.

Уравнения движения механической системы, состоящей из носителя и $s$ спарок гиродинов, также получены в работе [1]. Запишем их в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с носителем, выбрав ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\theta\boldsymbol{\omega}=\left(A_1\omega_1,A_2\omega_2,A_3\omega_3\right)^*,$$

где $A_1, A_2, A_3$ − обобщенные моменты инерции.

В результате получаем систему уравнений

$$A_1\dot\omega_1=\left(A_2-A_3\right)\omega_2\omega_3+2\sum_{j=1}^{s}\Big[h_j\sin q_j\left(\omega_3k_{0j}^2-\omega_2k_{0j}^3\right)-$$

$$-h_ju_j\cos q_jk_{0j}^1\Big]. \qquad (123)$$

$$\dot q_j=u_j \qquad j=1,\ldots,s$$

Пусть на носителе (твердое тело) установлена одна спарка гиродинов и орты

$$\mathbf{k}_{01}=\left(\frac{6}{35},\frac{6}{7},-\frac{17}{35}\right)^*;\ \mathbf{l}_{01}=\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)^*;\mathbf{n}_{01}=\left(\frac{33}{35},-\frac{2}{7},-\frac{6}{35}\right)^*;$$

задают ее начальное расположение. Оси вращения гирокамер спарки не являются параллельными ни одной из координатных осей. Тогда движение механической системы носитель − спарка гиродинов описывается системой уравнений вида

$$\dot\omega_1=\frac{1}{A_1}\left[(A_2-A_3)\omega_2\omega_3+\frac{12}{7}h\omega_3\sin q+\frac{34}{35}h\omega_2\sin q-\frac{12}{35}hu\cos q\right]$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{A_2}\left[ (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \frac{34}{35}h\omega_1 \sin q - \frac{12}{35}h\omega_3 \sin q - \frac{12}{7}hu\cos q \right] \quad (2)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{A_3}\left[ (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \frac{12}{35}h\omega_2 \sin q - \frac{12}{7}h\omega_1 \sin q + \frac{34}{35}hu\cos q \right]$$

$$\dot{q} = u$$

Под положением равновесия будем понимать такое состояние твердого тела, при котором его угловая скорость вращения равна нулю, т.е. $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ и остается таковой в течение всего промежутка времени.

# 2. Управление твердым телом с помощью спарки гиродинов

## 2.1. Перевод в противовращение

Задача управления угловой скоростью состоит в нахождении такого кусочно-непрерывного (далее допустимого) управления $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что соответствующее ему движение системы (2) удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^{(0)},\ \boldsymbol{\omega}(t_1) = \boldsymbol{\omega}^{(1)}.$$

Будем решать задачу управления угловой скоростью твердого тела с помощью спарки гиродинов по линейному приближению.

Система (2) состоит из четырех уравнений и, тем не менее, управляема по интересующим нас переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в окрестности положения равновесия $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, q) = (0, 0, 0, q^{(0)})$. Сделаем замену переменных

$$x_1 = \omega_1,\ x_2 = \omega_2,\ x_3 = \omega_3,\ x_4 = q - q^0$$

и линеаризуем систему в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$, имеем

$$\mathrm{A}_1\dot{x}_1 = \frac{34}{35}h\sin q^0\, x_2 + \frac{12}{7}h\sin q^0\, x_3 - \frac{12}{35}h\cos q^0\, u$$

$$\mathrm{A}_2\dot{x}_2 = -\frac{34}{35}h\sin q^0\, x_1 - \frac{12}{35}h\sin q^0\, x_3 - \frac{12}{7}h\cos q^0\, u \quad (3)$$

$$\mathrm{A}_3\dot{x}_3 = -\frac{12}{7}h\sin q^0\, x_1 + \frac{12}{35}h\sin q^0\, x_2 + \frac{34}{35}h\cos q^0\, u$$

$$\dot{x}_4 = u.$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$ есть система (3), записанная в матричном виде. Чтобы система (2) была управляема по переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ в окрестности положения равновесия $(0, 0, 0, q^{(0)})$, достаточно, чтобы $rank\{DB, DAB, DA^2B\} = 3$ с матрицей $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [3].

Так как $\det\{DB, DAB, DA^2B\} = \dfrac{288 h^6 \sin^3 2q^0\, C_4}{1500625\, A_1^3\, A_2^3\, A_3^3}$, то определитель не обращается в ноль и система (2) управляема по $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, если $q^0 \neq \pi n/2, n \in Z$.

Постоянная

$$C_4 = 289A_2\left(A_1^2 + A_3^2\right) + 900A_3\left(A_2^2 + A_3^2\right) +$$
$$+ 7225A_1\left(A_2^2 + A_3^2\right) - 16828A_1A_2A_3 .$$

С помощью формулы [4]

$$\mathbf{u}_k(t) = \omega^*(t_1,t)M^{-1}D\left[\mathbf{x}^{(1)} - X(t_1,t_0)\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_i^{н}(t_1))\right] \qquad (4)$$

построим управление, переводящее систему (2) в противовращение, т.е. управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), t \in [0,1]$ такое, что соответствующее ему движение динамической системы (3) удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{\omega}^*(t_0) = (0.07,\ 0.1,\ -0.2),\ \ \mathbf{q}^0(t_0) = \pi/3$$
$$\boldsymbol{\omega}^*(t_1) = (-0.07,\ -0.1,\ 0.2),$$

с точностью до 0.00001.

Здесь $\mathbf{x}_i^{н}(t_1)$ – точка, в которую попадает нелинейная система (2) под действием допустимого управления $\mathbf{u}_i(t)$ в момент времени $t_1$.

Вычисляем фундаментальную матрицу соответствующей однородной системы и находим матрицу $\omega(t,\xi) = DX[t,\xi]B$. Вычисления по формуле (4) будем производить пошагово, записав формулу в виде $u_k(t) = \Omega(t)\,\mathbf{p}_k$, где $\Omega(t) = \omega^*(t_1,t)M^{-1}$, $\mathbf{p}_k = \mathrm{D}\left[\mathbf{x}^{(1)} - X(t_1,t_0)\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_i^{н}(t_1))\right]$, $k = 0,1\ldots$, и имеют вид

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} c_1\cos[g(1-t)] + d_1\sqrt{1181441}\sin[g(1-t)] + e_1 \\ c_2\cos[g(1-t)] + d_2\sqrt{1181441}\sin[g(1-t)] + e_2 \\ c_3\cos[g(1-t)] + d_3\sqrt{1181441}\sin[g(1-t)] + e_3 \end{pmatrix}^*,$$

$$g = 30\sqrt{3}\sqrt{1181441}\,/4991,$$
$\mathbf{c}$ = (− 0.638409224, 1.065118091, 1.727387946),
$\mathbf{d}$ = (− 0.001808675, 0.0001615041, −0.0003048252),
$\mathbf{e}$ = (− 0.1988024046, − 0.077192093, 0.19281701),
$\mathbf{p}_0^*$ = (− 0.2290032, − 0.2340086, 0.27680048),
$\mathbf{p}_6^*$ = (− 0.2671359138, − 0.2472727713, 0.2921920465).

При построении управления, решающего задачу, будем полагать, что константы в системе уравнений (2) заданы следующим образом

$$A_1 = 230,\ A_2 = 310,\ A_3 = 210,\ h = 1500.$$

В результате получаем управление

$$u_6(t) = 0.128534362 + 0.411896348\cos(-11.3161926 + 11.3161926t) +$$
$$+ 0.3849499949\sin(-11.3161926 + 11.3161926t),$$

которое решает поставленную задачу с требуемой степенью точности. Поведение системы под действием построенного управления показано на рис. 1.

$$\omega_1(0) = 0.07,\ \omega_2(0) = 0.1,\ \omega_3(0) = -0.2$$
$$\omega_1(1) = -0.06999965,\ \omega_2(1) = -0.099999019,\ \omega_3(1) = 0.200000678.$$

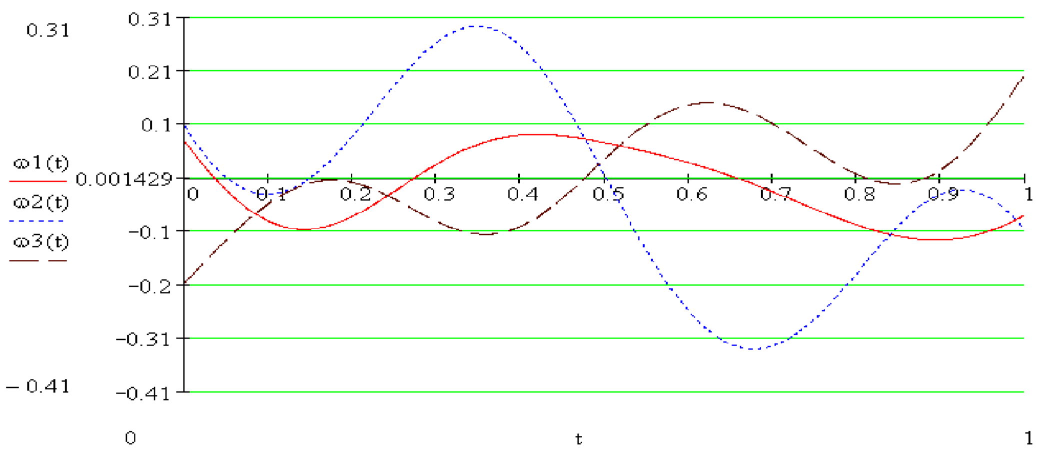


**Рис. 1.**

## 2.2. Равномерное вращение

Пусть под воздействием внешних возмущений было нарушено равномерное вращение

(5) $$(\omega_1,\omega_2,\omega_3,q)=(0,\omega_2^0,\ 0,\ \pi m)=(0,10,\ 0,\ 3\pi)\,.$$

В результате вектор фазовых координат принял вид

$$(\omega_1,\omega_2,\omega_3,q)=\left(0.8,\ 10.9,\ -1.3,\ \frac{19\pi}{6}\right).$$

Рассмотрим вопрос о возможности с помощью одной спарки гиродинов вернуть носителю исходное равномерное вращение (5). Исследуем управляемость системы (2) в окрестности равномерного вращения (5). Сделаем замену переменных

$$x_1=\omega_1,\ x_2=\omega_2,\ x_3=\omega_3,\ x_4=q-\pi m$$

и линеаризуем систему в точке $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)$, имеем

(6) $$\begin{aligned}
\dot x_1 &= \frac{1}{A_1}\left[(A_2-A_3)\omega_2^0 x_3+\frac{(-1)^m 34}{35}h\omega_2^0 x_4-\frac{(-1)^m 12}{35}hu\right]\\
\dot x_2 &= \frac{(-1)^{m+1}12}{7A_2}hu\,,\\
\dot x_3 &= \frac{1}{A_3}\left[(A_1-A_2)\omega_2^0 x_1+\frac{(-1)^m 12}{35}h\omega_2^0 x_4+\frac{(-1)^m 34}{35}hu\right]\\
\dot x_4 &= u
\end{aligned}$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+Bu$ есть система (6), записанная в матричном виде. Чтобы система (2) была управляема по переменным $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ в окрестности равномерного вращения (5), достаточно [3], чтобы $rank\{DB, DAB, DA^2B\}=3$. Матрица $\{DB, DAB, DA^2B\}$ в этом случае принимает вид

$$DB^*=\left(\frac{12(-1)^{m+1}h}{35A_1},\ \frac{12(-1)^{m+1}h}{7A_2},\ \frac{34(-1)^m h}{35A_3}\right),$$

$$DAB^*=\left(\frac{34(-1)^m h\omega_2^0 A_2}{35A_1A_3},\ 0,\ \frac{12(-1)^m h\omega_2^0 A_2}{35A_1A_3}\right),$$

$$DA^2B^* = \left( \frac{12\,(-1)^{m+1}\, h\left(\omega_2^0\right)^2 A_2\,(A_3 - A_2)}{35\,{A_1}^2 A_3},\ 0,\right.$$

$$\left., \frac{34\,(-1)^{m+1}\, h\left(\omega_2^0\right)^2 A_2\,(A_2 - A_1)}{35\,A_1 {A_3}^2} \right).$$

Тогда $\det\{DB, DAB, DA^2B\} = \dfrac{48(-1)^{3m}\, h^3 \left(\omega_2^0\right)^3 A_2\, K}{8575\, A_1^3 A_3^3}$, где

$$K = 289 A_1 (A_1 - A_2) + 36 A_3 (A_3 - A_2).$$

Определитель не обращается в ноль и система (2) управляема по $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, если $\omega_2^0 \neq 0$.

С помощью формулы (4) построим управление, переводящее систему (2) в исходное равномерное вращение (5) с точностью до 0.00001. Матрица $\Omega(t) = \omega^*(t_1, t) M^{-1}$ и вектор $\mathbf{p}_0$, имеют вид

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos[g(t-1)] + d_1 \sqrt{2415}\sin[g(t-1)] + e_1 \\ c_2 \cos[g(t-1)] + d_2 \sqrt{2415}\sin[g(t-1)] + e_2 \\ c_3 \cos[g(t-1)] + d_3 \sqrt{2415}\sin[g(t-1)] + e_3 \end{pmatrix}^*, \text{ где}$$

$g = 40\sqrt{2415}/483$,

$\mathbf{c} = (0.20160997,\ 0.7668857732,\ -0.1857781932)$,

$\mathbf{d} = (0.008995155462,\ 0.01735833055,\ 0.0006659509444)$,

$\mathbf{e} = (0.2133656852,\ 0.7874499359,\ -0.0236826758)$;

$\mathbf{p}_0^* = (-1.089120161,\ -0.9,\ -7.268198479)$.

Управление $u_0(t)$, вычисляемое на первом шаге, не переводит систему в исходное равномерное вращение, так как строится достаточно грубо по линейному приближению. Поведение системы под действием управления

$$u_0(t) = -0.7689554 + 0.4404981\cos(-4.069784638 + 4.069784638t) -$$
$$-1.487035261\sin(-4.069784638 + 4.069784638t)$$

показано на рис. 2 и рис. 3.

$$\omega_2(0) = 10.9,\ \omega_2(1) = 9.9844238895166.$$

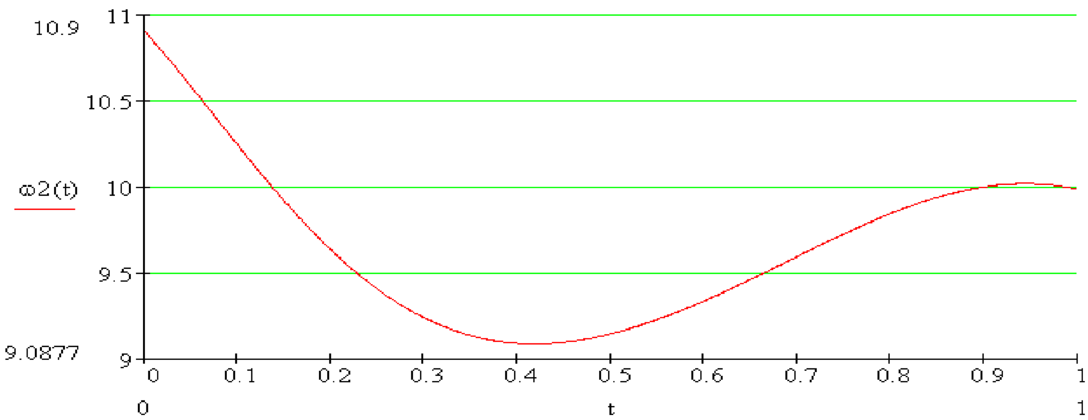


**Рис. 2.**

$$\omega_1(0) = 0.8,\ \omega_3(0) = -1.3$$
$$\omega_1(1) = -0.595268354,\ \omega_3(1) = 0.968809803$$

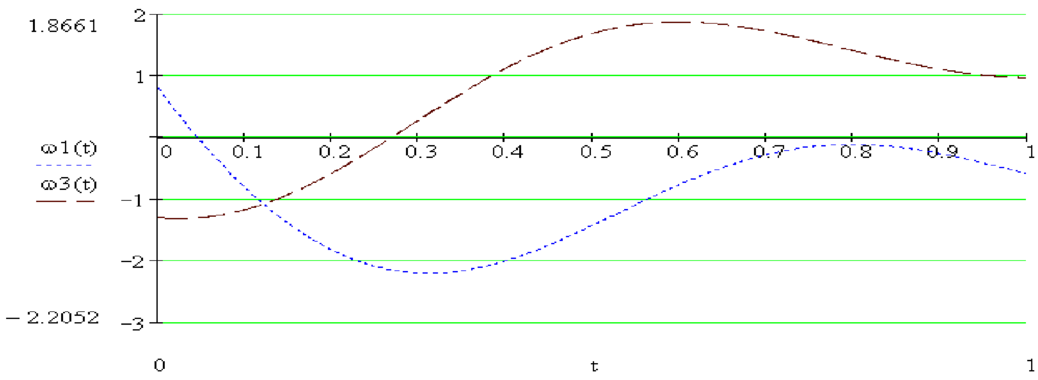


**Рис. 3.**

Дальнейшее уточнение управления с помощью формулы (4) позволяет нам найти управление $u_{17}(t)$, решающее поставленную задачу с требуемой степенью точности. Результат действия управления $u_{17}(t)$ на рис. 4 и рис.5.

$$\omega_2(0) = 10.9,\ \omega_2(1) = 9.9999999843,$$

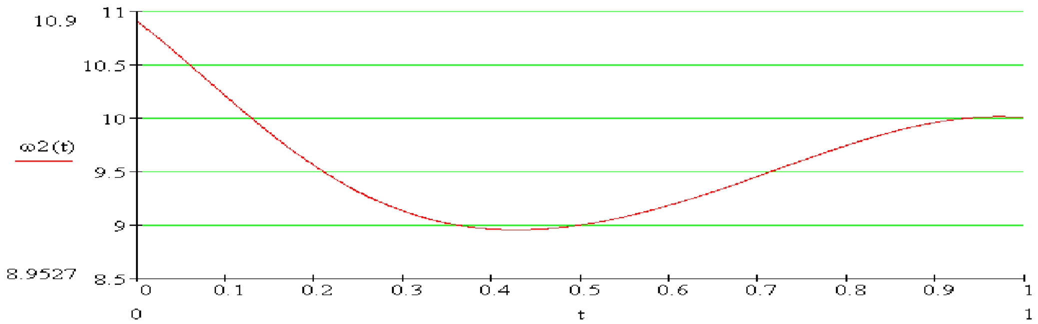


**Рис. 4.**

$$\omega_1(0) = 0.8,\ \omega_3(0) = -1.3$$
$$\omega_1(1) = -0.00000016293,\ \omega_3(1) = 0.00000005278$$

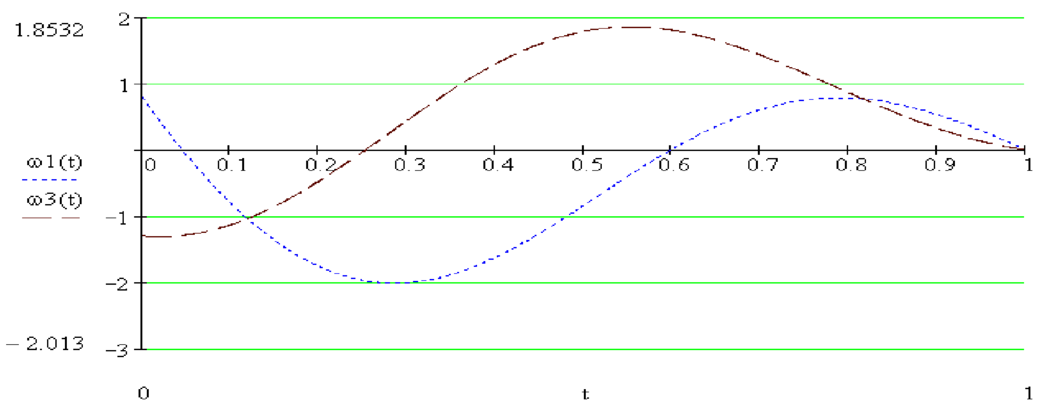


**Рис. 5.**

На 17-ом шаге получены вектор $\mathbf{p}_{17}$ и соответствующее ему управление $u_{17}(t)$:

$$\mathbf{p}_{17}^* = (-0.993918277, -0.963725265, -8.150778573),$$

$$u_{17}(t) = -0.777921 + 0.574785887\cos(-4.069784638 + 4.069784638t) -$$
$$-1.5281953524\sin(-4.069784638 + 4.069784638t)$$

Графики управлений $u_0(t)$ и $u_{17}(t)$ представлены на рис. 6.

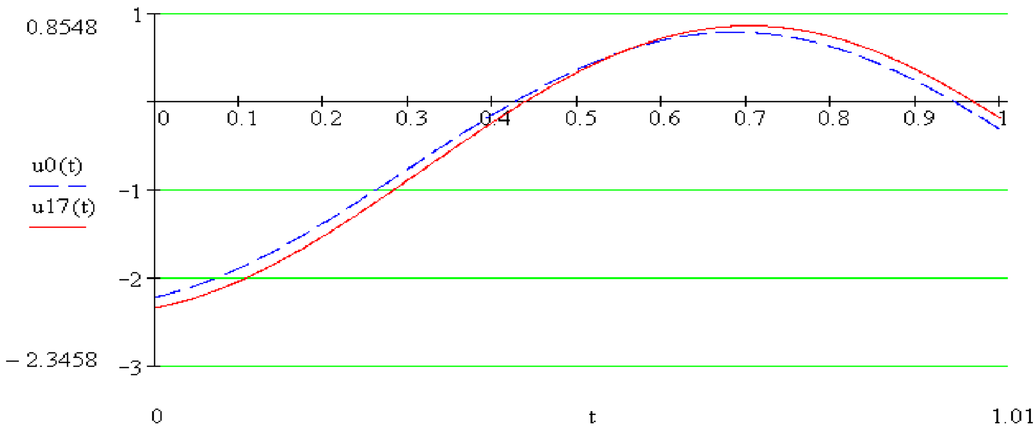


**Рис. 6.**

# 3. Стабилизация твердого тела в направлении заданного орта с помощью гиродинов

Рассмотрим задачу стабилизации ориентации носителя в заданном направлении $\mathbf{s}_0$ [5] при помощи двух гиродинов. Задача, по своей сути, является задачей стабилизации по отношению к части переменных, характеризующих состояние носителя.

Пусть орт $\mathbf{s}_0$, неизменный в абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$, задает направление, в котором должен быть направлен носитель. Направление носителя определяется ортом $\mathbf{r}_0$. Орт $\mathbf{r}_0$ занимает неизменное положение в системе координат $Oxyz$ и жестко связан с носителем. Будем считать, что требуется стабилизировать движение носителя, при котором он находится в положении равновесия и орт $\mathbf{r}_0$ совпадает с ортом $\mathbf{s}_0$. Для решения задачи ориентации носителя в заданном направлении необходимо добавить к уравнениям, описывающим движение механической системы, уравнения [5]

(7) $\qquad \dot{s}_1 = s_2\omega_2 - s_3\omega_2 \qquad$ (123)

В результате имеем систему уравнений (1), (7) и невозмущенное движение системы

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0,\ \xi_1 = 0, \xi_2 = 0,\ q_1 = q_1^0,\ q_2 = q_2^0,$$
$$s_1 = r_1^{(0)},\ s_2 = r_2^{(0)},\ s_3 = r_3^{(0)},$$

где $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{r}_0 = \left(r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, r_3^{(0)}\right)$ – постоянный вектор.

Будем решать задачу стабилизации ориентации по линейному приближению.

Составим уравнения возмущенного движения системы (1), (7), перейдя к новым переменным

$$x_1 = \omega_1,\ x_2 = \omega_2,\ x_3 = \omega_3,\ x_4 = \xi_1, x_5 = \xi_2,\ x_6 = s_1 - r_1^{(0)}, x_7 = s_2 - r_2^{(0)},$$
$$x_8 = s_3 - r_3^{(0)}, x_9 = q_1 - q_1^0, x_{10} = q_2 - q_2^0,$$

и линеаризуем полученную систему в положении равновесия $\mathbf{x} = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$. Первые семь уравнений системы линейного приближения не зависят от оставшихся трех переменных $x_8$, $x_9$, $x_{10}$ и имеют вид

$$A_1\dot{x}_1 = \frac{1}{35J_1}h_1 x_4\left(33\sin q_1^0 - 6\cos q_1^0\right) - \frac{2}{7}u_1 - u_2$$
$$A_2\dot{x}_2 = -\frac{2}{7J_1}h_1 x_4\left(\sin q_1^0 + 3\cos q_1^0\right) + \frac{h_2}{J_2}x_5\sin q_2^0 - \frac{3}{7}u_1$$
$$A_3\dot{x}_3 = -\frac{1}{35J_1}h_1 x_4\left(6\sin q_1^0 - 17\cos q_1^0\right) - \frac{h_2}{J_2}x_5\cos q_2^0 - \frac{6}{7}u_1$$
(8)
$$\dot{x}_4 = \frac{h_1}{35}\Big[\left(6\cos q_1^0 - 33\sin q_1^0\right)x_1 + 10\left(3\cos q_1^0 + \sin q_1^0\right)x_2 +$$
$$+\left(6\sin q_1^0 - 17\cos q_1^0\right)x_3\Big] + u_1$$
$$\dot{x}_5 = h_2\left(x_3\cos q_2^0 - x_2\sin q_2^0\right) + u_2$$
$$\dot{x}_6 = r_2^{(0)}x_3 - r_3^{(0)}x_2$$
$$\dot{x}_7 = r_3^{(0)}x_1 - r_1^{(0)}x_3.$$

Переменная $x_8$ связана с переменными $x_6$, $x_7$ интегралом, так как $\sum_{i=1}^{3} s_i^2 = 1$, поэтому стабилизация невозмущенного движения системы (8) влечет за собой стабилизацию ориентации носителя в заданном направлении. Переменные $x_9$, $x_{10}$ определяют не интересующие нас углы поворота гирокамер соответственно первого и второго гиродинов, поэтому могут быть отброшены.

Исследуем систему (8) на управляемость по всем переменным. Пусть выполнены равенства

$$\mathrm{A}_1 = 230, \mathrm{A}_2 = 310, \mathrm{A}_3 = 210,\ J_1 = 3,\ J_2 = 3,\ w = 500,$$
$$h_1 = J_1 w,\ \ h_2 = J_2 w,\ \ q_1^0 = \pi/3,\ \ q_2^0 = \pi/6.$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ есть система (8), записанная в матричном виде. Рассмотрим следующие матрицы

$$M = \left\{ \mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^2\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^3\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^4\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^5\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^6\mathbf{b}^{\langle 1\rangle} \right\} \text{ и}$$
$$T = \left\{ \mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^2\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^3\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^4\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, A^5\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle} \right\},$$

где $B = \left\{\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}\right\}$, $\mathbf{b}^{\langle 1\rangle} = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, 1, 0, 0, 0\right)^*$, $\mathbf{b}^{\langle 2\rangle} = \left(-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0\right)^*$.

Поскольку определитель матрицы $M$ равен нулю ($\det(M) = 0$), то система (1) не управляема по всем переменным с помощью одного управления $u_1$. В то же время $\det(T) = -0.5014892338 \cdot 10^{12} \neq 0$, следовательно система управляема, если управлять с помощью двух управлений $u_1$ и $u_2$. Из свойства управляемости для линейной системы (8) следует возможность ее стабилизации [6], а поскольку остальные переменные системы (1) не входят в систему (8), то и стабилизируемость (1) по части переменных по линейному приближению [7, с.664].

Построим управления $u_1$, $u_2$, решающие задачу стабилизации для системы (1). Сделаем замену переменных $\mathbf{x} = T\mathbf{y}$. Поскольку матрица $T$ не вырожденная, то система (8) примет вид

(9) $$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = P\mathbf{y} + \mathbf{q}_1 u_1 + \mathbf{q}_2 u_2,$$

где $P = T^{-1}AT$, $\mathbf{q}_1 = T^{-1}\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}$, $\mathbf{q}_2 = T^{-1}\mathbf{b}^{\langle 2\rangle}$, $B = \{\mathbf{b}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{b}^{\langle 2\rangle}\}$.

Путем выбора в качества матрицы $T$ − линейно независимого блока матрицы управляемости системы, получаем матрицу $P$ в виде:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.729085992 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8221729.37 & -0.4572051 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.00048313791 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6162.4866596 & -0.0000004398 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.00000022271 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и следующие вектора $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$

$$\mathbf{q}_1^* = (1,0,0,0,0,0,0), \ \mathbf{q}_2^* = (0,0,0,0,0,0,1).$$

Последнее уравнение содержит только управление $u_2$, тогда выбирая его соответствующим образом, можем обеспечить стабилизацию переменной $y_7$ фазового вектора системы (9). Для остальных уравнений это означает, что в каждом из них переменная $y_7$ монотонно убывает, следовательно, для стабилизации оставшихся переменных фазового вектора достаточно решить задачу стабилизации для системы

(10) $$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8221729.37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6162.4866596 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1.$$

В итоге исходная система (8) распадается после замены переменных на две системы, причем в первой системе содержится управление $u_1$, а во второй управление $u_2$.

Возьмем в качестве второго управления $u_2 = -y_7$, тогда $y_7 = y_7^{(0)} e^{-t}$, где $y_7^{(0)} = y_7(t_0)$ и характеристическое значение $\lambda_7 = -1$. Так как $\mathbf{y} = T^{-1}\mathbf{x}$, то, вычисляя из обратной замены переменную $y_7$, получаем

$$u_2 = 127.06135\omega_1 + 201.37866\omega_2 + 78.76086\omega_3 + 0.75772\xi_1 -$$
$$-0.44756\xi_2 + 1656.0038\left(s_1 - r_1^{(0)}\right) + 1245.95448\left(s_2 - r_2^{(0)}\right)$$

Стабилизирующее управление $u_1$ для системы (10) будем строить по формуле $u_1 = \mathbf{c}^*\mathbf{y}$ [8],

$$\mathbf{c} = \left(T^{-1}\right)^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_5 & p_4 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{v}), \tag{11}$$

где $\mathbf{p}$ − последний столбец матрицы в системе (10), а $\mathbf{v}$ − вектор коэффициентов соответствующего системе характеристического уравнения

$$\lambda^6 + v_1\lambda^5 + v_2\lambda^4 + v_3\lambda^3 + v_4\lambda^2 + v_5\lambda + v_6 = 0.$$

Обозначим корни характеристического уравнения через $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i$, $\lambda_{5,6} = \alpha_3 \pm \beta_3 i$.

Находим компоненты вектора $\mathbf{c}$ коэффициентов управления $u_1 = \mathbf{c}^*\mathbf{y}$, вычисляя их явно с помощью математического пакета для ЭВМ по формуле (11).

Получив явный вид вектора $\mathbf{c}$ коэффициентов управления, как функции переменных $\alpha_i, \beta_i$, рассмотрим задачу о минимизации нормы стабилизирующего управления с обратной связью, где

$$\|u\| = \sup_{\mathbf{y}} \frac{|u(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{y}\|} = \|\mathbf{c}\| = \sqrt{c_1^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \ldots + c_m^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}.$$

Будем искать

$$\min_{\alpha_i \le -1} \|u_1\| = \min_{\alpha_i \le -1} \left(c_1^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \ldots + c_6^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\right)^{1/2}$$

не только по мнимым $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, но и по действительным частям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ корней характеристического уравнения системы. Минимум $\|u_1\|$ ищем в замкнутой области D: $\alpha_1 \le -1$, $\alpha_2 \le -1$, $\alpha_3 \le -1$, $-500 \le \beta_1 \le 500$, $-500 \le \beta_2 \le 500$, $-500 \le \beta_3 \le 500$ методом сопряженных градиентов, начиная спуск с точки $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = -10$, $\beta_3 = 10$.

Получаем $\min_{D} \|u_1\| = \sqrt{685509.494299}$ при $\alpha_1 = -35.000243$, $\alpha_2 = -3.01321$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_1 = 0.107 \cdot 10^{-6}$, $\beta_2 = -58.14119$, $\beta_3 = 0.3189875 \cdot 10^{-6}$.

Подставляя $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ в формулу управления, имеем

$$u_1 = 650.43\omega_1 + 6.5394\omega_2 - 1.65\omega_3 - 77.2166\xi_1 + 2.827968\xi_2 -$$
$$-336.150356\left(s_1 - r_1^{(0)}\right) + 378.726645\left(s_2 - r_2^{(0)}\right)$$

Результаты численного моделирования применения построенных управлений $u_1$, $u_2$ для стабилизации системы (1) с начальным условием

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left(1/45, -1/38, 1/56, 1/34, -1/51, 3/10, 7/10, \sqrt{1}/5\sqrt{2}, \pi/3, \pi/6\right)^*$$

приведены на рис. 7 - рис.9.

$$u_1\big|_{t=0} = 35.7552\,,\;\; u_1\big|_{t=5} = -1.390651\,.$$

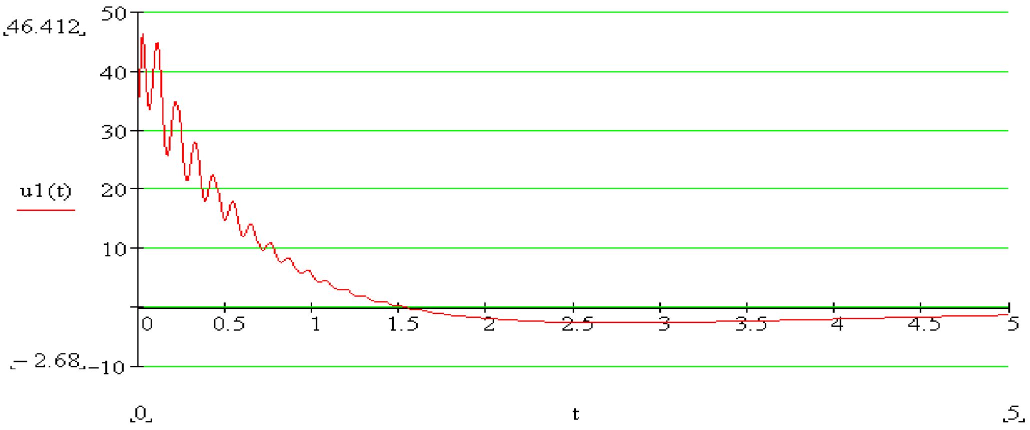


**Рис. 7.**

$$\omega_1(0) = 0.022\,,\; \omega_1(5) = -0.0051331\,,\; \omega_2(0) = 0.02632\,,\; \omega_2(5) = -0.0052057\,.$$

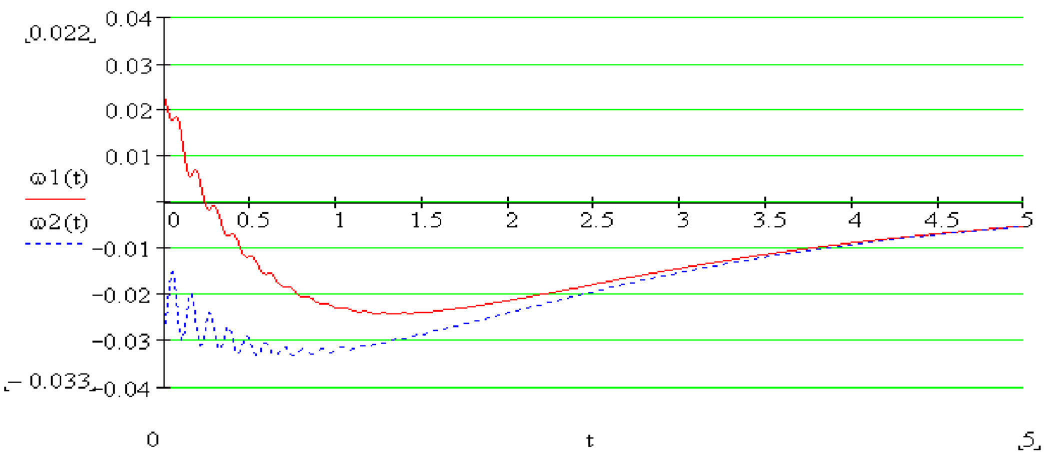


**Рис. 8.**

$$\omega_3(0) = 0.017857\,,\; \omega_3(5) = -0.003473\,.$$

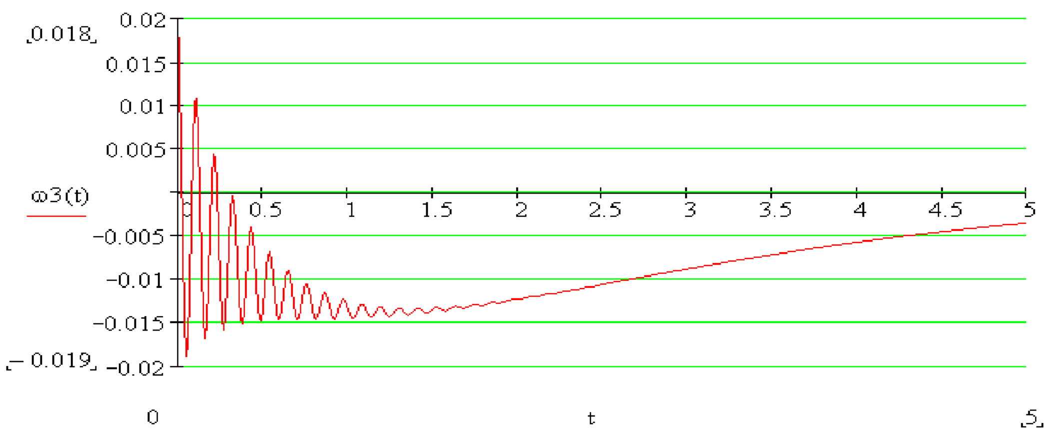


**Рис.9.**

*Замечание.* Если искать $\min\limits_{\alpha_i=-1}\|u_1\|$ только по мнимым частям корней характеристического уравнения системы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ при тех же значениях параметров, то $\min\limits_{\alpha_i=-1}\|u_1\| = \sqrt{1433726.067}$, что гораздо больше $\min\limits_{\mathrm{D}}\|u_1\|$.

# Список литературы


1. Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. Л.: Издательство ЛГУ, 1985. 313 с.
2. P.V. Kharlamov, A.M. Kovalev. Invariant relationsmethod in multibody dynamics. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1997. Vol. 30, No 6. P. 3817-3828.
3. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.:Наука, 1992. 576с.
4. Гладун А.В. Управление вращательным движением твердого тела с помощью двух спарок гиродинов. // Труды Института прикладной математики и механики. 1999. Том 4. С.44-51.
5. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
6. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. – М.: Наука, 1980. – 376 с.
7. Озиранер А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. // Прикладная математика и механика. 1973. Т.37, Вып.4. С.659-665.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.