

УДК 681.533.5

## РАСЧЕТ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ШАРОВОГО ЗАТВОРА В КОНТЕКСТЕ АВТОМАТИЗАЦИИ УЗЛА РЕДУЦИРОВАНИЯ ГАЗА

Кипрушкин А.В., магистрант; Жилкин О.В., магистрант.

(Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта, Россия)

Важной задачей теории и практики автоматизации технологических процессов является определение динамических свойств объекта управления. В данной работе в качестве такого объекта выступает участок трубопровода с краном-регулятором (КР). Шаровой затвор узла редуцирования газа (УРГ) показан на рисунке 1.

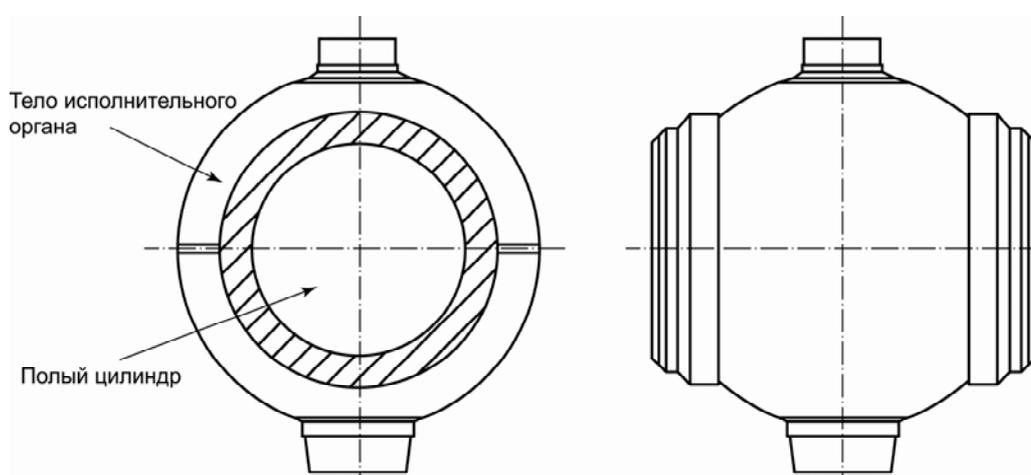


Рисунок 1 – Шаровой затвор узла редуцирования газа

При построении математической модели УРГ, необходимо знать величину момента инерции КР, которая в значительной степени определяет скорость протекания переходных процессов.

Метод вычисления момента инерции КР  $J_K$  заключается в том, что определяется момент инерции шара  $J_{ш}$ , из которого вычитается момент инерции полого цилиндра  $J_{ц}$  (соответствует отверстию в шаре) и момент инерции срезаемых шапок  $J_{шп}$ :

$$J_K = J_{ш} - J_{ц} - J_{шп}. \quad (1)$$

1. Определяем момент инерции шара.

Момент инерции шара радиуса  $R_{ш}$  относительно оси, проходящей через его центр, равен [1]:

$$J_{ш} = \frac{2}{5} m R_{ш}^2; \quad (2)$$

$$m = \rho V;$$

где  $m$  – масса шара;  $\rho$  – плотность стали,  $V$  – объем шара.

2. Находим момент инерции полого цилиндра (рисунок 2).

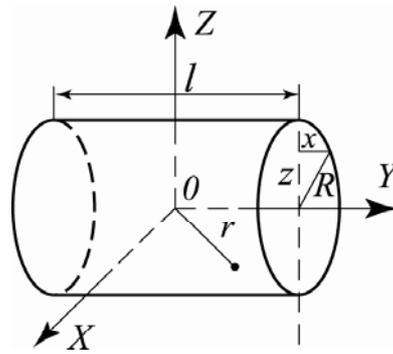


Рисунок 2 – Цилиндр крана-регулятора

Задача нахождения момента инерции сводится к интегрированию:

$$J_{ц} = \int \rho r^2 dV,$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – радиус-вектор от центра координат до точки, находящейся на поверхности цилиндра.

Интеграл берется по всему объему тела  $V$ . Величина  $\rho$  в интеграле является функцией декартовых координат  $x, y, z$ . Нахождение интеграла по объему сводится к нахождению тройного интеграла:

$$J_{ц} = \rho \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Учтем что, при проекции фигуры на плоскость  $yOx, y \in \left[-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}\right]$ , где  $l$

длина цилиндра крана регулятора  $l = 2\sqrt{R_{ш}^2 - R^2}$ . При проекции фигуры на плоскость  $xOz, z \in \left[-\sqrt{R^2 - x^2}; \sqrt{R^2 - x^2}\right]$ , где  $R$  – радиус цилиндра.

Тогда

$$J_{ц} = \rho \int_{-R}^R dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} (x^2 + y^2) dz.$$

Интегрируя выражение, получаем:

$$J_{ц} = \rho \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \left( 2x^2 l + \frac{l^3}{6} \right) dx.$$

Производим замену:  $x = R \sin \alpha, \alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], x^2 = R^2 \sin^2 \alpha,$

$$R^2 - R^2 \sin^2 \alpha = R^2 \cos^2 \alpha, dx = R \cos \alpha d\alpha.$$

Подставляя в интеграл, имеем:

$$J_{ц} = 2\rho l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha d\alpha + \rho \frac{l^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 \alpha d\alpha.$$

После интегрирования, получаем:

$$J_{ц} = \frac{1}{4} \rho l R^2 \pi \left( R^2 + \frac{l^2}{3} \right). \quad (3)$$

3. Определяем момент инерции шапок (рисунок 3).

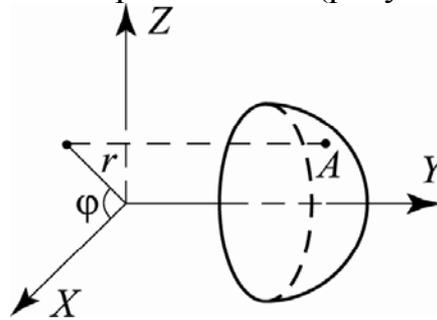


Рисунок 3 – Шапка цилиндра крана-регулятора

Запишем нахождение  $J_{шап}$  в системе цилиндрических координат [2]. В силу симметрии, момент инерции рассматриваемой фигуры будет равен:

$$J_{шап} = 2\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{\sqrt{R_{ш}^2 - R^2}}^{\sqrt{R_{ш}^2 - r^2}} r^2 dy.$$

Точку  $A$  на поверхности можно описать радиус вектором  $r$ , где  $\varphi$  – угол поворота ( $\varphi \in [0; 2\pi]$ ),  $r$  – проекция вектора в плоскости  $xOz$  ( $r \in [0; R]$ ).

Проекция фигуры на плоскость  $zOy$  имеет вид (рисунок 4).

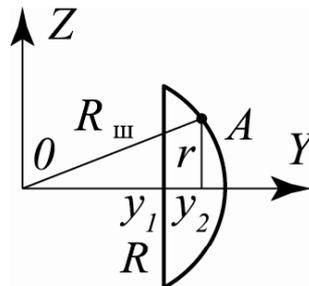


Рисунок 4 – Проекция фигуры на плоскость  $zOy$

На рисунке 4:  $y_1 = \sqrt{R_{ш}^2 - R^2}$ ,  $y_2 = \sqrt{R_{ш}^2 - r^2}$ , – пределы интегрирования ( $y \in [\sqrt{R_{ш}^2 - R^2}, \sqrt{R_{ш}^2 - r^2}]$ ).

Тогда

$$J_{шап} = \rho 4\pi \int_0^R r^3 \left( \sqrt{R_{ш}^2 - r^2} - \sqrt{R_{ш}^2 - R^2} \right) dr.$$

Произведем замену:  $R_{ш}^2 - r^2 = t$ ,  $dt = -2r dr$ ,  $r dr = -\frac{1}{2} dt$ .

Подставляя в интеграл, имеем:

$$J_{\text{шар}} = \rho \left( 4\pi \int_{R_{\text{ш}}^2}^{R_{\text{ш}}^2 - R^2} -\frac{1}{2}(R_{\text{ш}}^2 - t^2)\sqrt{t} dt - 4\pi \cdot \sqrt{R_{\text{ш}}^2 - R^2} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R \right).$$

Интегрируя выражение, получаем:

$$J_{\text{шар}} = \rho \left[ -\frac{4}{3} \pi R_{\text{ш}}^2 \left( \left( \frac{l}{2} \right)^3 - R_{\text{ш}}^3 \right) + \frac{4\pi}{5} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^5 - R_{\text{ш}}^5 \right) - 4\pi \frac{l}{2} \frac{R^4}{4} \right]. \quad (4)$$

Таким образом, подставляя (2), (3), (4) в (1) и производя простейшие преобразования, получаем окончательно

$$J_{\text{к}} = \frac{\pi \rho}{30} \sqrt{R_{\text{ш}}^2 - R^2} (16R_{\text{ш}}^4 - 12R^2 R_{\text{ш}}^2 + 11R^4).$$

Для КР, эксплуатируемого на магистральном газопроводе ООО «Севергазпром», рассчитано численное значение момента инерции

$$J_{\text{к}} = 512,5857 \text{ кг} \cdot \text{м}^3.$$

Благодаря полученному выражению для момента инерции КР, удалось реализовать математическую модель участка трубопровода с краном регулятором с шаровым затвором, что дает возможность построения эффективной системы управления УРГ.

#### Перечень ссылок

1. Энциклопедия газовой промышленности. 4-е изд. Пер. с франц.; Ред. пер. К. С. Басниев. – М.: Акционерное общество «ГВАНТ», 1994. – 884 с.: ил.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.