УДК 681.51: 622.815

# ИССЛЕДОВАНИЕ НАГРЕВА ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕРМОКАТАЛИТИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ МЕТАНА

**Новикова К.Е., студентка**

*(Донецкий национальный технический университет, Украина)*

**Теплофизическая модель.** Используется одномерная модель т.е. температура проводника *T* считается неизменной по сечению . Принято, что форма проволоки идеально цилиндрическая и неизменна в течение процесса. Учитывается зависимость теплофизических свойств материала от температуры. Нагрев проволоки происходит за счет джоулева тепловыделения $j^2/\sigma$ . Сброс теплоты идет за счет следующих процессов:

*1. Естественная конвекция*. Процесс считается квазистационарным; не учитываются потоки теплоты в воздухе в направлении вдоль проволоки, вызываемые неравномерностью температуры по ее длине - то есть для расчета теплоотдачи с малого участка длины используется модель бесконечно длинного цилиндра . Тогда тепловой поток с поверхности проволоки *q*:

$$q = \alpha(T)(T - T_0),\ (1)$$

где для определения $\alpha(T)$ используется формула М.А. Михеева, дающая наибольшее значение $\alpha$ для переходного от пленочного (псевдотеплопроводность) к ламинарному режиму течения, характерному для охлаждения тонких проволочек на воздухе ($Gr_m \cdot Pr_m<1$) [1]:

$$Nu_m = 1.18\left(Gr_m \Pr_m\right)^{0.125} \quad (2)$$

Значения безразмерных критериев берутся при температуре $T_m = (T+T_0)/2$ . Подставив в (2) выражения для них , и введя $\theta = T/T_0$ , получим:

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 \lambda(\theta_m)\left(\frac{\theta - 1}{(\theta_m + 1)\nu(\theta_m)a(\theta_m)}\right)^{0.125},\ \alpha_0 = 1.18\frac{\lambda_0}{d}\left(\frac{d^3 g}{\nu_0 a_0}\right)^{0.125} \quad (3)$$

Где $\theta_m = T_m / T_0$ , $\tilde{\lambda}(\theta) = \dfrac{\lambda(\theta)}{\lambda_0}$ , $\tilde{\nu}(\theta) = \dfrac{\nu(\theta)}{\nu_0}$ , $\tilde{a}(\theta) = \dfrac{a(\theta)}{a_0}$ - соответственно теплопроводность, кинематическая вязкость и температуропроводность воздуха, отнесенные к своим значениям при $T = T_0$.

*2. Излучение*. Тепловой поток определяется по закону Стефана-Больцмана:

$$q = \sigma_{„з} \varepsilon(T) T^4 \quad (4)$$

где $\sigma_{СБ}$=5.67·10$^{-8}$ Дж/м$^2$·К$^4$ - постоянная Стефана-Больцмана, *ε(T)* - степень черноты чувствительного элемента (ЧЭ). Воздух считается диатермичной средой.

*3. Теплопроводность.* Учитывается , что, потоки теплоты и заряда должны быть связанны друг с другом , так как и теплота и заряд в металле переносятся свободными электронами. Эта связь описывается уравнениями, получаемыми в общей теории переноса (из решения кинетического уравнения) [2]:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} - \sigma S\vec{\nabla}T \qquad (5.1)$$

$$\vec{q} = -\Pi\sigma\vec{E} - \lambda\vec{\nabla}T \qquad (5.2)$$

Здесь $\vec{j}$ , $\vec{q}$ ,$\vec{E}$ - плотность тока, тепловой поток и напряженность поля в проводнике; $\sigma$, $\lambda$ , $S$ - проводимость, теплопроводность и абсолютная термоэдс (коэффициент термо-ЭДС) материала проводника (*П* = *ST* - коэффициент Пельтье ). Формула (5.2) показывает, что теплота передается как за счет теплопроводности, так и за счет “ макроскопического” движения электронного газа - аналог вынужденной конвекции в “обычном” газе или жидкости. Оценка показывает , что тепловой поток за счет электронной конвекции при $j \approx 10^8$ А/м$^2$ может составлять $\approx 10^6$ Вт/м$^2$, что сравнимо с теплопроводностным потоком (($\approx 10^7 - 10^8$ Вт/м$^2$, в данном случае, как показал расчет, до 5·10$^7$ Вт/м$^2$), поэтому его, по видимому, необходимо учитывать.

Для этого выразим $\sigma\vec{E}$ из (5.1) и подставив в (5.2) получим:

$$\vec{q} = -ST\left(\vec{j} + \sigma S\vec{\nabla}T\right) - \lambda\vec{\nabla}T = -ST\vec{j} - \left(\lambda + \sigma S^2 T\right)\vec{\nabla}T = -ST\vec{j} - \lambda\vec{\nabla}T \quad (6)$$

Последнее равенство в (6) записано с учетом того, что величина $\sigma S^2 T$, которая учитывает перенос теплоты током, возникающим под действием данного градиента температур (а не под действием внешнего поля)$\ll \lambda$, вследствие малости термоэдс ($S \approx 10^{-6} - 10^{-5}$ В/К). Уравнение (6) представляет собой закон Био-Фурье с поправкой на “электронную конвекцию”.

Для определения поля температуры в проволоке $T(x,t)$ запишем с учетом (1), (4) и (6) уравнение теплопроводности и граничные условия к нему:

$$C_v(T)\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{4IS(T)T}{\pi d^2}\right)+\frac{16I^2\rho_e(T)}{\pi^2 d^4}-\frac{4\alpha(T)}{d}(T-T_0)-\frac{4\varepsilon(T)\sigma_{\text{СБ}}}{d}T^4$$

(7.1)

$T\big|_{x=0}=T\big|_{x=l}=T$ (7.2) , $T(x,0)=T_0$ (7.3)

(теплотдача с поверхности приведена к объемным стокам тепла). Здесь $C_v$- удельная теплоемкость платины, $\rho$ – плотность, $\rho_e$- удельное электрическое сопротивление, $\lambda$ - теплопроводность, $\varepsilon$ - степень черноты, $I$ - сила тока в проводнике. Координата $x$ направлена вдоль проводника по току.

**Электротехническая модель.** Для определения зависимости силы тока в проводнике $I$ от напряжения на его концах $U$ можно пользоваться законом Ома. Для этого воспользуемся (5.1), спроецировав его предварительно на направление проводника $s$, выразив через него $E_s$, умножив обе части полученного равенства на площадь проводника $\pi\, d^2/4$ (без нарушения общности ее можно считать постоянной по длине) и проинтегрировав по длине проводника $l$ с учетом условия неразрывности $j_s(x)$=const:

$$E_S=\frac{j_S}{\sigma}+S\frac{\partial T}{\partial x}\Rightarrow\frac{\pi d^2}{4}\int_l E_s ds=\frac{\pi d^2}{4}\int_l\frac{j_s}{\sigma}ds+\frac{\pi d^2}{4}\int_l S\frac{\partial T}{\partial x}dx\Rightarrow$$
$$\frac{\pi d^2}{4}U=\frac{l}{\sigma}I+\frac{\pi d^2}{4}\int_l SdT\Rightarrow U=IR+\int_l SdT=IR \qquad (8)$$

где $R$- полное сопротивление проводника. Последний интеграл в (8) равен нулю, если температуры обоих концов проводника равны.
Записав уравнение второго правила Кирхгофа для цепи на рис.1, получим:

$$E_{\text{в}}=U_R+U_L\Rightarrow E_{\text{в}}=I\left(R_\Sigma+R_{\text{пр}}\right)+L_{\text{в}}\frac{dI}{dt},I(0)=0 \quad (9)$$

Здесь $R_\Sigma=R_{\text{б}}+R_{\text{в}}+R_{\text{п}}$ - активное сопротивление в цепи, неизменное в течение процесса; $R_{\bullet\text{р}}=\int_0^l\frac{4\rho_e(T(x))}{\pi d^2}dx=\frac{R_0}{l}\int_0^l\frac{\rho_e(T(x))}{\rho_e(T_0)}dx$ - сопротивление проволоки с учетом нагрева ($R_0$ - начальное сопротивление проволоки).

**Математическая модель.** Для численного решения уравнения и граничные условия (7),(9) приводятся к безразмерному виду. Помимо безразмерной величины $\theta$. вводятся $\chi=x/\,l$ ; $\tau=t\,/t_{\text{х}}$ , где $t_x=L/R_{\square}$ (постоянная времени переходного процесса в $R$-$L$ цепи); ток $i=I/I_{\text{х}}$ ,где $I_{\text{х}}=E_{\text{в}}/R_{\square}$ ( установившийся ток в цепи без учета сопротивления проволоки $R_{пр}$). Все функции от температуры в (7),(9) (теплоемкость, теплопроводность и т.д.) записываются в виде $f(T) = f_0 \cdot \tilde{f}(\theta)$, где $f_0 = f(T_0)$, $\tilde{f}(\theta)$ - некоторая безразмерная функция. Получаем:

$$\frac{\tilde{C}_v(\theta)}{Fo}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\tilde{\lambda}(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\chi} + Pel\cdot\theta\cdot i\right) + Om\cdot i^2\cdot\tilde{\rho}_e(\theta) - Bio\cdot\tilde{\alpha}(\theta)(\theta-1) - St\cdot\tilde{\varepsilon}(\theta)\theta^4$$

(10.1)

$\theta|_0 = \theta|_1 = \theta_з$ , $\theta(\chi,0) = 1$ (10.2); $i\cdot r + \dfrac{di}{d\tau} = 1$ , $i(0) = 0$ (10.3)

Здесь $Fo = \dfrac{t_x\lambda_0}{l^2 C_{v0}\rho} = 0.014$, $Om = \dfrac{16\cdot I_x^2\cdot l^2\rho_{e0}}{\pi^2 d^4\lambda_0 T_0} = 33.604$, $Bio = \dfrac{4\alpha_0 l^2}{\lambda_0 d} = 5.489$

, $St = \dfrac{4\sigma T_0^3}{\lambda_0 d} = 0.31$ , $Pel = \dfrac{4I_0 l S_0}{\pi d^2\lambda_0} = 0.204$ , $r = 1 + \dfrac{R_0}{R_\Sigma}\cdot\int\limits_0^l \tilde{\rho}_e(\theta(\chi))d\chi$ , $\theta_з = T_з/T_0$.

Для решения используется чисто неявная линейная схема [3]:

$$c(u_j^n)\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau'} = \frac{1}{h}\left(a_{j+1}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h} - a_j\frac{u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{q_{j+1}u_{j+1}^{n+1}-q_{j-1}u_{j-1}^{n+1}}{2h}\right) + f(u_j^n, i^{n+1}) \quad (11.1)$$

$$u_j^0 = 1 \quad (11.2) \quad , \quad u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = \theta_з \quad (11.3)$$

$$i^{n+1}\cdot d + \frac{i^{n+1}-i^n}{\tau'} = 1 \quad , \quad i^0 = 0 \quad (11.4)$$

Здесь $u_j^n$ - искомая сеточная функция, описывающая распределение температуры, $n$-индекс временного слоя , $j$ - индекс по координате; $\tau'$ - шаг сетки по времени, $h$ - по координате, $a_i = 0.5\left(\tilde{\lambda}(u_j^n) + \tilde{\lambda}(u_{j-1}^n)\right)$ ,

$c(u) = \dfrac{\tilde{C}_v(u)}{Fo}$ , $q_i = i^{n+1}\tilde{S}(u_j^n)$, $f(u,i) = Om\cdot i^2\cdot\tilde{\rho}_e(u) - Bio\cdot\tilde{\alpha}(u)(u-1) - St\cdot\varepsilon(u)u^4$,

$d = 1 + \tilde{R}\sum\limits_{j=0}^{N-1} 0.5\left(\tilde{\rho}_e(u_j^n) + \tilde{\rho}_e(u_{j+1}^n)\right)h$, $\tilde{R} = \dfrac{R_0}{R_\Sigma}$, $N$ - число шагов по координате ($h\cdot N=1$). Канонический вид системы (11.1)-(11.3) на $n+1$ временном слое:

$$A_j^n u_{j-1}^{n+1} - C_j^n u_j^{n+1} + B_j^n u_{j+1}^{n+1} = -F_j^n \qquad (1 < j < N) \quad (12.1)$$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = \theta_з \quad (12.2)$$

Здесь $A_j^n = a_j - 0.5hq_{j-1}^n$, $C_j^n = a_{j+1} + a_j + c\left(u_j^n\right)\cdot h^2/\tau'$,

$B_j^n = a_j + 0.5hq_{j+1}^n$, $F_j^n = f\left(u_j^n, i^{n+1}\right)\cdot h^2 + u_j^n\cdot c\left(u_j^n\right)\cdot h^2/\tau'$. На каждом временном слое, начиная с нулевого ( начальное условие ), сначала из (11.4) определяется $i^{n+1}$ затем (12) решается относительно $u^{n+1}$ методом прогонки [4] .

Все численные расчеты и аппроксимация табличных данных выполнялись при помощи пакета MathCad 2000 Pro.[5].Установлена зависимость коэффициента тепла от температуры

$$\alpha=\alpha_0(+\gamma T) \qquad (13)$$

и учитывая зависимость сопротивления от температуры

$$R=R_0(1+\beta T) \qquad (14)$$

где:

T – температура ЧЭ, град.;

S – площадь поверхности ЧЭ;

$\alpha$ – теплоотдача ЧЭ,

$\alpha_0$ – теплоотдача при T = $0^0$ C;

$I$ – ток протекающий через ЧЭ. А;

$R$ – сопротивление ЧЭ, Ом;

$R_0$ – сопротивление ЧЭ при T = $0^0$ C ;

$\beta$ – температурный коэффициент сопротивления, град$^{-1}$.

Из уравнений (1), (13) и (14) следует зависимость тока ЧЭ

$$I=\frac{U}{\sqrt[3]{\frac{\gamma R_0^2(1+\beta T)U}{\alpha_0 S(1+\gamma T)}}} \quad . \qquad (15)$$

Уравнение (15) позволяет построить теоретическую вольт-амперную характеристику ЧЭ в среде чистого воздуха.

## Перечень ссылок

1. *1.* Исаченко В.П. ,.Осипова В.А., Сукомел А.С “Теплопередача”, Москва , Энергоиздат , 1981, С. 207
2. Протасов Ю.С. , Чувашев С.Н. “Физическая электроника газоразрядных устройств . Эмиссионная электроника” , Москва , Высшая школа , 1992 , С. 181; 205.
3. Самарский А.А , Гулин А.В. “Численные методы” , Москва , Наука ,1989, С. 281
4. Амосов А.А , Дубинский Ю.А. , Копченова Н.В. “Вычислительные методы для инженеров” , Москва , Высшая школа , 1994, С 161
5. Дьяконов В.П. , Абраменкова И.В. “MathCad 2000 в математике, физике и в Internet” , Москва , Нолидж , 2000.