УДК 519.217.1

Самородов В.Б., д.т.н., Клименко Т.А., Серая О.В., к.т.н.

НТУ «ХПИ», г. Харьков

МАРКОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СПРОСА

Рассмотрен подход к описанию случайного процесса спроса на товар как процесса обладающего марковским свойством, позволяющий корректировать политику заказов на товар путём применения соответствующего математического аппарата.

Введение

В современной логистике управления запасами в сфере технического обслуживания автомобилей и торговли запасными частями для них важнейшая роль отводится анализу случайного процесса спроса. Это обусловлено тем, что для предприятий автосервисной отрасли характерна работа в постоянно изменяющихся условиях. Основными особенностями являются следующие:

– неравномерность входящего потока требований по часам суток, дням недели и месяцам;

– неравномерность входящего потока по номенклатуре работ, маркам автомобилей и последовательности их поступления;

– разнообразие потребностей в запасных частях, которые часто выходят за рамки имеющейся на складе номенклатуры запасных частей.

В силу данных особенностей, вопросы качественной аппроксимации процесса спроса на товар приобретают особую актуальность и значимость для принятия оптимальных решений при управлении запасами. В то же время поверхностный анализ реального процесса спроса показывает, что он нестационарен по корреляционной функции. Эта нестационарность наглядно проявляется в существенных различиях величины спроса в разные дни недели. Указанное свойство процесса является следствием того, что факторы, определяющие ежедневный спрос, в каждый день недели действуют по-разному. До настоящего времени исследований по нестационарности спроса по его корреляционной функции не проводилось, что подчеркивает актуальность задачи исследования в этом направлении.

Анализ публикаций

На сегодняшний день в задачах управления многономенклатурными запасами не существует общепринятого методологического подхода к управлению такими запасами, о чем указывается в работе [1], а также обсуждается в материалах форумов крупных специализированных логистических интернет-сайтов [2]. В современной теории управления запасами принято использовать преимущественно критерий минимума издержек для оптимизации работы с многономенклатурными запасами [3]. В то же время в работе [1] предложен критерий, позволяющий оптимизировать управление такими запасами по величине средней прибыли предприятия. Важным аспектом при использовании данного критерия является качество аппроксимации процесса спроса на товар, результаты которой могут быть использованы при дальнейших расчетах.

Постановка задачи исследования

В отличие от общепринятого подхода к описанию случайных процессов (выделение детерминированной составляющей наблюдаемого процесса, анализ случайной составляющей, оставшейся после выделения детерминированной, после чего получающийся при этом центрированный процесс описывается плотностью распределения), рассмотрим другой подход к описанию процесса спроса на товар. Разобьем этот процесс на отдельные компоненты, соответствующие спросу в каждый день недели и проанализируем. Таким образом, возникает процесс спроса товара по понедельникам, процесс спроса по вторникам и т.д. Все они, очевидно, обладают марковским свойством [4], что подтверждается независимостью спроса в определенный момент времени от того, каким образом он формировался до этого момента.

Зафиксируем один из этих процессов. Марковский характер процесса дает возможность анализировать его с использованием соответствующего математического аппарата. При этом естественную дискретизацию процесса во времени целесообразно дополнить дискретизацией в пространстве.

Для этого диапазон возможных значений спроса на конкретный товар $\left[\theta_{\min},\theta_{\max}\right]$ разобьем на поддиапазоны, присвоив каждому из них соответствующий ранг, например, следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\text{ранг 1 — чрезвычайно низкий спрос, } \theta\in\left[\theta_{\min},\theta_1\right],\\
&\text{ранг 2 — низкий спрос, } \theta\in\left[\theta_1,\theta_2\right],\\
&\text{ранг 3 — средний спрос, } \theta\in\left[\theta_2,\theta_3\right],\\
&\text{ранг 4 — высокий спрос, } \theta\in\left[\theta_3,\theta_4\right],\\
&\text{ранг 5 — чрезвычайно высокий (ажиотажный) спрос, } \theta\in\left[\theta_4,\theta_{\max}\right].
\end{aligned}\tag{1}$$

Каждому рангу поставим в соответствие состояние процесса, в результате наблюдаемый процесс спроса может быть представлен как процесс случайного блуждания марковской цепи (МЦ) на дискретном множестве возможных состояний. Как известно, эволюция МЦ определяется стохастической матрицей вероятностей переходов цепи из одного состояния в другое. При этом, если марковский процесс однороден, то элементы матрицы переходов не меняются во времени. Тогда для МЦ существует стационарное распределение состояний, которое может быть рассчитано. Однако реальный процесс спроса подвержен колебаниям (в частности, сезонным), которые приводят к неоднородности соответствующего марковского процесса. Видимые проявления этого процесса состоят в увеличении вероятностей попадания в крайние из возможных состояний процесса (чрезвычайно низкий или чрезвычайно высокий спрос), что вызывает необходимость изменения политики заказов на товар. При этом важной является задача отыскания продолжительности пребывания процесса на множестве возможных состояний до попадания в заданные состояния.

Основной материал

С учетом вышесказанного предложим следующую схему анализа процесса спроса. Выберем диапазон возможных значений спроса и сформируем множество состояний процесса. Затем, обрабатывая реальные данные о переходах процесса из одних состояний в другие, оценим элементы стохастической матрицы. При этом на каждом шаге оценивания проверим статистическую гипотезу об однородности процесса. В случае однородности процесса рассчитывается вектор стационарных вероятностей МЦ, а также закон распределения продолжительности пребывания процесса до попадания в граничные состояния. Если же гипотеза об однородности отвергается, то влиянием эволюционных факторов (например, сезонных) пренебрегать нельзя. В этом случае определяется новый диапазон возможных значений процесса, формируется новая матрица вероятностей переходов и процедура анализа продолжается.

Рассмотрим эту схему в общем виде. Пусть для процесса спроса с множеством состояний $\left\{1,2,\ldots,r^0\right\}$ осуществлена статистическая оценка набора вероятностей $\left\{\tilde{\omega}_{\ell_1,\ell_2,k,k+1}\right\}$

переходов из состояния ℓ_1 в момент времени k в состояние ℓ_2 в момент времени $k+1$. Если считать, что марковская цепь является однородной, то $\tilde{\omega}_{\ell_1,\ell_2,k,k+1} \equiv \tilde{\omega}_{\ell_1,\ell_2}$.

Совокупность вероятностей $\tilde{\omega}_{\ell_1,\ell_2}$ образует стохастическую матрицу

$$\underline{\tilde{W}} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{11} & \tilde{\omega}_{12} & \tilde{\omega}_{13} & \dots & \tilde{\omega}_{1r} \\ \tilde{\omega}_{21} & \tilde{\omega}_{22} & \tilde{\omega}_{23} & \dots & \tilde{\omega}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\omega}_{r^0 1} & \tilde{\omega}_{r^0 2} & \tilde{\omega}_{r^0 3} & \dots & \tilde{\omega}_{rr} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим задачу отыскания закона распределения времени достижения марковской цепью состояний, соответствующих границам возможного диапазона значений спроса. Так как попадание процесса в граничные состояния означает переход к новому этапу исследования, то для отыскания закона распределения времени блуждания МЦ до реализации соответствующего события удобно эти граничные состояния считать поглощающими. Объединим поглощающие состояния, образовав новую марковскую цепь. При этом множество возможных состояний цепи сократится. Пусть число этих состояний будет равно r. Перенумеруем состояния цепи таким образом, чтобы поглощающему состоянию марковской цепи соответствовал номер r.

Элементы стохастической матрицы $\underline{W} = \left(\omega_{\ell_1\ell_2}\right)$ этой цепи образуются по правилу [4]:

$$\omega_{\ell_1\ell_2} = \begin{cases} \tilde{\omega}_{\ell_1\ell_2}, & \ell_1 \in \{1, 2..., r\}, \\ \tilde{\omega}_{\ell_1 r} + \tilde{\omega}_{\ell_1 r+1}, & \ell_1 \in \{1, 2..., r\}. \end{cases} \tag{2}$$

Стохастическая матрица $\underline{W}$ имеет вид

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1r} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

или

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{R} \\ \underline{0} & \underline{E} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $\underline{Q}$ — матрица, описывающая поведение цепи на множестве невозвратных состояний; $\underline{R}$ — матрица, элементы которой характеризуют вероятности переходов из невозвратных состояний в поглощающие; $\underline{E}$ — единичная матрица, порядок которой определяется числом поглощающих состояний; $\underline{0}$ — ноль-матрица.

Как известно, стохастическая матрица марковской цепи вместе с начальным распределением вероятностей пребывания процесса в возможных своих состояниях содержит всю информацию о поведении процесса, описываемого цепью. Опишем процедуру отыскания закона распределения времени пребывания процесса на множестве невозвратных состояний до попадания в поглощающее состояние.

Искомый закон распределения времени пребывания можно получить, если перейти к непрерывной аппроксимации рассматриваемого дискретного процесса. С этой целью вложим изучаемый дискретный процесс в марковский процесс с непрерывным временем. Введем множество возможных состояний следующим образом:

E_k — k-ое состояние спроса, $k = 1, 2, \dots, r$.

Совместим первое состояние со средним значением спроса.

Так как после попадания в состояние r процесс уже не возвращается ни в одно из состояний множества $\{1,2,\ldots,r-1\}$, то состояние r является поглощающим. Соответствующая стохастическая матрица вероятностей переходов имеет вид

$$\underline{W}=\begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1r-1} & \omega_{1,r} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2,r-1} & \omega_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{r-1,1} & \omega_{r-1,2} & \ldots & \omega_{r-1,r-1} & \omega_{r-1,r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Сформируем элементы инфинитезимальной матрицы $\underline{A}=\{a_{ij}\}$ интенсивностей переходов по правилу:

$$a_{ij}=\omega_{ij},\ i=1,2,\ldots,r,\ j=1,2,\ldots,r,\ i\neq j;$$

$$a_{ii}=-\sum_{i\neq j} a_{ij}=-q_{ii};\qquad a_{ij}\geq 0,\ a_{ii}\leq 0,\ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}=0. \tag{6}$$

С учетом этого инфинитезимальная матрица $\underline{A}$ принимает вид

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} -q_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \ldots & \omega_{1,r-1} & \omega_{1r} \\ \omega_{21} & -q_{22} & \omega_{23} & \ldots & \omega_{2,r-1} & \omega_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{r-1,1} & \omega_{r-1,2} & \omega_{r-1,3} & \ldots & -q_{r-1,r-1} & \omega_{r-1,r} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Введем $\underline{\pi}(t)=[\pi_1(t),\pi_2(t),\ldots,\pi_r(t)]^T$ — распределение вероятностей пребывания системы в своих возможных состояниях в момент времени t. Как известно, компоненты вектор-функции $\underline{\pi}(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\underline{\pi}(t)}{dt}=A^T\,\underline{\pi}(t), \tag{8}$$

с начальным условием $\underline{\pi}(0)=(1,0,0,\ldots,0)^T$, соответствующим исходному распределению вероятностей состояний процесса.

Решение системы дифференциальных уравнений (8) отыскивается в виде:

$$\underline{\pi}(t)=e^{t\underline{A}^T}\,\underline{\pi}(0). \tag{9}$$

В случае поглощающей марковской цепи инфинитезимальная матрица $\underline{A}$ (7) содержит нолевую строку, и поэтому для отыскания решения системы дифференциальных уравнений (8) поступим следующим образом: образуем квадратную матрицу $\underline{\tilde{A}}$ путем вычеркивания из матрицы $\underline{A}$ последних столбца и строки.

В этом случае система дифференциальных уравнений примет вид

$$\frac{d\tilde{\pi}_i(t)}{dt}=\underline{\tilde{A}}_i^{\,T}\,\underline{\tilde{\pi}}(t), \tag{10}$$

где $\tilde{A}_i$ — i-ый столбец матрицы $\underline{\tilde{A}}$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

По аналогии с (9) можно записать:

$$\underline{\tilde{\pi}}(t) = e^{t\underline{\tilde{A}}^T}\,\underline{\tilde{\pi}}(0)\,, \qquad (11)$$

где $\underline{\tilde{A}}$ — матрица, полученная из матрицы $\underline{A}$ (7) путем вычеркивания последних столбца и строки,

$$\dim \underline{\tilde{A}} = (r-1)\times(r-1)\,;$$

$\underline{\tilde{\pi}}(0)$ — вектор начального распределения,

$$\dim \underline{\tilde{\pi}} = (r-1)\times 1\,.$$

Для отыскания r-ой компоненты вектора $\underline{\pi}(t)$ воспользуемся уравнением

$$\pi_r(t) = \sum_{i=1}^{r-1} \omega_{ir}\tilde{\pi}_i(t)\,. \qquad (12)$$

Получим аналитическое выражение для $\tilde{\pi}_i(t)$. Непосредственное интегрирование выражения (10) с учетом (11) дает следующий результат:

$$\tilde{\pi}_i(t) = \int_0^t \underline{\tilde{A}}^T{}_i\,\underline{\pi}(\tau)d\tau = \underline{\tilde{A}}^T{}_i \int_0^t e^{\tau\underline{\tilde{A}}^T}\tilde{\pi}(0)d\tau\,, \qquad (13)$$

$$\tilde{\pi}_i(t) = \underline{\tilde{A}}^T{}_i\left(\underline{\tilde{A}}^T\right)^{-1}\left(e^{t\underline{\tilde{A}}^T} - E\right)\tilde{\pi}(0)\,. \qquad (14)$$

Последнее уравнение системы (8) можно записать как

$$\frac{d\pi_r(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r-1} a_{ir}\tilde{\pi}_i(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_{ir}\underline{\tilde{A}}^T{}_i\left(\underline{\tilde{A}}^T\right)^{-1}\left(e^{-t\underline{\tilde{A}}^T} - \underline{E}\right)\underline{\tilde{\pi}}(0)\,. \qquad (15)$$

Тогда

$$\pi_r(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{r-1} a_{ir}\underline{\tilde{A}}^T{}_i\left(\underline{\tilde{A}}^T\right)^{-1}\left(e^{\tau\underline{\tilde{A}}^T} - \underline{E}\right)\underline{\tilde{\pi}}(0)d\tau\,. \qquad (16)$$

Окончательный результат имеет вид

$$\pi_r(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_{ir}\underline{\tilde{A}}^T{}_i\left(\underline{\tilde{A}}^T\right)^{-1}\left[\left(\underline{\tilde{A}}^T\right)^{-1}\left(e^{t\underline{\tilde{A}}^T} - \underline{E}\right) - Et\right]\underline{\tilde{\pi}}(0)\,. \qquad (17)$$

Закон распределения $F(t)$ продолжительности пребывания исследуемого процесса на множестве возможных состояний до поглощения совпадает с $\pi_r(t)$, т.е.

$$F(t) = \pi_r(t) = \sum_{i=1}^{r-1} a_{ir}\underline{\tilde{A}}^T{}_i\left(\underline{\tilde{A}}^T\right)^{-1}\left[\left(\underline{\tilde{A}}^T\right)^{-1}\left(e^{t\underline{\tilde{A}}^T} - \underline{E}\right) - Et\right]\underline{\tilde{\pi}}(0)\,. \qquad (18)$$

По мере приближения процесса к периоду сезонных изменений спроса характер этих изменений приобретает более выраженный специфический характер (значения спроса на конкретный продукт либо монотонно убывают, либо монотонно возрастают). В этом случае можно получить существенно более простые соотношения для описания закона распределения случайного времени до попадания в поглощающее состояние. Соответствующая матрица вероятностей переходов имеет вид:

$$\underline{W}=\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \dots & \omega_{1,r-1} & \omega_{1r} \\ 0 & 0 & \omega_{23} & \dots & \omega_{2,r-1} & \omega_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_{r-1,r} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Пусть T_i — случайное время пребывания системы в i-ом, $i = 1, 2, \dots, r$ состоянии.

Тогда закон распределения продолжительности пребывания процесса в каждом из состояний, среднее время пребывания в каждом состоянии и элементы инфинитезимальной матрицы $\underline{A}=(a_{ij})$ определяются соотношениями (20), (21) и (22), соответственно:

$$F_i(t)=P(T_i\le t)=\begin{cases}0, & t<1,\\ 1, & t\ge 1,\end{cases} \quad i=1,2,...,r-1; \tag{20}$$

$$F_r(t)=P(T_i\le t)=0, \quad t>0.$$

$$\overline{T}_i=\int\limits_0^\infty\left[1-F_i(t)\right]dt=1, \quad i=1,2,...,r-1; \tag{21}$$

$$a_{ij}=\frac{P_{ij}}{\overline{T}_i}=P_{ij}, i=1,2,...,r, \quad j=1,2,...,r; \quad a_{ii}=-\sum_{i\ne j}a_{ij}=-1; a_{r,j}=0, \quad j=1,2,...,r. \tag{22}$$

С учетом значений вероятностей переходов инфинитезимальная матрица $\underline{A}$ имеет вид

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} -1 & \omega_{12} & \omega_{13} & \dots & \omega_{1,r-1} & \omega_{1r} \\ 0 & -1 & \omega_{23} & \dots & \omega_{2,r-1} & \omega_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Введем $\underline{\pi}(t)=(\pi_1(t),\pi_2(t),\dots,\pi_m(t))$ — распределение вероятностей пребывания системы в возможных своих состояниях в момент времени t. Как уже было отмечено, компоненты этой вектор-функции удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8), которая в скалярной форме имеет вид

$$\frac{d\pi_j(t)}{dt}=\sum_i\pi_i(t)a_{ij}, j=1,2,...,r, \tag{24}$$

с начальным условием

$$\underline{\pi}(0)=(\pi_1(0),\pi_2(0),\dots,\pi_r(0))=(1,0,0,...,0). \tag{25}$$

Выпишем систему уравнений (24) с подстановкой значений элементов матрицы (23):

$$\begin{gathered} \frac{d\pi_1(t)}{dt}=-\pi_1(t), \quad \frac{d\pi_2(t)}{dt}=\omega_{12}\pi_1(t)-\pi_2(t), \\ \frac{d\pi_3(t)}{dt}=\omega_{13}\pi_1(t)+\omega_{23}\pi_2(t)-\pi_3(t), \quad \dots, \\ \frac{d\pi_{r-1}(t)}{dt}=\omega_{1,r-1}\pi_1(t)+\omega_{2,r-1}\pi_2(t)+...+\omega_{r-2,r-1}\pi_{r-2}(t)-\pi_{r-1}(t) \end{gathered} \tag{26}$$

или

$$\frac{d\pi_\ell(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{r-1}\pi_i(t)\omega_{i\ell}-\pi_\ell(t),\;\; i=1,2,\dots,r-1,$$

$$\frac{d\pi_r(t)}{dt}=\sum_{\ell=1}^{r-1}\pi_\ell(t)\omega_{\ell r}.$$

Непосредственное интегрирование первого уравнения системы с начальным условием $\pi_1(0)=1$ дает

$$\pi_1(t)=e^{-t}\,. \tag{27}$$

Решение второго уравнения

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt}=\omega_{12}e^{-t}-\pi_2(t) \tag{28}$$

будем искать в виде

$$\pi_2(t)=c_2(t)e^{-t}\,,$$

где $c_2(t)$ — функция, подлежащая определению.

При этом

$$-c_2(t)e^{-t}+c_2'(t)e^{-t}=\omega_{12}e^{-t}-c_2(t)e^{-t}\,,$$

откуда

$$c_2'(t)e^{-t}=\omega_{12}$$

и

$$c_2(t)=\omega_{12}t+c\,.$$

С учетом начального условия $\pi_2(0)=0$ имеем:

$$\pi_2(t)=\omega_{12}te^{-t}\,. \tag{29}$$

Аналогично можно получить:

$$\pi_3(t)=\left(\omega_{13}t+\omega_{23}\omega_{12}\frac{t^2}{2!}\right)e^{-t}\,,$$

$$\pi_4(t)=\left[\omega_{14}t+\left(\omega_{24}\omega_{12}+\omega_{13}\omega_{34}\right)\frac{t^2}{2!}+\omega_{34}\omega_{23}\omega_{12}\frac{t^3}{3!}\right]e^{-t}\,, \tag{30}$$

$$\pi_\ell(t)=\sum_{q=1}^{\ell-1}\sum_{s_1=2}^{\ell-q+1}\sum_{s_2=s_1+1}^{\ell-q+2}\dots\sum_{s_{q-1}=s_{q-2}+1}^{\ell-1}\omega_{1s_1}\omega_{s_1s_2}\dots\omega_{s_{q-1}\ell}\frac{t^q}{q!}e^{-t}\,,\quad \ell=1,2,\dots,r-1\,,\; s_0=1\,.$$

Последнее уравнение системы можно записать в виде

$$\frac{d\pi_r(t)}{dt}=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}\sum_{q=1}^{\ell-1}\sum_{s_1=2}^{\ell-q+1}\sum_{s_2=s_1+1}^{\ell-q+2}\dots\sum_{s_{q-1}=s_{q-2}+1}^{\ell-1}\omega_{1s_1}\omega_{s_1s_2}\dots\omega_{s_{q-1}\ell}\frac{t^q}{q!}e^{-t}\,, \tag{31}$$

откуда:

$$\pi_r(t)=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}\sum_{q=1}^{\ell-1}\sum_{s_1=2}^{\ell-q+1}\sum_{s_2=s_1+1}^{\ell-q+2}\ldots\sum_{s_{q-1}=s_{q-2}+1}^{\ell-1}\omega_{1s_1}\omega_{s_1s_2}\ldots\omega_{s_{q-1}\ell}\frac{1}{q!}\int_0^t u^q e^{-u}du=$$
$$=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}\sum_{q=1}^{\ell-1}\sum_{s_1=2}^{\ell-q+1}\sum_{s_2=s_1+1}^{\ell-q+2}\ldots\sum_{s_{q-1}=s_{q-2}+1}^{\ell-1}\omega_{1s_1}\omega_{s_1s_2}\ldots\omega_{s_{q-1}}\frac{1}{q!}\left(q!-e^{-t}\sum_{m=0}^{q}\frac{q!}{m!}t^m\right)=$$
$$=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}\sum_{q=1}^{\ell-1}\sum_{s_1=2}^{\ell-q+1}\sum_{s_2=s_1+1}^{\ell-q+2}\ldots\sum_{S_{q-1}=S_{q-2}+1}^{l-1}\omega_{1s_1}\omega_{s_1s_2}\ldots\omega_{s_{q-1}\ell}\frac{1}{q!}\left(1-e^{-t}\sum_{m=0}^{q}\frac{t^m}{m!}\right)=$$
$$=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}B(\ell)\left(1-e^{-t}\sum_{m=0}^{q}\frac{t^m}{m!}\right). \qquad (32)$$

При этом

$$\lim_{t\to\infty}\pi_\ell(t)=0\,,\ \ell=1,2,\ldots,r-1\,, \qquad (33)$$

$$\lim_{t\to\infty}\pi_\ell(t)=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}B(\ell)=1\,. \qquad (34)$$

Закон распределения $F(t)$ продолжительности пребывания процесса до попадания в поглощающее состояние имеет вид

$$F(t)=\pi_r(t)=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}B(\ell)\left(1-e^{-t}\sum_{m=0}^{q}\frac{t^m}{m!}\right)=1-\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}B(\ell)\sum_{m=0}^{q}\frac{t^m}{m!}e^{-t}\ . \qquad (35)$$

Соответствующая плотность определяется соотношением

$$f(t)=\sum_{\ell=1}^{r-1}\omega_{\ell r}B(\ell)\sum_{m=0}^{q}\left[\frac{t^m}{m!}-\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right]e^{-t}\ . \qquad (36)$$

Выводы

В работе случайный процесс спроса представлен в виде марковского процесса с учетом его нестационарности по корреляционной функции, что позволило применить к его анализу соответствующий математический аппарат. В результате получены: закон распределения продолжительности пребывания процесса до попадания в поглощающее состояние, а также соответствующая плотность распределения.

Таким образом, получив данные соотношения, можно реализовать их практически, используя материал работы [1] и получить оптимальный размер запаса, гарантирующий оптимальную прибыль предприятия, занимающегося реализацией запасных частей к автомобилям.

Список литературы

1. Серая О.В. Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами / О.В. Серая, Т.А. Клименко, В.Б. Самородов // Вестник ХНАДУ. —2009. — № 45. — С. 31-34.

2. http://logist.ru/forum/YaBB.cgi?board=zapas;num=1201716296

3. Сергеев В.И. Корпоративная логистика. 300 ответов на вопросы профессионалов / В.И. Сергеев. — М.: Инфра-М, 2005. — 930 с.

4. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления / Л.Г. Раскин. — М.: Сов. Радио. — 1976. — 51 с.

Стаття надійшла до редакції 12.04.09