УДК 517.925.3

Об асимптотической устойчивости по части переменных импульсных систем

Гладилина Р. И.
Кафедра ПМИ ДонНТУ
rgladilina@yandex.ru

Аннотация

Гладилина Р. И. Об асимптотической устойчивости по части переменных импульсных систем. *Импульсные системы являются удобными моделями реальных эволюционных процессов, которые в определенные моменты их развития подвергаются резким изменениям. Одним из наиболее актуальных направлений исследования импульсных систем является исследование устойчивости таких систем. В статье рассматривается частичная устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях. С применением прямого метода Ляпунова получены условия устойчивости, в том числе асимптотической, тривиального решения импульсной системы.*

Ключевые слова: импульсные системы, устойчивость, метод функций Ляпунова.

Анотація

Гладіліна Р. І. Про асимптотичну стійкість за частиною змінних імпульсних систем. *Імпульсні системи є зручними моделями реальних еволюційних процесів, які в певні моменти часу зазнають різких змін. Одним з найбільш актуальних напрямків дослідження імпульсних систем є дослідження стійкості таких систем. У даній статті розглянуто стійкість за частиною змінних нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях. За допомогою прямого методу Ляпунова отримано умови асимптотичної стійкості тривіального розв'язку імпульсної системи.*

Ключові слова: імпульсні системи, стійкість, метод функцій Ляпунова.

Abstract

Gladilina R. I. On the partial asymptotic stability of impulsive systems. *Impulsive systems are the most effective mathematical models of the real evolutionary processes having undergo rapid changes at the certain moments of time. The investigation of stability of solutions of the impulsive systems is one of the most important problems. In this paper the problem of partial stability of the*

zero solution of the impulsive systems was considered. The conditions of asymptotic stability of the trivial solution were obtained by means of direct Lyapunov's method.
Keywords: impulsive system, stability, direct Lyapunov's method.

Условные обозначения:

N – множество натуральных чисел;
R – множество действительных чисел;
R^n – n-мерное Евклидово пространство;
$R_+ = [0, \infty)$ – множество неотрицательных действительных чисел;
$x \in R^n$ – n-мерный вектор;
$|x| = \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$ – евклидова норма вектора x;
$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярное произведение векторов в R^n;
$B_H^n = B_H = \{x \in R^n : |x| < H \}(H > 0)$ – H- окрестность нуля;
K – класс непрерывных, строго возрастающих функций $c : R_+ \to R_+$ таких, что $c(0) = 0$;
$\Delta x = x(\tau + 0) - x(\tau - 0)$ – скачок функции в точке $t = \tau$.

Введение

Теория импульсных систем дифференциальных уравнений является одним из направлений современной теории дифференциальных уравнений. Бурное развитие этой теории было вызвано запросами науки и новейшей техники, в первую очередь, теории управления и автоматического регулирования, компьютерных технологий, робототехники, лазерной техники, ракетостроения и так далее.

Многие реальные эволюционные процессы характеризуются тем, что в определенные моменты их развития они подвергаются резким изменениям. При математическом описании таких процессов обычно пренебрегают длительностью этих возмущений и считают, что возмущения носят мгновенный характер. Удобными моделями таких процессов являются импульсные системы.

Импульсные системы успешно применяются для решения различных практических задач. Например, процессы со скачкообразными изменениями наблюдаются в механике: движение пружины при ударном воздействии, работа часового механизма, изменение скорости ракеты при отделении ступеней, работа виброударной установки; в радиотехнике: генерация импульсов различной формы; в теории управления: работа промышленных роботов; в биологии, медицине, фармакологии, биотехнологии: работа сердца, деление клеток, воздействие лекарственных препаратов, выращивание биокорма и так далее.

В то время, как большинство физических систем моделируется дифференциальными либо разностными уравнениями, теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является, по существу, комбинацией дифференциальных и разностных систем и описывает непрерывные эволюции и дискретные события, имеющие место в реальных моделях физических систем.

При исследовании устойчивости импульсной системы обычным предположением является следующее: либо непрерывная компонента устойчива, а дискретная составляющая согласована с ней (не мешает этой устойчивости), либо наоборот. Более интересен случай, когда составляющие импульсной системы не согласованы, т.е. одна из них устойчива, а другая – нет.

Настоящая статья посвящена исследованию устойчивости по части переменных «несогласованных» импульсных систем.

Основная часть

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \qquad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x), \qquad t = \tau_i(x) \quad (i \in N). \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R_+$, $x \in R^n$, $f : R^{n+1} \to R^n$, $f(t,0) = 0$, $I_i : R^n \to R^n$, $I_i(0) = 0$, $0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \cdots$, $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Предположим, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует, единственно, непрерывно слева и попадает на каждую поверхность разрыва $t = \tau_i(x)$ только один раз. Достаточные условия существования и единственности решений импульсных систем, а также условия отсутствия «биений» решений о поверхности разрыва можно найти, например, в [1,8].

Представим фазовый вектор в виде $x = (y, z)$, где $y = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m, z = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in R^s$ $(m + s = n)$. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения системы (1) по отношению к переменным y в области

$$\Omega = B_H^m \times R^s, B_H^m = \{y \in R^m : |y| < H \}(H > 0).$$

Будем считать, что решение системы (1) z-продолжимо; это означает, что любое решение определено для всех $t > t_0$, для которых $| y(t, t_0, x_0) | < H$ [2].

В данной работе исследование устойчивости по части переменных проводится с помощью прямого метода Ляпунова. Для этого вводятся вспомогательные кусочно-непрерывные функции [7] $V : R_+ \times \Omega \to R$, удовлетворяющие требованиям: функции $V(t,x)$ непрерывны слева и $V(t,0) = 0$ при любом $t \in R_+$.

Функцию Ляпунова вдоль решения обозначим через $v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$, а моменты попадания решения на поверхности разрыва $t = \tau_i(x)$ – через τ_i.

Заметим, что для нулевого решения импульсной системы (1) определение понятий теории устойчивости не отличаются от соответствующих общеизвестных определений (см., например, [2]).

Частичная устойчивость решений импульсных систем рассматривалась в [3-6, 7].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для системы (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условию

$$a(|y|) \le V(t,x) \le b(x), \qquad (t,x) \in R_+ \times \Omega, a \in K, \tag{2}$$

а также условиям

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \le -c(|x|), \qquad t \ne \tau_i(x),\ c \in K, \tag{3}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \le 0 \quad (i \in N) \tag{4}$$

или условиям

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \le 0, \qquad t \ne \tau_i(x), \tag{5}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \le -c(|x|) \quad (i \in N). \tag{6}$$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически y-устойчиво.

Здесь функция Ляпунова $V(t,x)$ – кусочно-непрерывна и дифференцируема на промежутках непрерывности. Производная этой функции в силу системы (1) определяется следующим образом:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x).$$

Теорема 1 в первом варианте (условия (2)-(4)) была сформулирована в [7]. В этом случае устойчива непрерывная компонента, а дискретная – не нарушает эту устойчивость; во втором варианте [3] (условия (2),(5),(6)) устойчивость импульсной системы достигается за счет дискретной составляющей, а непрерывная компонента не нарушает устойчивость.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существует *y*-определенно положительная, невозрастающая вдоль решения функция $V(t,x)$.

Тогда, если последовательность $\{v(\tau_i + 0)\}_{i=0}^{\infty}$ не возрастает, то нулевое решение системы (1) *y*-устойчиво;

если, кроме того, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{i\to\infty} v(\tau_i + 0) = 0, \qquad (7)$$

то нулевое решение системы (1) асимптотически *y*-устойчиво.

Доказательство. Докажем вначале устойчивость нулевого решения системы (1).

Так как, по условию, функция $V(t,x)$ *y*-определенно положительна, то

$$a(|y|) \le V(t,x), \qquad (t,x) \in R_+ \times \Omega, a \in K. \qquad (8)$$

Пусть заданы произвольные $t_0 \in R_+$ и $\varepsilon > 0$. Из свойств функции $V(t,x)$ следует, что существует $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\sup_{|x|<\delta} V(t_0 + 0, x) < a(\varepsilon).$$

Выберем $x_0 \in \Omega$ такое, что $|x_0| < \delta$. Тогда получим

$$V(t_0 + 0, x_0) < a(\varepsilon). \qquad (9)$$

Пусть $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$. По условию, на промежутках непрерывности функция $v(t)$ не возрастает, поэтому

$$v(\tau_{i+1}) \le v(t) \le v(\tau_i + 0). \qquad (10)$$

Так как, согласно условию,

$$v(\tau_{i-1} + 0) \ge v(\tau_i + 0) \quad (i \in N), \qquad (11)$$

то из неравенств (10),(11) следует

$$a(|y(t)|) \le v(t) \le v(\tau_i + 0) \le \cdots \le v(\tau_1 + 0) \le v(t_0 + 0) < a(\varepsilon).$$

Следовательно, $|y(t)| < \varepsilon$, что и доказывает *y*-устойчивость нулевого решения.

Пусть также выполнено условие (7). Из неравенства (10) и условия (7) следует, что $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$, откуда, учитывая условие (8), получим, что и $|y(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. нулевое решение системы (1) асимптотически *y*-устойчиво. Теорема доказана.

Выводы

В данной работе исследуется устойчивость импульсных систем наиболее общего вида – с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени. Получены довольно общие условия асимптотической устойчивости по части переменных: не требуется дифференцированность функции Ляпунова, функция должна быть лишь невозрастающей. Если функция Ляпунова дифференцируема, то в данной теореме для асимптотической устойчивости по части переменных достаточно, чтобы производная функции Ляпунова была знакопостоянна. При этом не обязательно, чтобы в каждой точке попадания траектории на поверхности разрыва скачки функции Ляпунова были не нулевыми. Еще одно усиление теоремы 1 заключается в том, что в доказанной теореме не требуется существование бесконечно малого высшего предела. Кроме того, в теореме 2 дискретная составляющая может быть неустойчивой (скачки функции Ляпунова могут быть положительными).

Литература

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
3. Гладилина Р.И. Об устойчивости по части переменных в системах с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. – 2003. – Вып. 8. – С. 7-18.
4. Гладилина Р.И. Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости по части переменных для систем с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. – 2004. – Вып. 9. – С. 46-52.
5. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. О сохранении свойства устойчивости импульсных систем с возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 8. – С. 78-85.
6. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. О необходимых и достаточных условиях устойчивости инвариантных множеств нелинейных импульсных систем. // Прикладная механика. – 2008. – № 2. – С. 132- 142.
7. Bainov D., Simeonov P.: Stability with Respect to Part of Variables in Systems with Impulse Effect; // J. Math. Anal. Appl. – 1987. -- **124,** N 2. – P. 547-560.
8. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations; Word Scientific: Singapore- New Jersey- London, 1995. – 462 p.

Гладилина Раиса Ивановна.
В 1973 закончила Киевский государственный университет им. Тараса Шевченко по специальности ”Прикладная математика”. В 1993 закончила Харьковский институт инженеров железнодорожного транспорта по специальности «Бухгалтерский учет». Кандидат физ.-мат. наук (2006). Доцент кафедры прикладной математики и информатики.
Научные интересы: дифференциальные уравнения, устойчивость, импульсные системы.

Дата надходження до редакції 7.11.2008 р.