

УДК 519.6

О.А. Дмитрієва
Донецький національний технічний університет
dmitriv@r5.dgtu.donetsk.ua**Генерація стійких блокових методів для розв'язання жорстких диференціальних рівнянь і їх систем**

У роботі розглядаються проблеми, пов'язані з паралельним моделюванням динамічних систем, що відносяться до класу швидко-уповільнених, або сингулярно - збурених. Розглянуті питання генерації і паралельної реалізації блокових методів розв'язання завдання Коші для жорстких звичайних диференціальних рівнянь і їх систем з варіацією кроку. Доведена А-стійкість однокрокових багатоточкових різницевого методів. Розглянуті методи суттєво підвищують ефективність чисельного розв'язання жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь.

Паралельне моделювання, швидко-уповільнена система, сингулярно – збурена система, блоковий метод, завдання Коші, жорстка система звичайних диференціальних рівнянь

Вступ

У роботі розглядаються проблеми, пов'язані з паралельним моделюванням динамічних систем, що відносяться до класу швидко-уповільнених, або сингулярно - збурених. Такі системи, які піддані релаксаційним коливанням, природно виникають у фізичних, біологічних і хімічних моделях, а також у теоретичних дослідженнях. Ефективне управління такими процесами й системами засновано на використанні адекватних математичних моделей об'єктів, а облік великої кількості факторів при побудові моделей неминує приводить до появи явища жорсткості і жорстких систем, що його описують. При цьому рівняння представляють поведінку жорсткої системи, що містить ряд швидких і уповільнених реакцій, і пряме інтегрування цих рівнянь стає складним.

Ще одним джерелом виникнення жорсткості є перетворення рівнянь у частинних похідних у великі системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом введення розділених різниць, здійснюване за допомогою методу прямих.

Формальне визначення жорсткості

Під жорсткими рівняннями будемо мати на увазі такі, для яких певні неявні методи дають кращий результат, звичайно непорівнянний з явними методами [1-3]. Формалізація такого прагматичного визначення для різних типів рівнянь і систем може носити різний характер [4-5]. Зокрема, для системи ОДУ

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

на проміжку пошуку рішення

$$t_0 \leq t \leq T$$

формальне визначення твердості може бути введене в такий спосіб. Нехай для цієї системи існує деякий прикордонний шар, розмір якого в порівнянні з повним відрізком спостереження задається нерівністю

$$\tau_{ps} \ll T - t_0$$

а значення похідних поза прикордонним шаром покладаються меншими, чим значення всередині нього в N разів, де

$$N \gg 1.$$

Тобто, розв'язанням системи (1) буде інтегральна крива, у якої можна виділити дві ділянки з поведінкою, що істотно різниться. Перша ділянка зі швидкою зміною шуканої функції називається прикордонним шаром. Дотичні до інтегральних кривих у прикордонному шарі практично паралельні осі ординат. На другій ділянці похідні розв'язання значно менше, а інтегральна крива практично збігається з шуканою функцією. Примежевий шар завжди буде мати місце, а різний характер поведінки тим різкіше, чим менше значення параметра ε в (1).

Моделювання релаксаційних коливань на основі асимптотичного обчислення періодичних рішень

Різні задачі теорії коливань приводять до дослідження систем диференціальних рівнянь типу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' &= f(x_1, x_2, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= g(x_1, x_2, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

де ε - малий позитивний параметр.

Говорячи, що параметр ε малий, мають на увазі наближене вивчення рішень системи (1) зі зневагою величинами того або іншого ступеня малості відносно ε [1]. При цьому важливе значення має задача відшукування таких періодичних рішень систем типу (1), які мають «майже розривний» характер, а також наближеного обчислення величин, що характеризують ці періодичні рішення (період і амплітуду) [2].

Поряд із системою рівнянь (1) уведемо в розгляд вироджену систему, що виходить із (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0, \\ x_2' &= g(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо на праву частину системи накласти деякі обмеження, то природно очікувати, що рішення (2) будуть наближеннями рішень невиродженої системи (1). При інтегруванні системи (2) спочатку з

$$f(x_1, x_2) = 0$$

виразимо x_1 через x_2

$$x_1 = \varphi(x_2), \quad (3)$$

а потім розв'яжемо рівняння

$$x_2' = g(\varphi(x_2), x_2). \quad (4)$$

Однак такий підхід до розв'язання можна застосовувати тільки на обмеженій ділянці, тому що рішення може підійти до особливої точки, у якій якобіан

$$D(x) = \det \left\| \frac{\partial f_x}{\partial x_p} \right\| \quad (5)$$

звернеться в нуль і визначення x_1 із співвідношення (3) стане неможливим. З розгляду системи (2) ніяких висновків про поведінку рішення системи (1) по досягненні їм особливої точки зробити не можна, тому в літературі, як правило, залучаються додаткові фізичні міркування, що формулюються у формі «гіпотез стрибка» [3-4]. Щоб уникнути залучення додаткових фізичних трактувань протікання коливального процесу будемо розглядати траєкторії виродженої системи рівнянь (2) у фазовому просторі системи (1) і трактувати їх як границі траєкторій відповідної невиродженої системи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таке трактування дає можливість чисто математично визначити характер стрибка, що перетерплює рішення системи рівнянь (1) по досягненні точки зриву.

У роботі аналізуються швидко-повільні системи на двовимірному торі, які мають

властивості, що не зустрічаються в аналогічних системах на площині.

Яскравим прикладом таких систем служать рівняння Льенара [5]

$$x'' + f(x, x') + g(x) = 0 \quad (6)$$

і його приватні види

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (7)$$

$$x'' + f(x)x' + x = 0 \quad (8)$$

При цьому рівняння (8), у свою чергу, може містити як окремий випадок рівняння Ван-дер-Поля

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0. \quad (9)$$

Рівняння (8) містить також як окремий випадок рівняння Релея

$$x'' + (a - bx^2)x' + x = 0. \quad (10)$$

яке може бути зведене до рівняння Ван-дер-Поля, якщо прийняти x' за нове невідоме, продиференціювати і зробити деякі перетворення. Рівняння (6-10) застосовуються для опису автоколивальних систем при наявності лінійної сили, що відновлює, і нелінійного загасання.

Здійснимо для системи (1) перехід до іншого масштабу часу $t = \tau/\varepsilon$:

$$\begin{aligned} x_1' &= f(x_1, x_2, \eta), \\ x_2' &= \eta g(x_1, x_2, \eta), \end{aligned} \quad (11)$$

де $\eta = 1/\varepsilon$.

До системи аналогічного виду приводиться класичне рівняння Ван-дер-Поля (9) за допомогою перетворення Льенара

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= \eta(1 - x_2^2)x_2 + x_1. \end{aligned} \quad (12)$$

При $\eta = 0$ повільна змінна x_2 стає параметром. Швидка змінна x_1 релаксує до стійкого положення рівноваги. Якщо $\eta > 0$, але мале, то система, що відрелаксувала, повільно рухається уздовж кривій стану рівноваги швидких рухів уліво на верхній і вправо на нижній частині кривої. У точках кривої з вертикальної дотичної система робить стрибки. У результаті формується граничний цикл.

При малих η коливання в контурі близькі до гармонійних, однак зі збільшенням η їхній характер починає змінюватися, і при великих значеннях параметра в динаміці коливального процесу виділяються ділянки двох типів: «уповільненої» зміни й швидких «стрибків» зі стійкого стану в нестійкий й навпаки. При $\eta \rightarrow \infty$ відповідні рішення стають розривними.

Оскільки точні рішення рівняння Ван-Дер-Поля невідомі [1-3], як міра оцінки отриманих рішень використовуються асимптотичні оцінки Дородніцина [2], які залежать від параметра жорсткості η . Оцінка по амплітуді

$$x_\eta = 2 + 0.77937\eta^{-\frac{4}{3}} - \frac{16}{27} * \frac{\ln(\eta)}{\eta^2} - 0.8762\eta^{-2} + O\left(\eta^{-\frac{8}{3}}\right). \quad (13)$$

Асимптотична оцінка періоду релаксаційних коливань

$$T_\eta = 1.613706\eta + 7.01432\eta^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} * \frac{\ln(\eta)}{\eta} - 1.3233\eta^{-2} + O\left(\eta^{-\frac{8}{3}}\right). \quad (14)$$

Графіки залежностей амплітуди й періоду релаксаційних коливань від параметра жорсткості наведені на рис. 1-2.

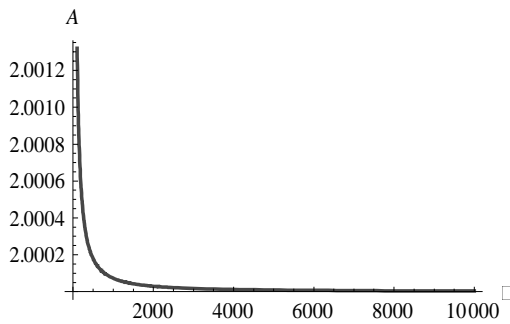


Рисунок 1 - Асимптотичні оцінки амплітуди релаксаційних коливань рівняння Ван-дер-Поля

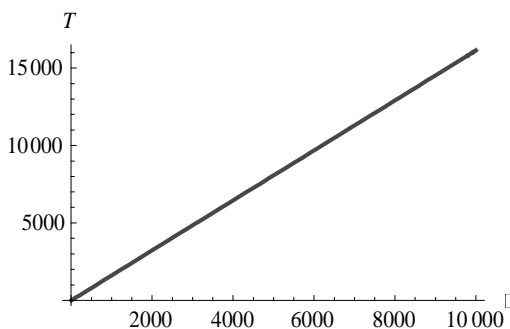


Рисунок 2 - Асимптотичні оцінки періоду релаксаційних коливань рівняння Ван-дер-Поля

Генерація і дослідження стійкості блокових методів

Нехай у загальному вигляді для чисельного розв'язку задачі Коші жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь (11) використовується

блоковий лінійний m -кроковий різницьевий метод [6]

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau b_i f_{n,0} + \tau \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} f_{n,j}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Для дослідження стійкості блокового методу розглянемо модельне рівняння

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \lambda x, \quad t > 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (16)$$

де $\lambda < 0$ – довільне комплексне число. На прикладі цього модельного рівняння аналізують стійкість методів розв'язання системи (11)

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t},$$

що є монотонно убутним при $t \rightarrow \infty$. При будь-яких $\tau > 0$ для розв'язання цього рівняння справедлива нерівність

$$|x(t + \tau)| \leq |x(t)|, \quad (17)$$

яка визначає стійкість розв'язання $x(t)$. Природно вимагати, щоб і для розв'язання різницевої задачі, що апроксимує (11), виконувалася б нерівність аналогічна (17). Для модельного рівняння (16) різницеві рівняння (15) набудуть вигляду

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau \lambda b_i u_{n,0} + \tau \lambda \sum_{j=1}^k a_{i,j} u_{n,j}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

Введемо наступні позначення для матриці і вектора коефіцієнтів

$$A = \{a_{i,j}\}, \quad B = \{b_i\}^T,$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

Представимо систему рівнянь (16) у векторній формі. Для цього введемо вектори

$$U_n = \{u_{n,i}\}, \quad I = \{1, 1, \dots, 1\}^T$$

У векторній формі рівняння (16) буде мати вигляд

$$(E - \mu A)U_n = u_{n,0}(I + \mu B), \quad \mu = \lambda \tau \quad (19)$$

Визначивши з (19) U_n , отримаємо

$$U_n = (E - \mu A)^{-1}(I + \mu B)u_{n,0} = S u_{n,0} \quad (20)$$

де вектор S

$$S = (E - \mu A)^{-1}(I + \mu B) \quad (21)$$

визначається виразом

$$S = \begin{bmatrix} 1 - \mu a_{1,1} & -\mu a_{1,2} & \dots & -\mu a_{1,k} \\ -\mu a_{2,1} & 1 - \mu a_{2,2} & \dots & -\mu a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mu a_{k,1} & -\mu a_{k,2} & \dots & 1 - \mu a_{k,k} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 + \mu b_1 \\ 1 + \mu b_2 \\ \dots \\ 1 + \mu b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_k \end{bmatrix} \quad (22)$$

Визначимо матрицю переходу від блока значень

$$U_{n-1} = (u_{n-1,1}, u_{n-1,2}, \dots, u_{n-1,k})$$

до блока

$$U_n = (u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,k})$$

Для цього перетворимо отриману систему (20) до еквівалентної системи

$$U_n = S U_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & s_1 \\ 0 & 0 & \dots & s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_k \end{bmatrix} \quad (23)$$

Таким чином, стійкість чисельного методу (15) визначається власними значеннями матриці S [7]. Видно, що елементи цієї матриці є раціональними функціями від μ і власні значення q матриці S також будуть залежати від μ . Тому необхідно знайти ті області для власних значень μ , у яких

$$|q(\mu)| \leq 1$$

По виду матриці S можна укласти, що вона має $k-1$ нульових власних чисел $q_1 = q_2 = \dots = q_{k-1} = 0$ і $q_k = s_k$. Оскільки ранг матриці дорівнює одиниці, кожному власному значенню відповідають різні ненульові власні вектори. Таким чином, функцією стійкості методу (1) є

$$q_k(\mu) = s_k. \quad (24)$$

Із (24) витікає, що

$$s_k = \frac{\text{Det}[A_k]}{\text{Det}[E - \mu A]}$$

де $A_k =$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \mu a_{1,1} & -\mu a_{1,2} & \dots & -\mu a_{1,k} & 1 + \mu b_1 \\ -\mu a_{2,1} & 1 - \mu a_{2,2} & \dots & -\mu a_{2,k} & 1 + \mu b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mu a_{k,1} & -\mu a_{k,2} & \dots & 1 - \mu a_{k,k} & 1 + \mu b_k \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Розглянемо для приклада стійкість однокрокових блокових методів з різною

кількістю розрахункових точок у блоці. Для однокрокових блокових методів апроксимацію порядку p забезпечують наступні умови [8]

$$b_i + \sum_{j=1}^k a_{i,j} = 1,$$

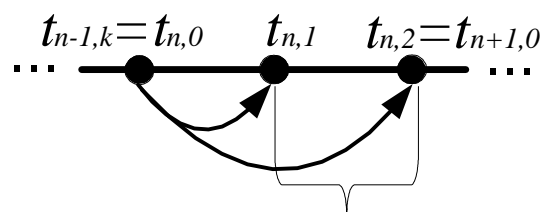
$$\sum_{j=1}^k j^{i-1} a_{i,j} = \frac{i^{i-1}}{i},$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad i = 2, 3, \dots, p \quad (26)$$

Система рівнянь (26) для кожного фіксованого i містить p рівнянь та $k+1$ невідомих $b_i, a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k}$. Якщо вимагати, щоб $p=k+1$, тоді з системи (26) можна буде визначити всі невідомі коефіцієнти. Звідси витікає, що найвищий порядок апроксимації однокрокового k -точкового блокового методу рівний $k+1$. Спочатку визначимо коефіцієнти блокового методу. Обираючи кількість розрахункових точок у блоці, можна генерувати відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (26) і отримувати розрахункові коефіцієнти. Наприклад, якщо блок має розмірність $k=2$ (див. рис. 3), то розрахункові коефіцієнти приймають наступний вигляд

$$A = \{a_{i,j}\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

$$B = \{b_i\}^T = \left[\frac{5}{12}, \frac{1}{6} \right]^T.$$



блок n

Рисунок 3 - Схема обчислень для блока розмірністю $k=2$

Сформуємо систему різницьових рівнянь для блока розмірністю $k=2$ на основі отриманих матриці і вектора коефіцієнтів

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{5}{12} \tau f_{n,0} + \tau \left(\frac{2}{3} f_{n,1} - \frac{1}{12} f_{n,2} \right),$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + \frac{1}{6} \tau f_{n,0} + \tau \left(\frac{2}{3} f_{n,1} + \frac{1}{6} f_{n,2} \right).$$

Зробимо заміну відповідно (16) $f_{n,t} = \lambda u_{n,t}$, позначимо $\mu = \lambda\tau$ розв'яжемо систему відносно невідомих, отримаємо розрахункові формули для тестової задачі. Визначимо вектор

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 + 2\mu - \mu^2}{2(6 - 5\mu + \mu^2)} \\ \frac{6 + \mu + \mu^2}{6 - 5\mu + \mu^2} \end{bmatrix}.$$

Матриця

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12 + 2\mu - \mu^2}{2(6 - 5\mu + \mu^2)} \\ 0 & \frac{6 + \mu + \mu^2}{6 - 5\mu + \mu^2} \end{bmatrix}$$

має два власних значення

$$\left\{ 0, \frac{6 + \mu + \mu^2}{6 - 5\mu + \mu^2} \right\}.$$

Знайдемо область дійсних значень μ , для яких $|q_2(\mu)| \leq 1$

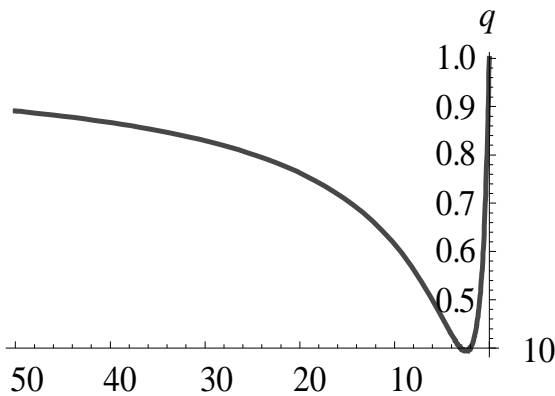


Рисунок 4 - Область визначення μ , для якої виконується нерівність $|q_2(\mu)| \leq 1$

З рис. 4 видно, що областю стійкості методу є вся ліва напівплощина, включаючи і уявну вісь. Таким чином, метод А-стійкий.

Для блока розмірністю $k = 4$ (див. рис. 5) розрахункові коефіцієнти

$$A = \{a_{r,j}\} = \begin{bmatrix} 323 & 11 & 53 & 19 \\ 360 & 30 & 360 & 720 \\ 31 & 2 & 1 & 1 \\ 45 & 15 & 45 & 180 \\ 17 & 3 & 7 & 1 \\ 40 & 10 & 40 & 80 \\ 16 & 2 & 16 & 7 \\ 45 & 15 & 45 & 90 \end{bmatrix}.$$

$$B = \{b_r\}^T = \left[\frac{251}{720}, \frac{29}{180}, \frac{9}{80}, \frac{7}{90} \right]^T. \quad (27)$$

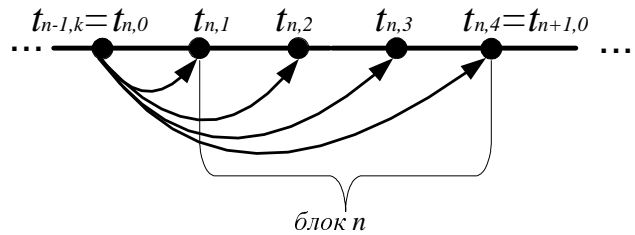


Рисунок 5 - Схема обчислень для блока розмірністю $k = 4$

Система різницьових рівнянь для блока розмірністю $k = 4$ на основі отриманих матриці і вектора коефіцієнтів (27) буде мати наступний вигляд

$$\begin{aligned} u_{n,1} &= u_{n,0} + \frac{251}{720}\tau f_{n,0} + \\ &+ \tau \left(\frac{323}{360}f_{n,1} - \frac{11}{30}f_{n,2} + \frac{53}{360}f_{n,3} - \frac{19}{720}f_{n,4} \right), \\ u_{n,2} &= u_{n,0} + \frac{29}{180}\tau f_{n,0} + \\ &+ \tau \left(\frac{31}{45}f_{n,1} + \frac{2}{15}f_{n,2} + \frac{1}{45}f_{n,3} - \frac{1}{180}f_{n,4} \right), \\ u_{n,3} &= u_{n,0} + \frac{9}{80}\tau f_{n,0} + \\ &+ \tau \left(\frac{17}{40}f_{n,1} + \frac{3}{10}f_{n,2} + \frac{7}{40}f_{n,3} - \frac{1}{80}f_{n,4} \right), \\ u_{n,4} &= u_{n,0} + \frac{7}{90}\tau f_{n,0} + \\ &+ \tau \left(\frac{16}{45}f_{n,1} + \frac{2}{15}f_{n,2} + \frac{16}{45}f_{n,3} + \frac{7}{90}f_{n,4} \right). \end{aligned}$$

Визначимо вектор

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1440 - 408\mu - 58\mu^2 + 32\mu^3 - 3\mu^4 \\ 12(120 - 154\mu + 71\mu^2 - 14\mu^3 + \mu^4) \\ 720 - 204\mu + 106\mu^2 - 19\mu^3 + \mu^4 \\ 720 - 924\mu + 426\mu^2 - 84\mu^3 + 6\mu^4 \\ 480 - 136\mu + 94\mu^2 + 4\mu^3 - \mu^4 \\ 480 - 616\mu + 284\mu^2 - 56\mu^3 + 4\mu^4 \\ 360 - 102\mu + 83\mu^2 + 8\mu^3 + 3\mu^4 \\ 360 - 462\mu + 213\mu^2 - 42\mu^3 + 3\mu^4 \end{bmatrix}$$

Відповідна матриця

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1440 - 408\mu - 58\mu^2 + 32\mu^3 - 3\mu^4}{12(120 - 154\mu + 71\mu^2 - 14\mu^3 + \mu^4)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{720 - 204\mu + 106\mu^2 - 19\mu^3 + \mu^4}{720 - 924\mu + 426\mu^2 - 84\mu^3 + 6\mu^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{480 - 136\mu + 94\mu^2 + 4\mu^3 - \mu^4}{480 - 616\mu + 284\mu^2 - 56\mu^3 + 4\mu^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{360 - 102\mu + 83\mu^2 + 8\mu^3 + 3\mu^4}{360 - 462\mu + 213\mu^2 - 42\mu^3 + 3\mu^4} \end{bmatrix}$$

має чотири власних значення

$$\left\{ 0, 0, 0, \frac{360 - 102\mu + 83\mu^2 + 8\mu^3 + 3\mu^4}{360 - 462\mu + 213\mu^2 - 42\mu^3 + 3\mu^4} \right\}$$

серед яких три власні значення нульові, а для четвертого спробуємо знайти область дійсних значень μ , для яких виконується нерівність $|q_4(\mu)| \leq 1$

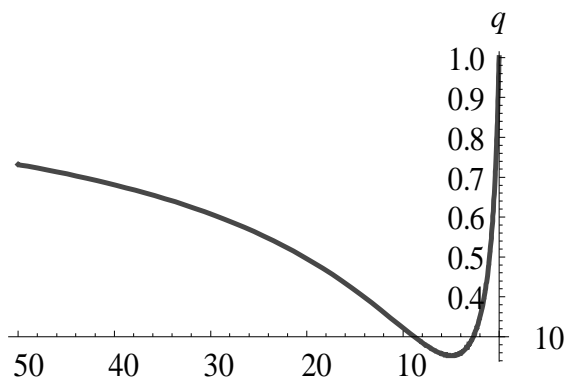


Рисунок 6 - Область визначення, в якій виконується нерівність $|q_4(\mu)| \leq 1$

З рис. 6 видно, що областю стійкості блокового чотирьохточкового метода також є вся ліва напівплощина, включаючи і уявну вісь. Таким чином, метод А-стійкий. Вочевидь, блокові методи більш високих порядків також будуть А-стійкими.

Модельовання релаксаційних коливань на основі блокових методів

Розглянемо приклад використання блокових методів при розв'язанні системи Ван-дер-Поля. Визначимо початкові дані для

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0, \quad \eta = 10$$

і будемо шукати розв'язання на проміжку $0 \leq t \leq T$.

Чисельне розв'язання такої системи явними методами характеризується неприпустимими похибками. При реалізації чисельного розв'язання за допомогою неявних методів для кожної розрахункової точки виникає необхідність у рішенні системи нелінійних рівнянь, розмірність якої визначається кількістю стадій неявного методу й кількістю рівнянь у системі.

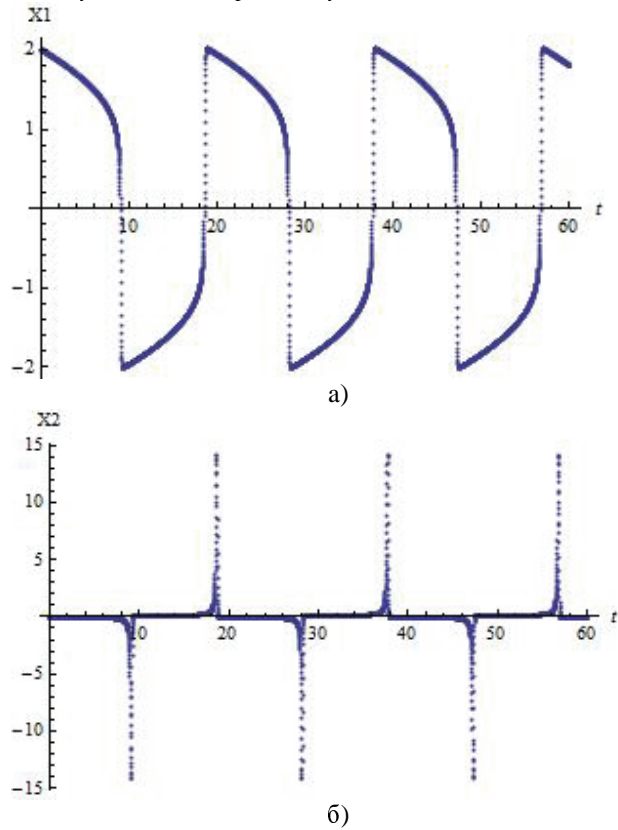


Рисунок 7 - Результати розв'язання системи Ван-дер-Поля при $0 \leq t \leq 200$ по змінним x_1 (рис. 7 а) і x_2 (рис. 7 б)

Класичний підхід до розв'язання даної проблеми полягає у використанні ітераційного методу Ньютона з повним якобіаном, але для жорстких систем цей підхід є непривабливим через високу трудомісткість реалізації, пов'язаної, насамперед, з необхідністю багаторазового перевизначення якобіану для кожної розрахункової точки, а також кроку інтегрування на ділянках зі швидкою зміною похідних [9-13].

В той же час блоковий метод перевизначає якобіан для цілого блоку точок. Тому можна стверджувати про прискорення обчислень навіть на однопроцесорному комп'ютері потенційно досягається у стільки разів, скільки точок містяться у блоці.

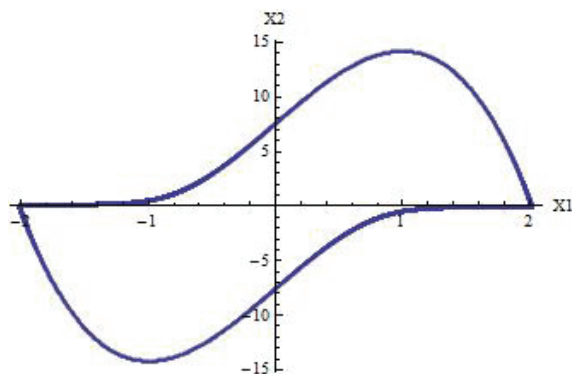


Рисунок 8 - Фазова траєкторія (граничний цикл) розв'язання системи Ван-дер-Поля

Висновки

У роботі розглянуто проблеми, пов'язані з паралельним моделюванням динамічних жорстких систем, що відносяться до класу швидко-уповільнених, або сингулярно - збурених. Використання класичних методів для розв'язання таких задач є непривабливим через високу трудомісткість реалізації, пов'язану, насамперед, з

необхідністю багаторазового перевизначення якобіану для кожної розрахункової точки, а також кроку інтегрування на ділянках зі швидкою зміною похідних. Блокові методи, які пропонуються в роботі, вимагають обчислення якобіану для цілого блоку точок, що прискорює процес обчислень у стільки разів, скільки точок містяться у блоці.

Розглянуті питання генерації і паралельної реалізації блокових методів розв'язання завдання Коші для жорстких звичайних диференціальних рівнянь і їх систем з варіацією кроку. В процесі розв'язання здійснюється автоматичне налаштування вимірності кроку інтеграції, що забезпечує задану точність. При цьому декілька можливих варіантів значень довжини кроку розраховуються паралельно, а потім здійснюється просування з максимально можливим кроком, який забезпечує задану точність розв'язання.

На основі проведеного аналізу доведена А-стійкість однокрокових багатоточкових різницевого методів. Таким чином, ці методи можуть використовуватися при чисельному розв'язанні жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь. Запропонована методика може бути використана при дослідженні стійкості паралельних однокрокових методів з будь-яким числом точок у блоці. Тестові чисельні розв'язання однокроковими блоковими методами тестових жорстких систем практично підтвердили їхню надійність і ефективність.

Список літератури

1. Мищенко Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. – М.: Наука. 1975. 248 с.
2. Дородницын А.А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля / А.А. Дородницын // Прикладная математика и механика. – 1947. – Т.11, №3. – С.313-328
3. Мищенко Е.Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных / Е.Ф. Мищенко // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1957. – № 21. – С.627-654.
4. Понтрягин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных / Л.С. Понтрягин // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1957. – № 21. – С.605-626.
5. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари; пер. с англ. – М.: Мир, 1964. – 478 с.
6. Дмитриева О.А. Параллельные вычисления в моделировании линейных динамических систем / О.А. Дмитриева // Сборник трудов конференции МОДЕЛИРОВАНИЕ 16-18 мая 2006 г. – К.-К.: Институт проблем моделирования в энергетике, 2006. – С. 203-207
7. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1999.- 685с.
8. Фельдман Л.П. Эффективные методы распараллеливания численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.П. Фельдман, О.А. Дмитриева // Математическое моделирование. – 2001. – Т 13, № 7. – С.66-72.

9. Дмитриева О.А. Вариация шага при решении жестких уравнений блочными методами / О.А. Дмитриева // Сборник трудов конференции МОДЕЛИРОВАНИЕ 14-16 мая 2010 г. – К.-К., Институт проблем моделирования в энергетике. – 2010. – Т.2. – С. 5-12

10. Embedded block parallel methods for initial Cauchy problem numerical solution / L.P. Feldman, I.A. Nazarova, O.A. Dmitrieva, T.V. Mikhaylova // Proceedings of Donetsk National Technical University. – 2010. – №1. – P.12-17

11. Дмитриева О.А. Параллельное моделирование жестких динамических систем диагонально неявными методами с адаптацией шага / О.А. Дмитриева, Я.А. Куприй // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка (ІКОТ-2010). – 2010. – Вип. 12(165) – С. 111-116

12. Firsova Alisa Dynamic System Simulation. Robust algorithms of state estimation of dynamic lumped parameters systems / Alisa Firsova, Olga Dmitrieva. – LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 92 p.

13. Дмитриева О.А. Генерация численных методов решения дифференциальных уравнений высоких порядков / О.А. Дмитриева, Я.А. Куприй // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство (САІТ-2011). – 2011. – Вип. 1. – С. 152-156

Надійшла до редколегії 10.09.2011

О.А. ДМИТРИЕВА

Донецкий национальный технический университет

Генерация устойчивых блочных методов для решения жестких дифференциальных уравнений и их систем

В работе рассматриваются проблемы, связанные с параллельным моделированием динамических систем, относящихся к классу быстро-замедленных, или сингулярно - возмущенных. Рассмотрены вопросы генерации и параллельной реализации блочных методов решения задачи Коши для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем с вариацией шага. Доказана А-устойчивость одношаговых многоточечных разностных методов. Рассмотренные методы существенно повышают эффективность численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Параллельное моделирование, быстро-медленная система, сингулярно - возмущенная система, блочный метод, задача Коши, жесткая система обыкновенных дифференциальных уравнений

O.A. DMITRIEVA

Donetsk National Technical University

Generation of Stable Methods for Stiff Differential Equations and Their Systems Solving

The problems to be considered in this work are the problems connected with parallel modeling of stiff dynamic systems with concentrated parameters which belong to the class of quickly-slow, or singularly perturbed systems. Approaches to generation of block methods coefficients of the prescribed degree of accuracy have been developed and their stability has been proved. The examined methods considerably raise efficiency of the numerical solution of stiff systems of the ordinary differential equations

parallel modeling, quickly-slow system, singularly perturbed system, block method, Cauchy problem, stiff system of the ordinary differential equations