УДК 004.054

А.И. Андрюхин
Донецкий национальный технический университет
alexandruckin@rambler.ru

Компьютерные оценки единственности решений одной задачи идентификации

Рассматривается задача определения вероятности нахождения системы в определенных состояниях. Исследуется случай наличия проективных данных наблюдения за системой. Определены условия единственности решения.

Идентификация, система, вероятность, состояние, оценка

Введение

В [1] рассматривалась достаточно общая задача идентификации системы по ее проекциям. Согласно постановке задачи, имеем ситуацию наблюдения системы системами-наблюдателями, согласно [2, стр.232]. Считаем, что состояние системы определяется N двоичными признаками. Следовательно, число состояний системы равно 2^N. Каждая из систем-наблюдателей может определять значения только $к_i$ определенных переменных из N возможных. Можно сказать, что даны проекции наблюдаемой системы и необходимо идентифицировать ее параметры. Считаем, что все системы наблюдатели наблюдают равное количество к определенных переменных из N возможных, так как в случае наблюдений с неравным количеством признаков задача сводится к вышеупомянутой и об этом будет сказано ниже.

Результатом работы каждой системы-наблюдателя является таблица частот наблюдения 2^k возможных комбинаций и исходными данными является совокупность вышеупомянутых таблиц. Число таких систем ограничивается значением C(k,N), т.е. числом сочетаний k элементов из N [3].

Под идентификацией системы S будем понимать определение вероятностей нахождения системы в любом из 2^N состояний. Считаем выполненными следующие положения:

1)за время наблюдения идентифицируемая система имеет стационарное распределение по состояниям;

2)позиция наблюдателей не влияет на результаты наблюдений.

Исходя из вышеизложенного, в работе решается задача определения вероятностей нахождения системы в любом из 2^N состояний по данным проекций ее наблюдений наблюдателями с равным количеством признаков.

Согласно [1], решение поставленной задачи находим путем выполнения двух этапов.

На первом этапе, согласно опытным таблицам наблюдений, строим систему линейных уравнений. Неизвестными величинами для этой системы являются вероятности нахождения системы в определенных состояниях.

На втором этапе выполняем анализ решения построенной системы.

Было указано, что с практической точки зрения важны:

а) определение условий однозначной идентификации системы, т.е. когда пространство решений имеет размерность нуль;

б) оценка точности и устойчивости найденных идентификационных областей в зависимости от уровня шума в исходных данных.

Последние два вопроса являются целью исследования данной работы.

Для уяснения задачи рассмотрим примеры расчетов и выполним их анализ.

Примеры расчетов и анализ результатов

В таблице 1 представлены данные наблюдений систем D1, D2, D3, D4, каждая из которых определяет частоту 8 возможных двоичных значений для трех наблюдаемых признаков (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4) соответственно.

Число систем-наблюдателей (D1, D2, D3, D4) взяли в этом примере максимальным, т.е.равным С(3,4). Согласно исходным данным , N=4 и к=3, получаем, что число состояний наблюдаемой системы равно 2^4 =16 и необходимо определить значения P_i ,i=1,16.

Таблица 1.Данные наблюдений

Значения комбинаций признаков			Наблюдаемые двоичные признаки			
			Системы-наблюдатели			
			D1	D2	D3	D4
			1,2,3	1,2,4	1,3,4	2,3,4
0	0	0	0.2	0.2	0.14	0.2
0	0	1	0.2	0.2	0.14	0.2
0	1	0	0.08	0.08	0.14	0.2
0	1	1	0.08	0.08	0.14	0.2
1	0	0	0.2	0.2	0.11	0.05
1	0	1	0.2	0.2	0.11	0.05
1	1	0	0.02	0.02	0.11	0.05
1	1	1	0.02	0.02	0.11	0.05

Согласно реализованному алгоритму[1], будет построена матрица 32×16

1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
……………………………
0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1

Этой матрице соответствует генерируемая система из $C(3,4)2^3=32$ уравнений, которая состоит из

а) уравнения для наблюдений D1

P1+P9 =0.2, P5+P13 =0.2, P3+P11 =0.08, P7+P15 =0.08, P2+P10 =0.2, P6+P14 =0.2, P4+P12 =0.02, P8+P16 =0.02,

б) уравнения для наблюдений D2

P1+P5 =0.2, P9+P13 =0.2, P3+P7 =0.08, P11+P15 =0.08, P2+P6 =0.2, P10+P14 =0.2, P4+P8 =0.02, P12+P16 =0.02,

в) Уравнения для наблюдений D3

P1+P3 =0.14, 9+P11 =0.14, P5+P7 =0.14, P13+P15 =0.14, P2+P4 =0.11, P10+P12 =0.11, P6+P8 =0.11, P14+P16 =0.11,

г) уравнения для наблюдений D4

P1+P2 =0.2, P9+P10 =0.2, P5+P6 =0.2, P13+P14 =0.2, P3+P4 =0.05, P11+P12 =0.05, P7+P8 =0.05, P15+P16 =0.05.

Решение имеет вид

P1 = 0.2-P9, P2 = P9, P3 = P9-0.06, P4 =0.11-P9 , P5 = P9, P6 = -P9 + 0.2,
P7 = 0.14- P9, P8 = P9-0.09, P9 = P9, P10 = -P9 + 0.2, P11 = 0.14-P9, P12 = P9-0.09,
P13 = 0.2-P9, P14 = P9, P15 = P9-0.06, P16 = 0.11-P9

Так как для всех P_i ,i=1,16 имеем, что $1 \geq P_i \geq 0$, отсюда $0.11 \geq P9 \geq 0.09$, а остальные неизвестные вероятности зависят от от выбранного значения P9. Таким образом, однозначно определить вероятности состояния системы невозможно.

Этот результат можно было предугадать, так как ранг матрицы равен 15 при наличии 16 неизвестных. Однако однозначность идентификации состояний системы зависит от конкретных значений частот наблюдений систем наблюдателей. К примеру, для N=4 , к=2 имеем систему уравнений в табл.2 и согласно табл.1[1] ранг ее матрицы коэффициентов равен 11. Следовательно, пространство решений генерируемой системы в общем случае имеет размерность 16-11=5[4,5]. Действительно, для всех C(2,4)=6 систем наблюдателей мы получаем следующую систему из 24 уравнений.

При условиях на переменные $1 \geq P_i \geq 0$, i=1,16 пространство решений решений при правой части для первого варианта зависит от выбранных значений P4, P6, P7, P8, P9 и имеет вид

P1 = -0.25+P6+2P8+P4+P7,
P2 =0 .25-P6-P8-P4,
P3 =0 .25-P7-P8-P4,
P4 = P4,
P5 =0 .25-P6-P7-P8,
P6 = P6, P7 = P7, P8 = P8, P9 = P9,
P10 = -P9+0.25-P7-P8,
P11 = -P9+0.25-P6-P8,
P12 = 2P8-0.25+P7+P9+P6,
P13 = -P8+0.25-P9-P4,
P14 = P7+2P8-0.25+P9+P4,
P15 = 2P8-0.25+P9+P6+P4,
P16 = -P7-P9-P6+0.5-3P8-P4.

На рис.1 представлена область значений параметров P7, P8, P9 при P4, P6 равными нулю.

Однако возможна точная идентификация наблюдаемой системы для правой части второго варианта. При этом имеем P1, P3, P5, P7, P9, P11, P13, P15 =0, P2, P4, P14, P16=0.25 и P6, P10, P12 =0.

Достаточные условия однозначности решения

Для решаемой задачи, при наблюдении системы, решение всегда существует и следовательно по теореме Кронекера-Капелли, матрица коэффициентов и расширенная матрица системы уравнений имеют один ранг [4]. Поэтому исходя из алгебраических сведений для линейных систем уравнений для однозначности решений достаточно R= P, где R(P)-ранг системы (число независимых переменных в уравнениях) соответственно, в противном случае пространство решений имеет размерность P-R[4,5].

Если рассматриваемое уравнение является однородным (его правая часть равна нулю), то все переменные в его левой части равны нулю, что следует из $1 \geq P_i \geq 0$ для i=1, 2^N. Число этих переменных определяется количеством наблюдаемых признаков k. На практике некоторые комбинации признаков не наблюдаются, что означает равенство нулю правых частей соответствующих этим комбинациям уравнений.

Пусть T уравнений имеют нуль в правой части, тогда можно записать достаточное условие однозначности

$$R(U_T) = 2^N - \sum N_i,\ i=1,T \qquad (5)$$

,где U_T –преобразованная система с учетом, того что $\sum N_i$ неизвестных вероятностей равны нулю, U –исходная система уравнений, N_i –число переменных, которые добавляются в список нулевых переменных при рассмотрении i-уравнения из T ($N_i \geq 1$).

К примеру, рассмотрим третий вариант правой части системы уравнений в табл.2. Ранг матрицы коэффициентов этой системы равен 10 с учетом того, что P1,P5,P9,P13=0.

Получаем T=1, $R(U_T)$ =10, $\sum N_i$ =4, R(U)=11. Поэтому пространство решений имеет размерность (16-4)-10=2 и представлено ниже

P1 = 0, P2 = -0.15+P7+P8, P3 =0.3-P7,
P4 = 0.1-P8, P5 = 0, P6 = 0.25-P7-P8,
P7 = P7, P8 = P8, 9 = 0, P10 =0.25-P7-P8,
P11 = P7, P12 = P8, P13 = 0,
P14 = -0.15+P7+P8, P15 = 0.3-P7, P16 = 0.1-P8.

Возможные значения P7,P8 представлены на рис.2.

Таблица 2.Идентификация системы с различными данными наблюдений

Номер уравнения	Левая часть	Варианты значений правой части 1 2 3 4 5 6					
1	P1+P5+P9+P13	0.25	0	0	0	0	0
2	P3+P7+P11+P15	0.25	0	0.6	0.8	0.6	0.6
3	P2+P6+P10+P14	0.25	0.5	0.2	0.1	0.2	0
4	P4+P8+P12+P16	0.25	0.5	0.2	0.1	0.2	0.4
5	P1+P3+P9+P11	0.25	0	0.3	0.4	0.6	0.3
6	P5+P7+P13+P15	0.25	0	0.3	0.4	0	0.3
7	P2+P4+P10+P12	0.25	0.5	0.2	0	0.2	0.2
8	P6+P8+P14+P16	0.25	0.5	0.2	0.2	0.2	0.2
9	P1+P3+P5+P7	0.25	0	0.3	0.4	0.3	0.3
10	P9+P11+P13+P15	0.25	0	0.3	0.4	0.3	0.3
11	P2+P4+P6+P8	0.25	0.5	0.2	0.1	0.2	0.2
12	P10+P12+P14+P16	0.25	0.5	0.2	0.1	0.2	0.2
13	P1+P2+P9+P10	0.25	0.25	0.1	0	0.1	0
14	P5+P6+P13+P14	0.25	0.25	0.1	0.1	0.1	0
15	P3+P4+P11+P12	0.25	0.25	0.4	0.4	0.7	0.5
16	P7+P8+P15+P16	0.25	0.25	0.4	0.5	0.1	0.5
17	P1+P2+P5+P6	0.25	0.25	0.1	0.05	0.1	0
18	P9+P10+P13+P14	0.25	0.25	0.1	0.05	0.1	0
19	P3+P4+P7+P8	0.25	0.25	0.4	0.45	0.4	0.5
20	P11+P12+P15+P16	0.25	0.25	0.4	0.45	0.4	0.5
21	P1+P2+P3+P4	0.25	0.5	0.25	0.2	0.4	0.25
22	P9+P10+P11+P12	0.25	0	0.25	0.2	0.4	0.25
23	P5+P6+P7+P8	0.25	0	0.25	0.3	0.1	0.25
24	P13+P14+P15+P16	0.25	0.5	0.25	0.3	0.1	0.25

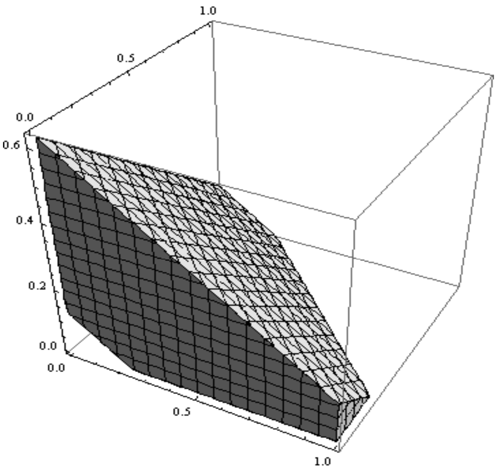

Рисунок 1 - Область определения P7,P8, P9.

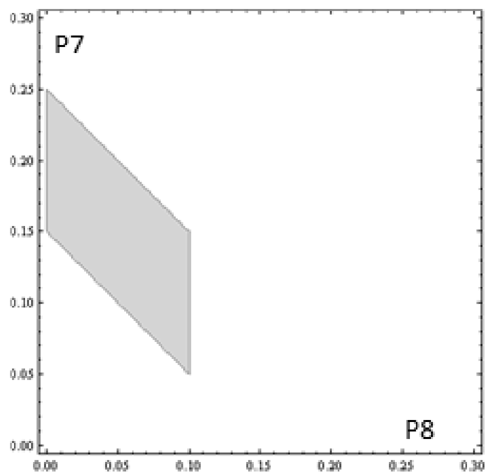

Рисунок 2 - Область определения переменных P7,P8.

Выполнены расчеты для определения рангов матриц преобразованных систем уравнений и количества независимых переменных в них при нулевых правых частях выбранных сочетаний уравнений, где число уравнений в сочетаниях равно 1,2,3. Объем результатов не позволяет полностью их привести.

Приведем в табл.3 характеристики для исходной системы случай, когда два уравнения имеют нулевую правую часть и первое имеет номер 1.

Отсюда можем на основании условия (5) ожидать, что единственное решение может быть только когда, пары уравнений (1,7), (1, 8) (1, 11),(1,12),(1,15),(1,16),(1,19), (1,20) являются однородными. Действительно, для 4 варианта получаем однозначные значения неизвестных вероятностей

P1 = 0, P2 = 0, P3 = 0.2, P4 = 0, P5 = 0,
P6 = 0.05, P7 =0.2, P8 = 0.05, P9 = 0,
P10 = 0, P11 = 0.2, P12 = 0, P13 = 0,
P14 = 0.05, P15 =0.2, P16 = 0.05.

Для 5 варианта пространство решений имеет размерность 10-9=1

P1 = 0, P2 = P8, P3 = 0.3, P4 =0.1-P8, P5 = 0, P6 =0.1-P8, P7 = 0, P8 = P8, P9 = 0, P10 = 0.1-P8, P11 =0.3, P12 = P8, P13 = 0, P14 = P8, P15 = 0, P16 =0.1-P8. Здесь 0.1≥ P8 ≥0.

Таблица 3.Характеристики системы уравнений

Ранг матрицы $R(U_T)$	Число нулевых переменных $\sum N_i$	Число оставшихся переменных $2^N-\sum N_i$	Номер второго уравнений
7	8	8	2, 3, 4
8	8	8	7,8,11,12, 15,16,19,20
9	6	10	5,6,9,10,13, 14,17,18,21, 22,23,24

Для 6 варианта пространство решений имеет размерность 8-7=1 и при 0.2≥ P8 ≥0

P1 = 0, P2 = 0, P3 = 0.05+P8,
P4 = 0.2-P8, P5 = 0, P6 = 0,
P7 = 0.25-P8, P8 = P8, P9 = 0,
P10 = 0, P11 = 0.25-P8, P12 = P8,
P13 = 0, P14 = 0, P15 = 0.05+P8,
P16 = 0.2-P8.

Оценки параметров решений

При определении единственности решений мы считали, что значения коэффициентов и правых частей уравнений являются точными. Но правые части уравнений являются опытными данными, и поэтому, как и все эмпирические данные наблюдений подвержены случайным возмущениям. Следовательно, множество решений рассматриваемой задачи идентификации мы можем определять либо как решение задачи интервального анализа с точечной матрицей коэффициентов с дополнительными условиями связи (сумма правых частей уравнений для каждой системы наблюдателя равна 1), либо с помощью статистического моделирования (метод Монте Карло).

Однако известно, что статистическое моделирование не может гарантировать точности и доказательности своих результатов в строго математическом смысле. Так с возрастанием размерности задачи , в частности при решении интервальной системы линейных уравнений при фиксированном объеме выборки, его результаты значительно отличаются от более точного интервального решения [6,7].Необходимо однако отметить тот факт, что для функций большого числа переменных "не очень плохие" вероятностные распределения на областях определения аргументов преобразуются на области значений функции в распределение, для которого в точках около границ плотность распределения чрезвычайно мала[8]. Представленные в последней работе примеры и рассуждения свидетельствуют в пользу использования методов статистического моделирования при уменьшении требований.

С другой стороны, большинство задач, которые решаются с помощью интервального анализа и которые требуют оптимального решения, являются NP-полными[9]

Напомним, что для интервала **a**=($\underline{a}$,$\overline{a}$) т.и. $\underline{a} \leq a \leq \overline{a}$, rad **a** **т**=($\overline{a} - \underline{a}$)/2 есть радиус интервала, mid **a**=($\underline{a}+\overline{a}$)/2-середина интервала. Магнитуда интервала **a** обозначается <**a**> и представляет собой наименьшее расстояние точек интервала до нуля.

Рассмотрим общую задачу интервального анализа для решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i,\ i = 1, m$$

Показано, что пересечение множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений с каждым из ортантов пространства R^n может быть определено путем решения системы линейных неравенств. Это можно выполнять с помощью методов линейного программирования[6].

В общем случае определение пустоты или наличия решений интервальной линейной системы уравнений n требует порядка 2^n решений системы 2m+n линейных неравенств и являются NP-полными[10].

Для нашего случая, когда мы решаем задачу интервального анализа с точечной матрицей коэффициентов и интервальной правой частью, возможно использование распознающего функционала.

$$U = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ rad\, b_i - \left| mid\, b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right| \right\}$$

Этот важный в практическом плане случай позволяет использовать развитые средства нахождения экстремальных значений функций согласно теории нестатического анализа.

Для рассматриваемой задачи желательно исследовать множества решений для сгенерированных уравнений для конкретных систем наблюдателей при сохранении дополнительной связи, т.е. сумма правых частей уравнений для каждой системы наблюдателя равна ***1.***

Таким образом, имеем для определения существования решения следующую постановку задачи:

Найти max ***u,*** для которого выполняются следующие условия

$$b_i - {}_i(rad\, b_i - u) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j, \qquad i = 1, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i + {}_i(rad\, b_i - u), \qquad i = 1, m$$

Здесь ξ_i-булев признак возможного допуска для соответствующей правой части**.**

Для наглядности рассмотрим расчеты характеристик множества решений для модификаций третьего варианта значений правой части из табл.2.Для простоты считаем, что ***rad b**$_i$*=0.1, i=1,24.

Заключение

В работе построены достаточные условия единственности решения задачи идентификации системы по данным наблюдений ее состояний согласно некоторым проективным двоичным данным.

Если мы считаем, что наблюдения имеют погрешности, необходимо использовать методы интервального анализа.

В частности, использование распознающего функционала множества решений задача исследования разрешимости интервальной системы линейных алгебраических уравнений сводится к удобной аналитической форме, Это позволяет более детально исследовать и корректировать исходную систему. При этом возможно в некоторых случаях определять некорректные исходные данные, так как если при математической обработке данных нет решения, то исходные данные ошибочные (с шумом).

Таблица 4.Значения допусков для решений.

Правая часть	Значения правой части системы уравнений				
b1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
b2	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7
b3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
b4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
b5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5
b6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
b7	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3
b8	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
b9	0.3	0.3	0.3	0.35	0.35
b10	0.3	0.3	0.3	0.25	0.25
b11	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
b12	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Правая часть	Значения правой части системы уравнений				
b13	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
b14	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
b15	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
b16	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
b17	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
b18	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
b19	0.4	0.4	0.4	0.4	0.35
b20	0.4	0.4	0.4	0.4	0.45
b21	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
b22	0.4	0.4	0.4	0.4	0.35
b23	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15
b24	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Значение ***u***	0.1	0.066	0.033	0.033	0.033

Список литературы

1. Андрюхин А.И. Компьютерные оценки параметров идентификации систем / А.И. Андрюхин // Научные труды Донецкого государственного технического университета. Серия: Информатика, кибернетика и вычислительная техника. – 2010. – Вып. 12. – С.7-11.
2. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач / Дж. Клир ; пер. с англ.—М.: Радио и связь, 1990.—544 с.
3. Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: уч. пособ. / Б. Н. Иванов. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. - 288 с.
4. Handbook of discrete and combinatorial mathematics / Kenneth H. Rosen, editor in chief, John G. Michaels, project editor...[et al.]. – 1999.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г.Курош. – М.:Наука,1968. - 431 с.
6. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый // Новосибирск, 2011. – Электронная книга, доступна на http//www.nac.ru/Library/InteBooks
7. Шарый С.П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло / С.П. Шарый //Вычислительные технологии. – 2007. – №12. – С.103-115.
8. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.:Мир,1975.
9. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations / V. Kreinovich, A. Lakeyev, J. Rohn, and P. Kahl // Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht, 1998.
10. Linear Optimization Problems with Inexact Data / M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik, J. Rohn and K. Zimmermann // Springer Science. – 2006. – P. 227.

Надійшла до редколегії 10.03.2011

О.І. АНДРЮХІН
Донецький національний технічний університет

Комп'ютерні оцінки єдиності рішень однієї задачі ідентифікації

Розглядається задача визначення ймовірності знаходження системи в певних станах. Досліджується випадок наявності проективних даних спостереження за системою. Визначено умови єдиності рішення.

ідентифікація, система, ймовірність, стан, оцінка

A. I. ANDRUKHIN
Donetsk National Technical University

Computer Estimation of Conditions for the Uniqueness of Solutions to a Problem of Identification

The problem of determining the probability of finding the system in certain states is considered. The case of the presence of surveillance data on projections of the system is investigated. Conditions for the uniqueness of solutions are constructed.

identification, system, state, probability, score