

РАЗРАБОТКА МЕТОДАМИ ЧАСТОТНОГО АНАЛИЗА  
АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛОКАЛЬНЫХ ВЕТВЕЙ  
ШАХТНОЙ ВЕНТИЛЯЦИОННОЙ СЕТИ

Лапко В.В., Чередникова О.Ю.  
кафедра ЭВМ ДонНТУ

*На основе методов частотного анализа для реального спектра производственных возмущений разработаны приближенные аэродинамические модели локальных ветвей шахтной сети. Показано, что длинные ветви шахтной сети с достаточной для практики точностью могут быть аппроксимированы цепочечной схемой из коротких ветвей с сосредоточенными параметрами. Установлена зависимость между числом коротких ветвей приближенной модели с сосредоточенными параметрами и протяженностью локальной ветви сети. Разработанные приближенные аэродинамические модели локальных ветвей могут быть использованы для синтеза математической модели шахтной сети как объекта управления.*

**Введение**

В произвольных переходных режимах состояние горных выработок шахтной вентиляционной сети как аэродинамического объекта описывается телеграфными уравнениями волновых движений в частных производных [1]. Однако, при относительно низком темпе переходных процессов эти уравнения могут быть сведены к более простой математической модели – к обыкновенным дифференциальным уравнениям [2]. Для количественной характеристики темпа переходных процессов в выработках удобно использовать соотношение длины ветви  $l$  и минимальной длины бегущей волны сжатия воздуха вдоль выработки при действии производственных возмущающих воздействий  $\lambda_{\min}$  ( $\lambda_{\min} = aT_{\min}$ , где  $a \cong 340$  м/с – скорость звука в воздухе,  $T_{\min}$  – период верхней гармоники существенного спектра производственных возмущающих воздействий в шахтной сети). Для реальных шахтных условий период верхней гармоники возмущающих воздействий составляет примерно 12,5 секунд [2]. Поэтому минимальная длина бегущей волны сжатия воздуха вдоль выработки при реальных производственных возмущениях в шахтных выработках практически не превышает  $\lambda_{\min} \cong 4250$  м. Для конкретной выработки сети этот темп возмущающих

воздействий является либо низким, либо высоким, в зависимости от соотношения длины выработки ( $l$ ) и минимальной длины бегущей волны сжатия воздуха в выработке ( $\lambda_{\min}$ ). В шахтных условиях большая часть выработок меньше 600м (90% всех выработок). В то же время, максимальная длина выработок может достигать 4000м [2]. Следовательно, длина выработок реальной шахтной сети может быть как существенно меньше (в 7 и более раз), так и примерно равна длине бегущей волны сжатия воздуха вдоль выработки при реальных производственных возмущениях. Таким образом, в рабочей полосе частот возмущающих воздействий (примерно до 0.08 Гц) выработки шахтной сети по отношению к длине бегущей волны сжатия воздуха могут считаться как короткими ( $l \ll \lambda_{\min}$ ), так и длинными ( $l \approx \lambda_{\min}$ ) [3,4,5]. При этом аэродинамическая модель выработок должна воспроизводить тем более сложный характер бегущей волны сжатия воздуха при реальных производственных возмущающих воздействиях, чем больше геометрическая длина выработки по отношению к длине волны. В силу этого, для выработок шахтной сети различной протяженности должны использоваться различные (минимальные по сложности) математические модели.

До настоящего времени с учетом реальных производственных возмущений задача синтеза минимальных по сложности аэродинамических моделей не решена для всего типового ряда шахтных выработок. В данной работе на основе методов частотного анализа предлагается методика построения адекватных аэродинамических моделей с достаточной для практики точностью, описывающих переходные аэродинамические процессы в горных выработках шахтной сети с учетом реального темпа производственных аэродинамических возмущений.

### **1. Априорная разработка математической модели коротких выработок шахтной вентиляционной сети**

Наиболее простыми дифференциальными уравнениями, связывающими давление и поток воздуха в выработках, описываются так называемые короткие выработки, в которых распределенностью параметров можно пренебречь. При этом для классификации выработок на короткие и длинные существует несколько практических подходов, не требующих решения телеграфных уравнений волновых движений.

Распространение аэродинамических воздействий вдоль любой выработки ограничено скоростью бегущей волны сжатия воздуха (скоростью звука)  $a \approx 340$ м/с. В силу этого время затрачиваемое на то, чтобы в выработке (ветви шахтной вентиляционной сети) произошло

изменение потока воздуха на ее конце (выходе выработки), в общем случае должно быть не менее  $t_d=1/a$ , где  $t_d$  – запаздывание сигнала на границе (конце) ветви.

Очевидно, что при достаточно малых  $t_d$  запаздыванием выходного сигнала в выработке можно пренебречь. Из физических соображений ясно, что для этого длительность изменения входных воздействий в выработке должна быть достаточно большой по отношению ко времени запаздывания выходного сигнала. Считается, что выработку можно считать короткой, если запаздывание сигнала на порядок меньше характерного времени нарастания (или спада) входных воздействий [3]. В этом случае входные и выходные сигналы в выработке являются практически синфазными. В качестве математической модели выработки в этих режимах допустимо использовать и широко применяются обыкновенные дифференциальные уравнения. Однако, понятие длительности входных воздействий для различных форм воздействий (линейной, экспоненциальной, синусоидальной) является недостаточно определенным и поэтому этот подход трудно использовать. Для оценки степени синхфазности входных и выходных сигналов выработки (и определения таким образом граничной длины коротких выработок) вместо длительности изменения входного сигнала (возмущений) более широко используют частоту верхней гармоники спектра аэродинамических возмущений. Для гармонического воздействия установлено [6], что для шахтных выработок граничная длина короткой выработки ( $l_{lim}$ ) составляет

$$l_{lim} \leq \lambda_{min} / 7, \quad (1)$$

где  $\lambda_{min}=a T_{min} = a (2\pi)/\omega_{max}$ ;  $\omega_{max}$  – круговая частота верхней гармоники спектра реальных гармонических сигналов.

Если сигналы не являются чисто гармоническими, этот подход также может быть использован. В этом случае для оценки верхней гармоники спектра существенных возмущений  $\omega_{max}$  используют интеграл Фурье [6]

$$|S_Q(j\omega)| = \left| \int_0^{\infty} Q(t)e^{j\omega t} dt \right|, \quad (2)$$

где  $|S_Q(j\omega)|$  – модуль спектральной плотности входного возмущающего воздействия в выработке по воздуху  $Q(t)$ , возникающего при  $t = 0$  и отсутствующего при  $t < 0$ .

В соответствии с этим для наиболее типичных в шахтной вентиляционной сети апериодических аэродинамических возмущений по воздуху  $Q(t)$  полоса существенных частот составит [6]:

$$|S_Q(j\omega)| = \left| \int_0^{\infty} Q(t)e^{-(\alpha-j\omega)t} dt \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad (3)$$

где  $\alpha = 1 / \tau_{\text{EXP}}$ ;  $\tau_{\text{EXP}}$  – постоянная времени экспоненциального возмущения по воздуху  $Q(t)$ .

В силу этого, если в этом выражении не учитывать частоты, мощность которых составляет меньше 5%, для апериодических возмущений верхняя граница спектра существенных частот составит [7]:

$$\omega_{\text{max}}^{\text{EXP}} \approx 20 / \tau^{\text{EXP}}. \quad (4)$$

В общем случае при известной границе существенных частот  $\omega_{\text{max}}$  в соответствии с (1) выражение для критичной длины коротких выработок можно записать в виде

$$l_{\text{lim}} \leq \frac{2\pi a}{7\omega_{\text{max}}} \quad (5)$$

Как известно, для условий реальных шахт верхняя граница полосы существенных частот  $\omega_{\text{MAX}} \approx 0.5$  рад/с [1]. Следовательно, согласно [6] в условиях реальных производственных возмущений в соответствии с (5) в качестве предельной длины ветви, в которой можно пренебречь распределенностью параметров, ориентировочно можно принимать выработку длиной

$$l_{\text{lim}} \approx 2\pi \cdot 340 / (7 \cdot 0,5) \approx 600 \text{ м}. \quad (6)$$

Отметим также, что в соответствии с (4), эти выработки (600 м и меньше) могут рассматриваться как схемы с сосредоточенными параметрами, т.е. короткими, также для непериодических экспоненциальных возмущающих воздействий с постоянной времени  $\tau_{\text{EXP}} \geq 40$  с.

Используя частотные методы анализа динамики выработки определим адекватность полученных рекомендаций [6].

В качестве исследуемой модели короткой выработки выберем простой четырехполюсник, например, симметричный  $T$  – четырехполюсник с сосредоточенными акустическими и аэродинамическими параметрами (рис.1):

$$R = R_0 l; \quad L = L_0 l; \quad C = C_0 l; \quad g = g_0 l,$$

где  $R_0 = \partial R / \partial x$ ,  $L_0 = \partial L / \partial x = \rho / F$ ,  $C_0 = \partial C / \partial x = F / (\rho a^2)$ ,  $g_0 = \partial g / \partial x$  – соответственно удельные аэродинамическое сопротивление, инерционность, гибкость выработки и аэродинамическое сопротивление утечки;  $F$  – сечение выработки;  $\rho$  – плотность воздуха.

Изменения расхода и давления воздуха относительно установившихся значений соответственно на входе ( $Q_i$ ,  $P_i$ ) и выходе ( $Q_0$ ,  $P_0$ ) Т – модели короткой выработки могут быть описаны (в матричной форме) в виде [8] :

$$P_i = A P_0 + B Q_0; \quad (7)$$

$$Q_i = E P_0 + D Q_0, \quad (8)$$

где  $A = 1 + Z_1 / (2 Z_2)$ ;  $B = Z_1 (1 + \frac{Z_1}{4Z_2})$ ;  $E = 1 / Z_2$ ;  $D = A$ ;

$Z_1 = (pL+R)l$  – продольное операторное аэродинамическое сопротивление короткой выработки;

$Y_2 = (g + pC)$  – поперечная операторная проводимость короткой выработки;

$Z_2 = 1 / Y_2$  – поперечное операторное аэродинамическое сопротивление схемы замещения короткой выработки;

$p$  – оператор Лапласа.

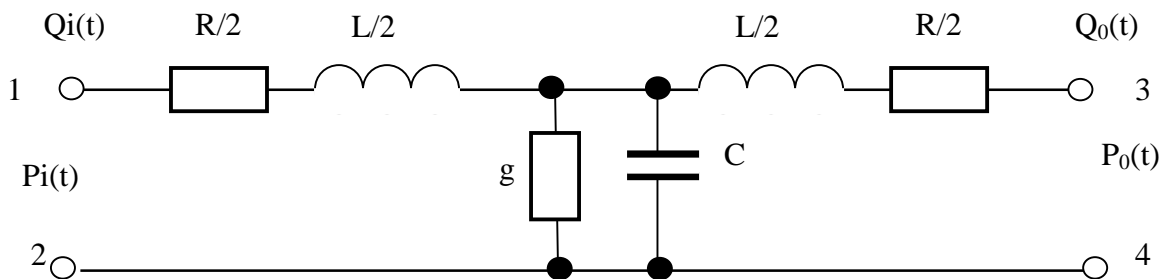


Рисунок 1 – Схема замещения короткой выработки Т-четырёхполюсником

Кроме того [8], в силу обратимости построенной модели (рис. 1) для (7) и (8) справедливо соотношение

$$A D - B E = 1 \quad (9)$$

Если ввести для рассматриваемого Т – четырехполюсника вектор входных ( $X_i$ ) и выходных ( $Y_0$ ) переменных, уравнения (7), (8) и (9) окончательно могут быть записаны в форме:

$$X_i = M Y_0, \quad (10)$$

где  $M = \begin{vmatrix} A & B \\ E & D \end{vmatrix}$  – матрица коэффициентов пропорциональности модели ветви;

$$X_i = |P_i \quad Q_i|; \quad (11)$$

$$Y_0 = |P_0 \quad Q_0|. \quad (12)$$

## 2. Априорная разработка математической модели длинных выработок шахтной вентиляционной сети

В выработках, длина которых  $l > l_{\text{lim}} \cong 600\text{м}$ , при реальных производственных возмущениях ( $\omega_{\text{max}} \approx 0,5\text{с}^{-1}$ ) запаздывание входного сигнала играет уже более существенную роль и в них необходимо учитывать распределенность аэродинамических процессов и волнообразный характер бегущей волны сжатия воздуха вдоль выработки. Для анализа точностных характеристик приближенных моделей этих выработок воспользуемся цепочечными схемами из коротких ветвей, соответствующих отдельным, рассмотренным выше четырехполюсникам (рис. 2). В цепочечной модели каждая Т-схема отображает определенный достаточно короткий отрезок длинной ветви, запаздывание сигнала в котором пренебрежимо мало. Априорно при исследованиях количество звеньев длинной ветви будем определять из условия  $n > l / l_{\text{lim}}$ .

При заданной длине ветви (l) и известной границе полосы существенных частот ( $\omega_{\text{MAX}}$ ) в соответствии с (5) полученное выражение можно записать в виде:

$$n \geq (7 l \omega_{\text{MAX}}) / (2 \pi a). \quad (13)$$

Для составления математической модели цепочечной схемы замещения

(рис. 2) выработки рассмотрим уравнения состояния каждого ее звена.

Для первого звена цепочечной модели получим:

$$\frac{L}{2} \frac{dQ_1}{dt} = - \left( R_i + \frac{R}{2} \right) Q_1 + P - P_1; \quad (14)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = - \frac{g}{C} P_1 + \frac{1}{C} (Q_1 - Q_2). \quad (15)$$

где L, g, C, R – соответственно индуктивность, проводимость утечки, акустическая гибкость и сопротивление одного звена ( $l_i$ ) цепочечной модели длинной ветви ( $L=L_0l_i$ ,  $g=g_0l_i$ ,  $C=C_0l_i$ ,  $R=R_0l_i$ ).

Динамика второго, третьего (и других средних) звеньев в ветви, очевидно, будут описываться системой уравнений:

$$L \frac{dQ_2}{dt} = -RQ_2 + (P_1 - P_2); \quad (16)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{g}{C} P_2 + \frac{1}{C} (Q_2 - Q_3); \quad (17)$$

$$L \frac{dQ_3}{dt} = -RQ_3 + (P_2 - P_3); \quad (18)$$

$$\frac{dP_3}{dt} = -\frac{g}{C} P_3 + \frac{1}{C} (Q_3 - Q_0). \quad (19)$$

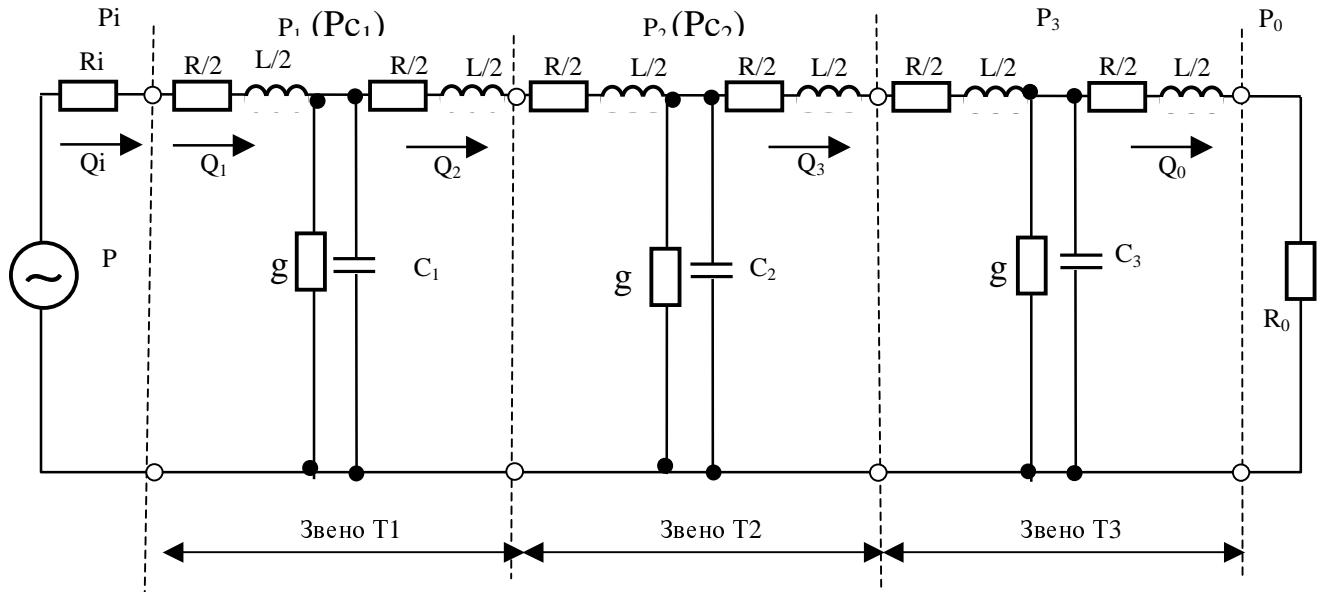


Рисунок 2 – Каскадная трехзвенная модель (3Т-модель) локальной ветви сети

Поток воздуха в нагрузке  $R_0$  (рис.2) образует дополнительную переменную состояния по расходу в цепочечной модели длинной ветви:

$$\frac{L}{2} \frac{dQ_0}{dt} = -\left(R_0 + \frac{R}{2}\right) Q_0 + P_3. \quad (20)$$

Давление на входе ветви ( $P_i$ ) является функцией входного давления  $P(t)$  (рис.2) и выражается алгебраическим уравнением:

$$P_i(t) = P(t) - R_i Q_1, \quad (21)$$

где  $R_i$  – эквивалентное сопротивление регулятора расхода (PP) управляемой выработки.

Выходной переменной цепочечной модели ветви является выходное давление  $P_0(t)$ , определяемое соотношением:

$$P_0(t) = R_0 Q_0(t). \quad (22)$$

Система уравнений (14) ÷ (22) цепочечной модели длинной ветви сети в матричной форме для рассматриваемого случая (три звена, 3Т-модель) может быть представлена в виде:

$$\dot{X}(t) = A_m X(t) + B_m P(t); \quad (23)$$

$$Y(t) = C_m X(t) + D_m P(t), \quad (24)$$

где  $X(t) = |Q_1, Q_2, Q_3, Q_0, P_1, P_2, P_3|^T$  – вектор состояний цепочечной модели ветви;  $Y(t) = |P_i, P_1, P_2, P_3, P_0, Q_1|^T$  – вектор выходных переменных цепочечной модели ветви;  $A_m, B_m, C_m, D_m$  – матрицы состояний и выходных переменных цепочечной модели схемы замещения ветви;  $T$  – символ транспонирования.

В общем случае для цепочечной схемы замещения с  $n$  звеньями вектор состояния  $X$  будет содержать  $(2n + 1)$  элемент, а выходной вектор –  $(n + 3)$  элемента:  $X(t) = |Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n, Q_0, P_1, P_2, \dots, P_n|^T$ ;  $Y(t) = |P_i, P_1, P_2, \dots, P_n, P_0, Q_1|^T$

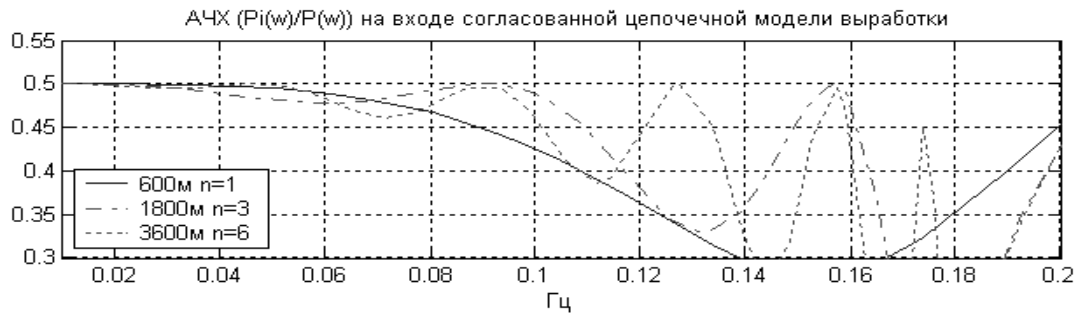
### **3. Оценка точности априорных моделей шахтных выработок методами частотного анализа**

Для уточненной оценки погрешности построенных приближенных моделей и разработки максимально простых приближенных цепочечных (минимальных по сложности) схем замещения длинных ветвей воспользуемся частотными методами [2]. При этом в качестве оригинала (образца) частотной характеристики используем характеристику «идеальной» модели ветви без потерь, согласованной по входу и выходу активным сопротивлением, равным волновому сопротивлению длинной ветви без потерь  $Z_B(R=0) = \rho a/F$ . Известно [8], что для такой ветви частотная характеристика выработки эквивалентна амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристике (АЧХ и ФЧХ) активного сопротивления, равного волновому сопротивлению  $Z_B$ . Полоса пропускания по входу такой согласованной выработки без потерь является неограниченной и сдвиг по фазе на входе ветви для всех частот входного сигнала равен нулю [8]. Очевидно, что при ограниченном количестве звеньев в цепочечной модели ветви без потерь, АЧХ и ФЧХ такой приближенной модели будут воспроизводить расчетную характеристику только в ограниченном диапазоне частот. Цепочечную модель с минимальным количеством звеньев модели длинной ветви сети, воспроизводящую расчетную характеристику для реальных производственных возмущений ( $\omega_{MAX} \leq 0.5 \text{ рад/с}$ ), будем считать искомой моделью ветви с распределенными параметрами, отражающей в полной мере динамические свойства ветви.

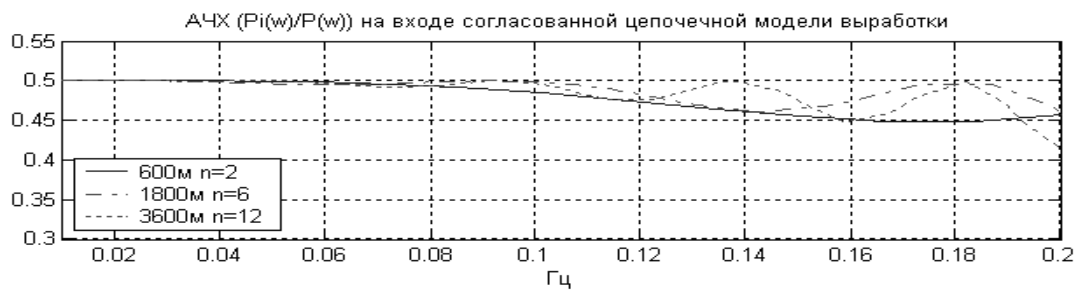
На рис.3 показаны экспериментальные частотные характеристики для некоторых типовых ветвей сети. При исследованиях для ветвей принимались близкие к средним удельные



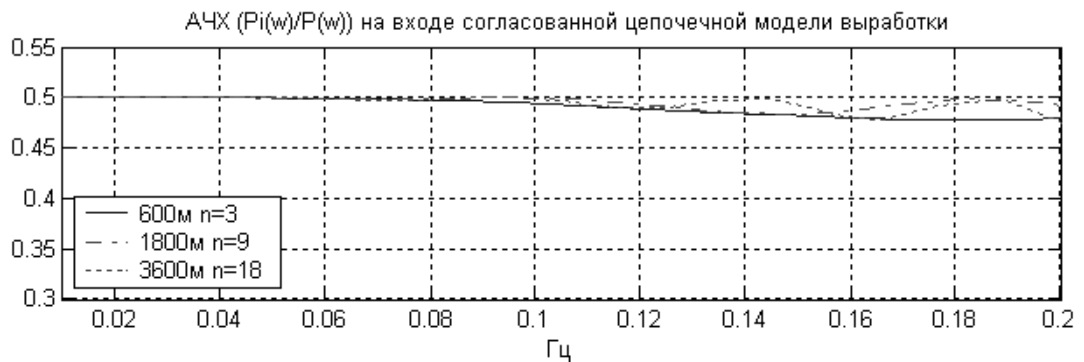
аэродинамические и акустические параметры:  $F=6\text{м}^2$ ,  $L_0=0.2 \text{ Нс}^2/\text{м}^6$ ,  $C_0=0.432 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4/\text{Н}$ ,  $Z_B \approx \sqrt{L_0/C_0} = 68 \text{ Нс}^2/\text{м}^6$ .



а)



б)



в)

Рисунок 3 – АЧХ приближенных моделей шахтных ветвей при  $l_{lim}=600\text{м}$  (а),  $300\text{м}$  (б) и  $200\text{м}$  (в).

Полученные результаты достаточно хорошо коррелируются с известными (расчетными) оценками динамически коротких и длинных ветвей для реальных производственных возмущений в шахтной сети [6]. Из машинных экспериментов следует, что одним четырехполосником достаточно хорошо аппроксимируются частотные свойства выработок длиной до 600м. Погрешность модели при этом не превышает 6% и во всем диапазоне рабочих частот (от 0 до 0,08 Гц) АЧХ приближенной модели качественно не отличается от расчетной зависимости. Однако, при аппроксимации длинных

выработок короткими ветвями длиной 600м АЧХ цепочечной модели выработки в качественном отношении существенно отличаются от расчетной зависимости  $P_i(\omega) / P(\omega) = 0.5$  (рис. 3,а). В рабочем диапазоне частот в цепочечной модели возникают резонансные явления для выработки длиной 1800м (из трех коротких ветвей длиной 600м) на частоте 0.06Гц, а для выработки длиной 3600м (из шести коротких ветвей длиной 600м) на частоте 0.04Гц. Значительно лучшими характеристиками обладают цепочечные модели из коротких ветвей длиной 300м (рис. 3,б). В этом случае в цепочечных моделях длинных выработок резонансные явления возникают при частоте  $\cong 0.1$ Гц, т.е. за пределами рабочей области частот. При аппроксимации длинных выработок короткими ветвями длиной 200м (рис. 3,в) в рабочем диапазоне частот АЧХ модели практически точно воспроизводит расчетную характеристику, а возникновение резонансных явлений отодвигается достаточно далеко от граничной рабочей частоты 0.08Гц (до частоты  $\cong 0.12$ Гц).

### **Заключение**

На основании методов частотного анализа в работе предложен оригинальный подход к разработке приближенных аэродинамических моделей локальных ветвей шахтной вентиляционной сети. Для оценки точности приближенных аэродинамических моделей локальных ветвей сети использовались частотные характеристики согласованной по входу и выходу выработки без потерь, вид которых хорошо известен и теоретически доказан для любого спектра аэродинамических возмущений. Приближенные модели выработки строились из конечной цепи коротких участков, каждый из которых аппроксимировал достаточно малый конечный элемент выработки. Адекватность приближенной цепочечной модели выработки из определенного количества коротких участков определялась сравнением реальной и теоретически известной частотных характеристик согласованной по входу и выходу выработки. Для реального спектра производственных возмущений шахтной сети показано, что 90% всех ветвей шахтной сети (длиною до 600м) с достаточной для практики точностью может быть аппроксимировано одним коротким участком с сосредоточенными акустическими и аэродинамическими параметрами. Установлена зависимость порядка приближенной цепочечной модели ветви от ее протяженности для нетипичных длинных ветвей шахтной сети. Показано, что длина коротких участков цепочечной модели длинных выработок не должна превышать 300м. Построенные модели выработок могут быть

использованы при разработке аэродинамической модели шахтной сети как объекта управления.

Библиографический список

1. П.Н. Ермолаев и др. Частотные свойства шахтной вентиляционной сети как объекта автоматического регулирования /– В кн. : Автоматическое управление в горном деле. – Новосибирск: Б. И., 1971, с.16 – 23.
2. Петров Н.Н., Ермолаев П.Н., Пономарев П.Т. Электронная модель системы автоматического управления проветривания шахт. В кн.: Автоматическое управление в горном деле. Новосибирск: Б.И.,1971, с.89 – 93.
3. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника. Санкт-Петербург, 2000. – 517с.
4. Уэйкерли Дж. Проектирование цифровых устройств, том 2. – М.: Постмаркет, 2002.- 1064с.
5. Verstein H. Handbuch der praktischen Elektronik. Band 2. – Fransis’Verlag – 2003. – 567с.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1963. – 684с.
7. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Часть 2. Специальные линейные и нелинейные системы автоматического регулирования одной величины. – М.: Энергия, 1966. – 325с.
8. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники, часть 1. – М.: Энергия, 1964. – 31с.

30.04.08