УДК 517.95 (09)

Гюгонио и проблема совместимости

Косолапов Ю.Ф., Фролофф Г.Н.

Донецкий национальный технический университет

В статті, яка є продовженням попередньої статті авторів, з'ясовується суть введеного Гюгоніо поняття сумісності, його зв'язок з теорією характеристик та значення для теорії розривів розв'язків рівнянь математичної фізики

4. С целью дальнейшего более глубокого и полного изучения разрывов второго порядка Гюгонио [1] прежде всего уточняет смысл выражения "распространение одного движения в другом", приходя к важ-ному понятию совместимости. В случае разрывов первого порядка не-обходимость аналогичного понятия была несколько ранее установлена Риманом [2].

Пусть, говорит Гюгонио, движение тела (стержня, жидкости или газа) в момент t представлено двумя различными решениями u_1 и u_2 некоторого уравнения с частными производными - в общем случае квазилинейного уравнения

$$Lu_{tt}+2Ku_{xt}+Hu_{xx}+M=0, \qquad (1)$$

где L, K, H, M - функции от x, t, u, u_x, u_y, а $x=\xi$ - точка их соединения в данный момент в том смысле, что[1]

$$u_1(\xi,t)=u_2(\xi,t), \quad \frac{\partial u_1(\xi,t)}{\partial x}=\frac{\partial u_2(\xi,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1(\xi,t)}{\partial t}=\frac{\partial u_2(\xi,t)}{\partial t}. \qquad (2)$$

Если в следующий момент $t = dt$ движение будет еще представле-но теми же самыми двумя решениями, говорят, что эти решения (или представляемые этими решениями движения) совместимы между собой. За время dt точка ξ перемещается по прямой на расстояние $d\xi$, так что производная $d\xi/dt$ представляет собой скорость распространения одного движения в другом.

Значение введенного понятия совместимости Гюгонио тотчас же раскрывает в двух следующих тезисах. Если новое движение возникает на конце рассматриваемого тела, то это движение полностью определяется условием совместимости с вызвавшим его движением и краевым условием. В случае возникновения нового движения в общей точке двух других движений u_1 и u_2 оно определяется условиями его совместимости с u_1 и u_2.

Желая выразить условия совместимости в аналитической форме, Гюгонио обращается к общему случаю, предполагая, что движение не-которого тела представляется квазилинейным уравнением (1). Пусть u_1 и u_2 - два решения уравнения, представляющие в момент t движение двух частей тела с общим сечением $x=\xi$, для которого имеют ме-сто условия (2). Первое из этих условий определяет ξ как функцию от $t: x=\xi(t)$. Аналогично сказанному в предыдущей статье можно говорить о решении

$$u(x,t)=\begin{cases} u_1, & \text{если} \quad 0\le x<\xi(t), \\ u_2, & \text{если} \quad \xi(t)<x\le l, \end{cases} \quad t\in[t_0,t_1], \qquad (3)$$

уравнения (1), испытывающем разрыв второго порядка вдоль кривой $x=\xi(t)$, где t пробегает некоторый временной отрезок $[t_0,t_1]$. Считая функцию $\xi(t)$ подставленной в условия (3), вследствие чего они обращаются в тождества, и дифференцируя эти тождества по t, Гюгонио получает уравнения, которым должны удовлетворять разрывы второго порядка решения уравнения (1). С помощью современных (впервые использованных Кристоффелем [4] обозначений скачков функций эти уравнения можно записать следующим образом:

$$[u_{xt}]+[u_{xx}]\xi_t=0, \quad [u_{tt}]+[u_{xt}]\xi_t=0. \qquad (4)$$

В таком виде они не отличайся от условий совместимости, полученных позднее (для разрывов второго порядка) Адамаром [3].

Далее Гюгонио подставляет в уравнение (1) сначала $u=u_1$, затем $u=u_2$, и вычитает первый результат из

[1] Строго говоря, нижеследующие равенства (2) следует понимать как равенства левых и правых предельных значений функций u_1 и u_2 и их первых производных в точке $x=\xi$. Такое более точное понимание мы встречаем, например, у Адамара [3].

второго (заменив предварите-льно x на $\xi(t)$). На основании непрерывности коэффициентов L, K, H, M он получает (в современных обозначениях)

$$L[u_{tt}]+2K[u_{xt}]+H[u_{xx}]=0 . \qquad (5)$$

Уравнения (4), (5) составляют систему относительно скачков вторых производных решения уравнения (1), и в случае, если имеет место разрыв второго порядка, условие обращения в нуль определителя этой системы дает

$$L(\xi_t)^2-2K\xi_t+H=0\,^2. \qquad (6)$$

Последнее уравнение Гюгонио и считал искомым условием совместимости. Оно дает два различных, вообще говоря, значения скорости распространения разрыва. Для их определения не требуется интегрирование уравнения (1), если последнее линейно. В частности, для одномерного волнового уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$

получаем $\xi_t=\pm a$.

Не ограничиваясь аналитической характеристикой разрывов второго порядка, Гюгонио дает геометрическую интерпретацию своей теории. Слегка изменяя его рассуждения, предположим, что решение (3) уравнения (1) (в прямоугольнике $[0,l;t_0,t_1]$), претерпевающее вдоль кривой $x=\xi(t)$ разрыв второго порядка, изображено с помощью двух поверхностей $S_1:u=u_1(x,t)$ и $S_2:u=u_2(x,t)$. Напомним, что уравнения $u=u_1, u=u_2$ представляют совместимые движения и что при $x=\xi$ значения функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ и их частных производных первого порядка совпадают. В таком случае поверхности S_1 и S_2 не только пересекаются, но, по выражению Гюгонио, и "связываются" в том смысле, что вдоль линии l их пересечения касательные плоскости к обеим поверхностям совпадают. Проекция этой линии на плоскость (x,t) определяется обыкновенным дифференциальным уравнением (6), являющимся ничем иным, как уравнением горизонтальных проекций характеристик интегральной поверхности уравнения (1)[3]. Следовательно, линия l является общей характеристикой поверхностей S_1 и S_2 , то есть поверхности, представляющие совместимые движения, описываемые уравнением (1), "связываются" вдоль их общей характеристики.

Тем самым Гюгонио впервые показал, что характеристики интег-ральной поверхности уравнения (1) являются единственными линиями разрывов второго порядка на этой поверхности. В дальнейшем это свойство характеристик было обобщено на случай разрывов второго и высших порядков решений произвольных уравнений и систем уравнений гиперболического типа.

Применяя полученные результаты, Гюгонио разрабатывает свой метод решения проблем одномерного движения стержней, жидкостей или газов. В основе этого метода лежит последовательное построение частей интегральной поверхности соответствующего уравнения с частными производными, причем каждые две смежные части «связываются» вдоль общей характеристики.

5. Краткое изложение основных результатов Мемуара [1] было опубликовано в 1885 г. в 101-м томе Докладов Парижской Академии [5]. В том же томе содержится резюме еще одной работы Гюгонио [6, 7], посвященной развитию теории разрывов второго порядка в трехмерном пространстве. Речь идет о «Мемуаре о распространении движения в неограниченной жидкости» [8, 9], полностью напечатанном в 1887-1888 гг.

Мемуар состоит из двух частей. В первой [8] рассматривается система уравнений движения сжимаемой жидкости в форме Эйлера, во второй [9] - в форме Лагранжа. Ставится основная проблема: не интегрируя эху систему, определить скорость распространения движения в жидкости. Для решения этой проблемы Гюгонио обобщает на случай трехмерного пространства некоторые результаты, полученные в одномерном случае. Прежде всего это относится к понятиям распространения одного движения в другом и совместимости. Существенную роль играет при этом новое важное понятие, вводимое Гюгонио, - понятие поверхности волн (поверхности разрыва в современной терминоло-гии). Приведем в несколько сокращенном и слегка модифицированном виде соответствующие рассуждения [8, п. 5].

---

[2] Здесь предполагается, что в коэффициенты L, K, H подставлено значение $u=u_1$ или $u=u_2$, а затем x заменено на $\xi(t)$.

[3] В случае квазилинейности уравнения в его коэффициенты нужно подставить значения u, u_x, u_t из уравнения этой поверхности.

Пусть движение жидкости, описываемое данной системой уравнений с частными производными второго порядка, представлено в некоторый момент времени решением u_1, u_2, u_3 системы (будем говорить ради краткости, что жидкость движется согласно закону u_1, u_2, u_3, или что имеет место движение u_1, u_2, u_3). Если жидкость неограниченная или (в случае ее ограниченности) граничные условия "совместимы" с этим решением (например, если внешнее давление на границе совпадает в каждой точке и в каждый момент с значением давления, определенным этим решением), то и в любой последующий момент времени имеет место то же самое движение.

Но если условия на границе (или части границы) "несовместимы" с u_1, u_2, u_3, здесь возникает новое движение, представленное решением системы u_1', u_2', u_3', которое закатывает все большую часть жидкости за счет вызвавшего его движения u_1, u_2, u_3. Вся жидкость оказывается те-перь разделенной на две области некоторой поверхностью, которая, деформируясь, перемечается в жидкости с течением времени. Такую поверхность Гюгонио называет поверхностью волн. Если S - положение поверхности волн в момент t, а S' в момент $t + dt$, то, проводя нормаль n к S из произвольной точки $(x; y; z)$ на S и обозначая через dn часть этой нормали, заключенной между S и S', он получает скорость распространения dn/dt второго движения в первом.

Гюгонио ограничивается исследованием только таких движений в жидкости, при которых вдоль поверхности волн значения функций u_1, u_2, u_3 и u_1', u_2', u_3' и их частных производных первого порядка равны, а среди вторых производных могут быть различные. Как и в случае одномерного пространства, он еще не говорит о предельных значениях этих функций и их производных при подходе к поверхности волн с двух различных сторон. Если рассматривать функции u_1, u_2, u_3 и u_1', u_2', u_3' как представляющие единое решение данной системы с разных сторон поверхности волн S, получим решение, испытывающее при переходе через S разрыв второго порядка.

Уже из приведенных выше рассуждений Гюгонио следует, что для возможности распространения одного движения в другом необходимо выполнение следующих двух условий: 1) разрывы второго порядка ре-шений данной системы должны происходить на поверхности (поверхности волн); 2) если в момент времени t разрыв имел место на поверхности S, то в ближайший момент $t + dt$ он должен происходить также на поверхности S', очень близкой к S и мало деформированной по сравнению с S. Гюгонио выразил эти условия и математически. В начале XX ст. то же самое сделал Адамар применительно к разрывам произвольного порядка [10, 3]. Первое условие он назвал условием тождественности, второе - кинематическим условием совместимости. Таким образом, Гюгонио впервые получил условия тождественности и кинематические условия совместимости для разрывов второго порядка.

Определяя скорость распространения движения в жидкости, Гюгонио специально останавливается на частном случае движения, когда существует потенциал скоростей, вследствие чего система уравнений гидродинамики (в форме Эйлера) сводится к трехмерному волновому уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u = a^2 \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \right).$$

Обозначая через Φ скачок искомой функции на поверхности волн, он показывает, что скорость распространения волн в жидкости равна a и что

$$\Phi_{tt} = a^2 \Delta \Phi = a^2 \left(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} \right), \text{ или } [u_{tt}] = a^2 \left([u_{xx}] + [u_{yy}] + [u_{zz}] \right).$$

Продолжая эти исследования, Дюгем [11] выразил скорость распространения разрывов произвольного порядка с помощью скачков производных соответствующего порядка искомой функции.

Теория разрывов второго и высших порядков решений уравнений и систем уравнений с частными производными, основы которой заложил Гюгонио, получила дальнейшее развитие в конце XIX - начале XX ст.ст. в работах Кулона и особенно Адамара. В частности, они установили связь этой теории с теорией характеристик в пространстве любой размерности. «Если сопоставить это определение (поверхности волн, - Ю.К.) с понятием характеристик в уравнениях с частными производными, - писал Кулон, - отсюда следует, что поверхность волн является обязательно характеристической поверхностью. Возможность распространения двух движений сводится к доказательству существования решений, принимающих те же самые значения на характеристической поверхности, так же как и их производные первого порядка» [12, стр. 1064]. Адамар назвал результаты Гюгонио «механической интерпретацией результатов, к которым ведет теория характеристик для уравнений с частными производными с числом независимых переменных, большим двух» [10, стр. 57]. Если учесть, какое большое место зани-мает сегодня в математической физике теория характеристик, можно правильно оценить тот вклад, который был внесен в науку исследованиями Гюгонио.

Литература

1. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. - Journal de l'école polyt., t. 39, cah. 57, Paris, 1887, p. 3-97.

2. Риман Б. О распространении плоских волн конечной амплитуды. - Сочинения (перев. с нем.). ОГИЗ ГИТТЛ, М.-Л., 1948, с.376 - 395.

3. Hadamard J. Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodinamique. Paris, 1903. – 329 c.

4. Christoffel E.B. Untersuchungen über die mit Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten. - Annali di mathem. pura ed applic. (2)8, Milan, 1877, p. 81-112.

5. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. - Comptes rendus...de l'Acad.d.sc.d. Paris, 101, 1885, p. 794 -796.

6. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (première Partie). - ibid., p. 1118 - 1120.

7. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (deuxième Partie). – ibid., p. 1229-1232.

8. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (première Partie). - Journal de mathémat. pures et appl., (4)3, Paris, 1887, p. 477 - 492.

9. Hugoniot H. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfi-ni (deuxième Partie).–Journal de mathémat.pures et appl.,(4)4, Paris, 1888, p. 153 - 167.

10. Hadamard J. Sur la propagation des ondes. - Bulletin de la Société mathém.d.France, 29, Paris, 1901, p. 50 - 60.

11. Duhem P. Sur le théorème d'Hugoniot et quelques théorèmes. – Comptes rendus...de l'Acad.d.sc.d. Paris, 131, 1900, 1171 - 1173.

12. Coulon J. Sur les caractéristiques des équations aux dérivées par-tielles et le principe d'Huygens. - Comptes rendus...de l'Acad.d.sc.d.Paris, 130, 1900, p. 1064 – 1065.